

2146

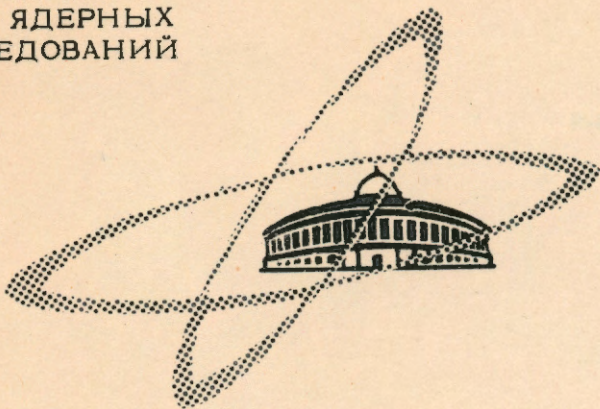
Экз. чит. зала

УЛЯ

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P-2146



И.М. Граменицкий, Л.А. Тихонова, П.В. Шляпников

НОВЫЙ МЕТОД УЧЕТА
КУЛОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ
ПРИ ОБРАБОТКЕ КАМЕРНЫХ ТРЕКОВ

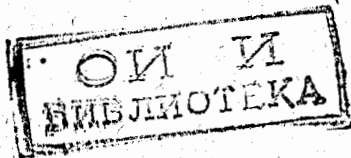
ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1965

P-2146

И.М.Граменицкий, Л.А.Тихонова, П.В.Шляпников

НОВЫЙ МЕТОД УЧЕТА
КУЛОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ
ПРИ ОБРАБОТКЕ КАМЕРНЫХ ТРЕКОВ



В существующих геометрических программах кинематические параметры треков обычно находятся по методу наименьших квадратов путем минимизации функционалов такого типа:

$$Q = \sum_{j=1}^n (y_j - f(\vec{a}, x_j))^2, \quad (1)$$

в которых под координаты x_j, y_j и точек трека подгоняется функция $f(\vec{a}, x)$ случайных параметров $\vec{a} \{a_1, \dots, a_m\}$, определяющих кинематические параметры трека и их ошибки.

При записи функционала в форме (1) неявно предполагается, что дисперсии σ_j^2 в j -ых координатах одинаковы для всех точек трека. Поэтому матрица ошибок параметров $\vec{a} \{a_1, \dots, a_m\}$ определяется произведением корреляционной матрицы G_{ik}^{-1} этих параметров на оценочную дисперсию (см., например, /1,2/):

$$s^2 = \frac{Q_{\min}}{n - m}.$$

Между тем дисперсии в координатах σ_j^2 (sc) из-за кулоновского рассеяния

$$\sigma_j^2(\text{sc}) = \frac{\theta_n^2}{6} \ell^3$$

возрастают с длиной ℓ и, особенно в пузырьковых камерах с тяжелыми жидкостями, могут намного превышать дисперсии $\sigma_j^2(\text{mes})$, вызванные неточностями измерения и восстановления пространственных координат (здесь $\theta_n^2 = E_n^2 / (\beta c p)^2 X_0$, где $E_n = 21$ Мэв, p - импульс (Мэв), X_0 - радиационная длина среды).

В связи с этим в настоящей работе предлагается построить функционал такого типа, в котором были бы учтены дисперсии координат точек трека как из-за ошибок измерения и восстановления пространственных координат, так и из-за кулоновского рассеяния.

К сожалению, этого нельзя сделать просто записав функционал в виде:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_j - f(\vec{a}, x_j)}{\sigma_j} \right)^2,$$

где

$$\sigma_j^2 = \sigma_j^2(\text{mes}) + \sigma_j^2(\text{sc}), \quad (2)$$

так как ошибки в координатах из-за кулоновского рассеяния не являются независимыми. Поэтому надо найти матрицу ошибок координат $S_{jj'}$, диагональные элементы которой были бы равны (2), а недиагональные элементы представляли собой корреляции ошибок в координатах из-за кулоновского рассеяния в разных точках трека.

Для этого выразим смещения ξ_j j -ых точек трека от прямой линии (или от "идеальной окружности" - для треков в магнитном поле) из-за кулоновского рассеяния через набор независимых случайных величин с известными дисперсиями.

Как показано в работе ^{13/}, такими независимыми случайными величинами являются смещения $\delta\xi_j$ в j -ой точке по отношению к $(j-1)$ -ой точке и случайные отклонения на углы $\delta\theta_j$ в j -ой точке по отношению к направлению касательной в $(j-1)$ -ой точке. Дисперсии этих величин равны:

$$\sigma^2(\delta\xi_j) = \frac{\theta_0^2}{6} l_{j-1,j}^3, \quad \sigma^2(\delta\theta_j) = \frac{\theta_0^2}{8} l_{j-1,j}^3, \quad (3)$$

где $l_{j-1,j}$ - расстояние от $(j-1)$ -ой точки до j -ой точки.

Тогда смещение во второй точке

$$\xi_2 = \delta\xi_2,$$

смещение в третьей точке

$$\xi_3 = \xi_2 + (\bar{\theta}_2 + \delta\theta_2) l_{23} + \delta\xi_3,$$

где $\bar{\theta}_2 = 3\delta\xi_2/2l_{12}$ - среднее значение угла отклонения во второй точке при смещении второй точки относительно первой на случайную величину $\delta\xi_2$ (х).

Поэтому

$$\xi_3 = (1 + \frac{3}{2l_{12}} l_{23}) \delta\xi_2 + \delta\xi_3 + l_{23} \delta\theta_2.$$

Аналогично

$$\xi_4 = (1 + \frac{3}{2l_{12}} l_{24}) \delta\xi_2 + (1 + \frac{3}{2l_{23}} l_{34}) \delta\xi_3 + \delta\xi_4 + l_{24} \delta\theta_2 + l_{34} \delta\theta_3,$$

и в общем случае

$$\xi_j = \sum_{k=1}^{j-1} [(1 + \frac{3}{2l_{k,k+1}} l_{k+1,j}) \delta\xi_{k+1} + l_{k+1,j} \delta\theta_{k+1}].$$

Теперь легко найти матрицу кулоновского рассеяния:

х) Как хорошо известно ^{14/}, плотность вероятности смещения точки на величину ξ и отклонения на угол θ на длине l относительно прямой линии, проведенной в направлении движения частицы из первой точки трека, равна:

$$W(\xi, \theta, l) d\xi d\theta = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{\theta^2} \cdot \exp[-\frac{4}{\theta^2} (\frac{\theta^2}{l} - \frac{3\xi\theta}{l^2} + \frac{3\xi^2}{l^3})] d\xi d\theta, \quad (4)$$

т.е. является двумерным гауссовским распределением. Первая из формул (3) получается из (4) при интегрировании по θ . Вторую из формул (3) также легко получить, подставляя, например, в (4) $\xi = \delta\xi_2$ и $\theta_2 = \theta_2(\delta\xi_2) + \delta\theta_2$ и интегрируя по $\delta\xi_2$ от $-\infty$ до $+\infty$.

$$F_{jj'} = \frac{\theta_0^2}{6} \sum_{k=1}^{j-1} [l_{k,k+1}^3 (1 + \frac{3}{2l_{k,k+1}} l_{k+1,j}) (1 + \frac{3}{2l_{k,k+1}} l_{k+1,j'}) + \frac{3}{4} l_{k,k+1} l_{k+1,j} l_{k+1,j'}],$$

где верхний предел суммирования равен наименьшему из индексов j или j' .

Матрица же ошибок координат, в которой ошибки в координатах из-за кулоновского рассеяния суммируются с ошибками из-за неточностей измерения и восстановления пространственных координат, равна:

$$S_{jj'} = F_{jj'} + \sigma_{jj'}^2 (\text{mes}) \delta_{jj'},$$

где

$$\delta_{jj'} = \begin{cases} 1 & \text{при } j=j', \\ 0 & \text{при } j \neq j'. \end{cases}$$

Зная матрицу ошибок координат, искомый функционал можно записать в следующем виде:

$$\chi^2 = \sum_{jj'=1}^n S_{jj'}^{-1} (y_j - f(\vec{a}, x_j))(y_{j'} - f(\vec{a}, x_{j'})),$$

где $S_{jj'}^{-1}$ - матрица, обратная матрице $S_{jj'}$, а суммирование производится по двум индексам: j и j' .

Минимизация такого функционала сводится, как и обычно, к решению систем уравнений:

$$G_{ik} \Delta a_k^{(\nu)} = Y_i, \quad (k=1, \dots, m).$$

Здесь

$$G_{ik} = \sum_{jj'=1}^n S_{jj'}^{-1} [\frac{\partial f(\vec{a}, x_j)}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial f(\vec{a}, x_{j'})}{\partial a_k} + \frac{\partial f(\vec{a}, x_j)}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial f(\vec{a}, x_{j'})}{\partial a_k}],$$

$$Y_i = \sum_{jj'=1}^n S_{jj'}^{-1} [\frac{\partial f(\vec{a}, x_j)}{\partial a_i} (y_{j'} - f(\vec{a}, x_{j'})) + \frac{\partial f(\vec{a}, x_{j'})}{\partial a_i} (y_j - f(\vec{a}, x_j))],$$

а $\Delta a_k^{(\nu)}$ - поправки к значениям параметров $a_k^{(\nu-1)}$, найденным в $(\nu-1)$ -ом приближении: $a_k^{(\nu)} = a_k^{(\nu-1)} + \Delta a_k^{(\nu)}$, $(\nu=0, 1, \dots)$. В случае, если функция $f(\vec{a}, x)$ линейна относительно параметров $\vec{a} = \{a_1, \dots, a_m\}$, решения находятся сразу в нулевом приближении.

Наконец, матрица ошибок параметров $\vec{a} = \{a_1, \dots, a_m\}$ равна:

$$\sigma_{ik}^2 = \Delta a_i \Delta a_k = G_{ik}^{-1},$$

где G_{ik}^{-1} - матрица, обратная матрице G_{ik} .

Авторы признательны А.М.Морсееву, И.Н.Силину и А.А.Тяпкину за полезные обсуждения.

Л и т е р а т у р а

1. Е.Н. Кладницкая. Препринт ОИЯИ, 796, Дубна, 1961.
2. Н.Н. Говорун и др. Препринт ОИЯИ, 1101, Дубна, 1962.
3. L. Michejda. Report 336/VI, Institute of Nuclear Research, Warsaw, 1963.
4. Д. Росси, К. Грейзен. Взаимодействие космических лучей с веществом. ИЛ, Москва, 1948.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 апреля 1965 г.