ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2146

И.М. Граменицкий, Л.А. Тихонова, П.В. Шляпников

НОВЫЙ МЕТОД УЧЕТА КУЛОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ ПРИ ОБРАБОТКЕ КАМЕРНЫХ ТРЕКОВ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1965

P-2146

И.М.Граменицкий, Л.А.Тихонова, П.В.Шляпников

НОВЫЙ МЕТОД УЧЕТА КУЛОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ ПРИ ОБРАБОТКЕ КАМЕРНЫХ ТРЕКОВ

В существующих геометрических программах кинематические параметры треков обычно находятся по методу наименьших квадратов путем минимизации функционалов такого типа:

$$Q = \sum_{j=1}^{n} (y_j - f(\vec{a}, x_j))^2 , \tag{1}$$

в которых под координаты x_j, y_j n точек трека подгоняется функция $f(\vec{a},x)$ случайных параметров $\vec{a}\{a_1,...,a_m\}$, определяющих кинематические параметры трека и их ошибки.

При записи функционала в форме (1) неявно предполагается, что дисперсии σ_j^2 в j -ых координатах одинаковы для всех точек трека. Поэтому матрица ошибок σ_{ik}^2 параметров $\vec{a}\{a_1,...,a_m\}$ определяется произведением корреляционной матрицы G_{ik}^{-1} этих параметров на оценочную дисперсию (см., например, /1,2/):

$$s^2 = \frac{Q_{min}}{n-m} .$$

Между тем дисперсии в координатах σ_j^2 (sc) из-за кулоновского рассеяния

$$\sigma_j^2 (sc) = \frac{\theta_s^2}{6} \ell^3$$

возрастают с длиной ℓ и, особенно в пузырьковых камерах с тяжелыми жидкостями, могут намного превышать дисперсии σ_j^2(mes) , вызванные неточностями измерения и восстановления пространственных координат (здесь $\theta_s^2 = E_s^2/(\beta cp)^2 X_0$, где E_s=21 Мэв, p - импульс (Мэв), X_0 - радиационная длина среды).

В связи с этим в настоящей работе предлагается построить функционал такого типа, в котором были бы учтены дисперсии координат точек трека как из-за ошибок измерения и восстановления пространственных координат, так и из-за кулоновского рассеяния.

К сожалению, этого нельзя сделать просто записав функционал в виде:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{y_j - f(\vec{a},x_j)}{\sigma_j} \right)^2 ,$$

где

$$\sigma_j^2 = \sigma_j^2 (mes) + \sigma_j^2 (sc) , \tag{2}$$

так как ошибки в координатах из-за кулоновского рассеяния не являются независимыми. Поэтому надо найти матрицу ошибок координат $S_{jj'}$, диагональные элементы которой были бы равны (2), а недиагональные элементы представляли собой корреляции ошибок в координатах из-за кулоновского рассеяния в разных точках трека.

Для этого выразим смещения ξ_j j-ых точек трека от прямой линии (или от "идеальной окружности" - для треков в магнитном поле) из-за кулоновского рассеяния через набор независимых случайных величин с известными дисперсиями.

Как показано в работе /3/, такими независимыми случайными величинами являются смещения $\delta\xi_j$ в j-ой точке по отношению к (j-1)-ой точке и случайные отклонения на углы $\delta\theta_j$ в j-ой точке по отношению к направлению касательной в (j-1)-ой точке. Дисперсии этих величин равны:

$$\sigma^2(\delta\xi_j) = \frac{\theta_s^2}{6}\ell_{j-1,j}^3 , \quad \sigma^2(\delta\theta_j) = \frac{\theta_s^2}{8}\ell_{j-1,j} . \tag{3}$$

где $\ell_{j-1,j}$ -расстояние от (j-1)-ой точки до j-ой точки.

Тогда смещение во второй точке

$$\xi_2 = \delta\xi_2 ,$$

смещение в третьей точке

$$\xi_3 = \xi_2 + (\bar{\theta}_2 + \delta\theta_2)\ell_{23} + \delta\xi_3 ,$$

где $\bar{\theta}_2 = 3\delta\xi_2/2\ell_{12}$ - среднее значение угла отклонения во второй точке при смещении второй точки относительно первой на случайную величину $\delta\xi_2$ x).

Поэтому

$$\xi_3 = \left(1 + \frac{3}{2\ell_{12}}\ell_{23}\right)\delta\xi_2 + \delta\xi_3 + \ell_{23}\delta\theta_2 .$$

Аналогично

$$\xi_4 = \left(1 + \frac{3}{2\ell_{12}}\ell_{24}\right)\delta\xi_2 + \left(1 + \frac{3}{2\ell_{23}}\ell_{34}\right)\delta\xi_3 + \delta\xi_4 + \ell_{24}\delta\theta_2 + \ell_{34}\delta\theta_3 ,$$

и в общем случае

$$\xi_j = \sum_{k=1}^{j-1}\left[\left(1 + \frac{3}{2\ell_{k,k+1}}\cdot\ell_{k+1,j}\right)\delta\xi_{k+1} + \ell_{k+1,j}\cdot\delta\theta_{k+1}\right] .$$

Теперь легко найти матрицу кулоновского рассеяния:

---

x) Как хорошо известно /4/, плотность вероятности смещения точки на величину ξ и отклонения на угол θ на длине ℓ относительно прямой линии, проведенной в направлении движения частицы из первой точки трека, равна:

$$W(\xi,\theta,\ell)\,d\xi d\theta = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\cdot\frac{1}{\theta_s^2\ell^2}\cdot\exp\left[-\frac{4}{\theta_s^2}\left(\frac{\theta^2}{\ell} - \frac{3\xi\theta}{\ell^2} + \frac{3\xi^2}{\ell^3}\right)\right] d\xi\, d\theta , \tag{4}$$

т.е. является двумерным гауссовским распределением. Первая из формул (3) получается из (4) при интегрировании по θ. Вторую из формул (3) также легко получить, подставляя, например, в (4) $\xi = \delta\xi_2$ и $\theta_2 = \bar{\theta}_2(\delta\xi_2) + \delta\theta_2$ и интегрируя по $\delta\xi_2$ от $-\infty$ до $+\infty$.

$$F_{jj'} = \frac{\theta_s^2}{6}\sum_{k=1}^{j-1}\left[\ell_{k,k+1}^3\left(1+\frac{3}{2\ell_{k,k+1}}\cdot\ell_{k+1,j}\right)\left(1+\frac{3}{2\ell_{k,k+1}}\cdot\ell_{k+1,j'}\right) + \frac{3}{4}\ell_{k,k+1}\cdot\ell_{k+1,j}\cdot\ell_{k+1,j'}\right],$$

где верхний предел суммирования равен наименьшему из индексов j или j'.

Матрица же ошибок координат, в которой ошибки в координатах из-за кулоновского рассеяния суммируются с ошибками из-за неточностей измерения и восстановления пространственных координат, равна:

$$S_{jj'} = F_{jj'} + \sigma_{jj'}^2(\mathrm{mes})\,\delta_{jj'} ,$$

где

$$\delta_{jj'} = \begin{cases} 1 & \text{при } j = j' , \\ 0 & \text{при } j \neq j' . \end{cases}$$

Зная матрицу ошибок координат, искомый функционал можно записать в следующем виде:

$$\chi^2 = \sum_{jj'=1}^{n} S_{jj'}^{-1}\,(y_j - f(\vec{a}, x_j))(y_{j'} - f(\vec{a}, x_{j'})),$$

где $S_{jj'}^{-1}$ - матрица, обратная матрице $S_{jj'}$, а суммирование производится по двум индексам: j и j'.

Минимизация такого функционала сводится, как и обычно, к решению систем уравнений:

$$G_{ik}\,\Delta a_k^{(\nu)} = Y_i , \quad (k = 1, \ldots , m).$$

Здесь

$$G_{ik} = \sum_{jj'=1}^{n} S_{jj'}^{-1}\left[\frac{\partial f(\vec{a}^{(\nu-1)}, x_j)}{\partial a_i}\cdot\frac{\partial f(\vec{a}^{(\nu-1)}, x_{j'})}{\partial a_k} + \frac{\partial f(\vec{a}^{(\nu-1)}, x_{j'})}{\partial a_i}\cdot\frac{\partial f(\vec{a}^{(\nu-1)}, x_j)}{\partial a_k}\right],$$

$$Y_i = \sum_{jj'=1}^{n} S_{jj'}^{-1}\left[\frac{\partial f(\vec{a}^{(\nu-1)}, x_j)}{\partial a_i}(y_{j'} - f(\vec{a}^{(\nu-1)}, x_{j'})) + \frac{\partial f(\vec{a}^{(\nu-1)}, x_{j'})}{\partial a_i}(y_j - f(\vec{a}^{(\nu-1)}, x_j))\right],$$

а $\Delta a_k^{(\nu)}$ - поправки к значениям параметров $a_k^{(\nu-1)}$, найденным в $(\nu-1)$-ом приближении: $a_k^{(\nu)} = a_k^{(\nu-1)} + \Delta a_k^{(\nu)}$, $(\nu=0,1,\ldots)$. В случае, если функция $f(\vec{a},x)$ линейна относительно параметров $\vec{a}\{a_1,\ldots,a_k,\ldots,a_m\}$ решения находятся сразу в нулевом приближении.

Наконец, матрица ошибок параметров $\vec{a}\{a_1,\ldots,a_m\}$ равна:

$$\sigma_{ik}^2 = \overline{\Delta a_i\,\Delta a_k} = G_{ik}^{-1} ,$$

где G_{ik}^{-1} - матрица, обратная матрице G_{ik}.

Авторы признательны А.М.Моисееву, И.Н.Силину и А.А.Тяпкину за полезные обсуждения.

Литература

1. Е.Н. Кладницкая. Препринт ОИЯИ, 796, Дубна, 1961.
2. Н.Н. Говорун и др. Препринт ОИЯИ, 1101, Дубна, 1962.
3. L.Michejda. Report 386/VI, Institute of Nuclear Research, Warsaw, 1963.
4. Д. Росси, К. Грейзен. Взаимодействие космических лучей с веществом. ИЛ, Москва, 1948.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 апреля 1965 г.