ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2140

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.М.Мальцев, И.И.Пьянов

# УЧЕТ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА В НЕУПРУГИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ В МЕТОДЕ МОНТЕ-КАРЛО

1965

Р-2140

В.М.Мальцев, И.И.Пьянов

# УЧЕТ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА В НЕУПРУГИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ В МЕТОДЕ МОНТЕ-КАРЛО

Направлено в журнал "Ядерная физика"

При взаимодействии протонов с энергией порядка 1 Гэв или больше с ядрами в последних развивается нуклон-мезонный каскад, в котором происходят упругие столкновения, поглощение $\pi$-мезонов, неупругие взаимодействия, связанные с множественным рождением $\pi$-мезонов, и другие процессы.

Данная работа рассматривает только неупругие процессы взаимодействия (расчет других процессов не представляет труда) двух нуклонов или $\pi$-мезона с нуклоном, в которых рождается $n-2$ мезона, так что всего в конечном состоянии будет $n$ частиц, т.е. всегда $n \geq 3$.

Расчет удобно проводить в системе центра инерции (далее просто с.ц.и.), в которой полную энергию частиц обозначим через $U$, а импульс всей системы равен нулю. Необходимо так выбрать импульсы (энергии) и направления импульсов этих частиц, чтобы удовлетворялись законы сохранения энергии и импульса.

Эта задача в общем виде решена в работах Копылова /1,2/, где показано, как найти импульсы и направления частиц, распределения которых задаются квадратом матричного элемента, выбираемого согласно какой-либо модели.

В отличие от этого в нашей работе, которая применяется к расчету каскада в ядре, для внесения меньшей погрешности используются экспериментальные данные по импульсному и угловому распределениям частиц, появляющихся в результате неупругого взаимодействия. В связи с этим метод решения задачи несколько отличается от метода решения в /1,2/ и становится проще.

Целью этой работы является создание практической схемы расчета кинематических характеристик $n$ частиц, пригодной для использования на счетной машине.

## 1. Закон сохранения энергии

Будем рассматривать случаи столкновения двух нуклонов и $\pi$-мезона с нуклоном, различая их по барионному заряду $Q$ : $Q = 1$ для $\pi$-N столкновений, $Q = 2$ для N-N столкновений. Найдем величины импульсов $n$ частиц после неупругого взаимодействия из условия сохранения энергии в с.ц.и., равной $U$. Используем для этого экспериментальные данные по распределению импульсов частиц (нуклонов и $\pi$ - мезонов) в зависимости от их энергии $U$ и барионного заряда $Q$. Такие экспериментальные данные имеются, они дают вероятность $w_{Q,U}(p_\lambda)$ рождения частицы с определенным значением импульса $p_\lambda$ ( значок $\lambda$ означает сорт частицы, $\lambda = \pi$ либо $\lambda = N$ ). Тогда импульс $p_\lambda$ находится из уравнения

$$p_\lambda = F_{Q,U}(\beta), \tag{1}$$

которое есть решение уравнения

$$\beta = f_{Q,U}(p_\lambda) = \int_0^{p_\lambda} w_{Q,U}(p)dp$$

относительно $p_\lambda$, $\beta$ -случайное число, $0 \le \beta \le 1$.

Нахождение величин импульсов $p_1$, $p_2$, $p_3$, ... $p_n$ можно осуществить двумя способами. В первом способе нужно использовать дополнительные данные о вероятности $w_{Q,U}(n)$ рождения определенного числа частиц $n$ при энергии $U$ и барионном заряде $Q$. Зная число частиц $n$ в конечном состоянии, выбираем из распределения (1) $n-1$ импульс таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$U - (E_1 + E_2 + \dots + E_{n-1}) \ge m_\pi, \quad E_\lambda = \sqrt{p_\lambda^2 + m_\lambda^2},$$

( $m_N$ - масса нуклона, $m_\pi$ - масса $\pi$ -мезона). Энергия и импульс последней частицы определяются из закона сохранения энергии. Однако такой способ определения величин импульсов неудобен для использования на счетной машине, т.к. трудно сразу подобрать из (1) такие величины $n-1$ импульса, чтобы выполнялось указанное неравенство. Поэтому применим другой способ, в котором число $n$ определяется автоматически. Если распределения (1) заданы с большой точностью, то оба способа дадут одинаковые данные по множественности.

Во втором способе определим сначала согласно распределению (1) импульсы двух частиц ( $p_{N_1}$ и $p_{\pi_2}$ в случае $Q = 1$, $p_{N_1}$ и $p_{N_2}$ в случае $Q = 2$), которые должны обязательно присутствовать в конечном состоянии после взаимодействия.

Вычислив соответствующие энергии этих частиц

$$E_{N_1} = \sqrt{p_{N_1}^2 + m_N^2}, \qquad E_{\pi_2} = \sqrt{p_{\pi_2}^2 + m_\pi^2} \qquad \text{для} \quad Q = 1, \tag{2}$$

$$E_{N_1} = \sqrt{p_{N_1}^2 + m_N^2}, \qquad E_{N_2} = \sqrt{p_{N_2}^2 + m_N^2} \qquad \text{для} \quad Q = 2,$$

найдем энергию $U_3$, оставшуюся в с.ц.и.:

$$U_3 = U - (E_{N_1} + E_{\pi_2}) \qquad \text{для} \quad Q = 1,$$
$$U_3 = U - (E_{N_1} + E_{N_2}) \qquad \text{для} \quad Q = 2. \qquad (3)$$

Если полученная величина $U_3 < m_\pi$ , то необходимо вновь переопределить импульсы двух частиц по распределению (1), добившись того, что величина $U_3 \geq m_\pi$ . Эта операция необходима потому, что в конечном состоянии при неупругом взаимодействии присутствуют как минимум три частицы. После этого определим по распределению (1) импульс третьей частицы (начиная с третьей частицы все $\lambda = \pi$ ), найдем соответствующую энергию $E_{\pi_3}$ :

$$E_{\pi_3} = \sqrt{p_{\pi_3}^2 + m_\pi^2} \qquad (4)$$

и энергию $U_4$ , оставшуюся в с.ц.и.,

$$U_4 = U_3 - E_{\pi_3} . \qquad (5)$$

Если $U_4 < m_\pi$ , то для рождения второго мезона не хватает энергии и, следовательно, в конечном состоянии будет всего три частицы, $n = 3$. В этом случае определим энергию и импульс третьей частицы из условия сохранения энергии:

$$E_{\pi_3} = U_3 , \quad p_{\pi_3} = \sqrt{U_3^2 - m_\pi^2} . \qquad (6)$$

В результате в с.ц.и. после взаимодействия имеем три частицы с импульсами ( и энергиями):

$$p_{N_1}, p_{\pi_2}, p_{\pi_3} \quad (E_{N_1}, E_{\pi_2}, E_{\pi_3}) \qquad \text{для} \quad Q = 1,$$
$$p_{N_1}, p_{N_2}, p_{\pi_3} \quad (E_{N_1}, E_{N_2}, E_{\pi_3}) \qquad \text{для} \quad Q = 2. \qquad (7)$$

Если же $U_4 \geq m_\pi$ , то энергии в с.ц.и. хватает для рождения следующего, второго, мезона. Поэтому определим опять по распределению (1) импульс $p_{\pi_4}$ , вычислим соответствующую энергию $E_{\pi_4}$ :

$$E_{\pi_4} = \sqrt{p_{\pi_4}^2 + m_\pi^2} \qquad (8)$$

и найдем энергию $U_5$ , оставшуюся в с.ц.и.,

$$U_5 = U_4 - E_{\pi_4} . \qquad (9)$$

Далее все действия аналогичны. Если $U_5 < m_\pi$ , то в с.ц.и. энергии не хватает для рождения третьего мезона и, следовательно, в конечном состоянии будет всего четыре частицы, $n = 4$. В этом случае определим энергию и импульс четвертой частицы из условия сохранения энергии

$$E_{\pi_4} = U_4 \, , \quad p_{\pi_4} = \sqrt{U_4^2 - m_\pi^2} \, . \tag{10}$$

В результате имеем в с.ц.и. после взаимодействия четыре частицы с импульсами ( и энергиями):

$$\begin{aligned} &p_{N_1}, p_{\pi_2}, p_{\pi_3}, \quad p_{\pi_4} \, (E_{N_1}, E_{\pi_2}, E_{\pi_3}, \ E_{\pi_4}) \text{ для } \quad Q = 1, \\ &p_{N_1}, p_{N_2}, p_{\pi_3}, p_{\pi_4} \, (E_{N_1}, E_{N_2}, E_{\pi_3}, \ E_{\pi_4} \quad \text{для} \quad Q = 2. \end{aligned} \tag{11}$$

Если $U_5 > m_\pi$, то энергии в с.ц.и. хватает для рождения третьего мезона. Тогда опять определим импульс $p_{\pi_5}$ по распределению (1), вычислим $E_{\pi_5}$ и найдем $U_6$, сравним $U_6$ и $m_\pi$ и т.д. Этот процесс расчета необходимо продолжать до тех пор, пока не будет исчерпана вся энергия в с.ц.и., причем импульс и энергия последней частицы выбирается так, чтобы был выполнен закон сохранения энергии.

В итоге после неупругого взаимодействия имеем в с.ц.и. $n$ частиц, удовлетворяющих законам сохранения энергии и барионного заряда:

$$\begin{aligned} &p_{N_1}, p_{\pi_2}, p_{\pi_3}, \ldots p_{\pi_n} \, (E_{N_1}, E_{\pi_2}, E_{\pi_3}, \ldots E_{\pi_n}) \text{ для } \quad Q = 1, \\ &p_{N_1}, p_{N_2}, p_{\pi_3}, \ldots \, p_{\pi_n} \, (E_{N_1}, E_{N_2}, E_{\pi_3}, \ldots E_{\pi_n}) \text{ для } \quad Q = 2. \end{aligned} \tag{12}$$

## II . Закон сохранения импульса

Полученные значения импульсов (12) удобно расположить в порядке их убывания по величине, запомнив номера, принадлежащие нуклонам:

$$p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq \ldots \geq p_n \, . \tag{13}$$

Рассмотрим теперь вектора $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$, ... $\vec{p}_n$ с величинами $p_1$, $p_2$, $p_3$, ... $p_n$ и определим их направления (углы $\chi_i$, $\alpha_i$, $i = 1,2,3, \ldots n$ ) в пространстве относительно направления падающей частицы в с.ц.и., которое примем за полярную ось. Ось абсцисс может быть выбрана произвольно, тем самым задается и ось ординат. Всего нужно определить $2n$ углов. Три угла определяются из закона сохранения импульса системы

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots + \vec{p}_n = 0 \, . \tag{14}$$

Остальные $2n - 3$ угла до некоторой степени произвольны, но этот произвол ограничен уравнением (14) и экспериментальными угловыми распределениями ( см. ниже ).

Очевидно, что закону сохранения импульса (14) можно удовлетворить лишь в том случае, если величины $n$ векторов подчиняются условию

$$p_1 \leq p_2 + p_3 + \dots + p_n \ . \tag{15}$$

Если это условие не выполняется, то следует вновь переопределить импульсы $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ по способу, указанному в разделе 1, и добиться выполнения условия (15).

Угловое распределение каждой из частиц по полярному углу $\chi$ зависит от энергии $U$, барионного заряда системы $Q$ и сорта частицы $\lambda$ ($\lambda = \pi$ либо $\lambda = N$). Соответствующие экспериментальные данные дают вероятность $w_{Q,U}(\chi_\lambda)$ вылета частицы сорта $\lambda$ под углом $\chi_\lambda$. Тогда угол $\chi_\lambda$ находится из уравнения

$$\cos\chi_\lambda = G_{Q,U}(\beta), \tag{16}$$

которое есть решение уравнения

$$\beta = g_{Q,U}(\chi_\lambda) = \int\limits_0^{\chi_\lambda} w_{Q,U}(\chi)\sin\chi\, d\chi$$

относительно угла $\chi_\lambda$, $\beta$ –случайное число, $0 \leq \beta \leq 1$.

Найдем сначала направление импульса $p_1$. Азимутальный угол $\alpha_1$, очевидно, произволен

$$\alpha_1 = 2\pi\beta_1, \quad 0 \leq \alpha_1 \leq 2\pi \ . \tag{17}$$

В дальнейшем часто будут встречаться числа $\beta_i$ ($i = 1,2,\dots 2n - 3$), все они являются случайными числами и все $0 \leq \beta_i \leq 1$. В тексте для краткости каждый раз не будем это оговаривать.

Полярный угол $\chi_1$ определим по распределению (16)[x]:

$$\cos\chi_1 = G_{Q,U}(\beta_2), \quad 0 \leq \chi_1 \leq \pi \ . \tag{18}$$

Направление вектора $\vec{p}_2$ должно быть таким, чтобы выполнялись два неравенства

$$(p_3 + p_4 + p_5 + \dots + p_n)^2 > |\vec{p}_1 + \vec{p}_2|^2 > \begin{cases} (-p_3 + p_4 + p_5 + \dots p_n)^2, & \text{если } p_3 \geq p_4 + p_5 + p_6 + \dots + p_n ; \\ (p_1 - p_2)^2, & \text{если } p_3 < p_4 + p_5 + p_6 + \dots + p_n ; \end{cases} \tag{19}$$

---

x) Если величина импульса $p_1$ такая, что выполняется условие $p_1 = p_2 + p_3 + p_4 + \dots p_n$, то

$$\chi_2 = \chi_3 = \chi_4 = \dots = \chi_n = \pi - \chi_1 \ ,$$

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \dots = \alpha_n = \pi - \alpha_1 \ .$$

которые удобно переписать в виде

$$a_2^+ + b_2\cos\chi_2 + c_2\sin\chi_2 \le 0, \qquad 0 \le \chi_2 \le \pi . \tag{20}$$
$$a_2^- + b_2\cos\chi_2 + c_2\sin\chi_2 \ge 0,$$

где

$$a_2^+ = p_1^2 + p_2^2 - (p_3 + p_4 + p_5 + \dots + p_n)^2;$$

$$a_2^- = p_1^2 + p_2^2 - (-p_3 + p_4 + p_5 + \dots + p_n)^2, \text{ если } p_3 \ge p_4 + p_5 + p_6 + \dots + p_n; \tag{20a}$$

$$a_2^- = 2p_1p_2, \text{ если } p_3 < p_4 + p_5 + p_6 + \dots + p_n;$$

$$b_2 = 2p_1p_2\cos\chi_1;$$

$$c_2 = 2p_1p_2\sin\chi_1\cos(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Существование решений (20) возможно при условиях $c_2^2 \ge a_2^{+2} - b_2^2$ и $c_2^2 \ge a_2^{-2} - b_2^2$, которые сводятся к условию

$$c_2^2 \ge a_{2max}^2 - b_2^2 \tag{21a}$$

($a_{2max}^2$ –наибольшее из $a_2^{+2}$ и $a_2^{-2}$) и $c_2$ имеет любой знак при $|a_2^+| \le |b_2|$ или при $|a_2^+| \ge |b_2|$, $a_2^+ \le 0$, $c_2 < 0$ при $|a_2^+| \ge |b_2|$, $a_2^+ \ge 0$. (21б)

Условия (21) позволяют найти угол $\alpha_2$:

$$\alpha_2 = 2\pi\beta_3, \quad 0 \le \alpha_2 \le 2\pi . \tag{22}$$

Из распределения (22) трудно сразу найти путем случайной выборки $\beta_3$ угол $\alpha_2$, удовлетворяющий условию $c_2^2 \ge a_{2max}^2 - b_2^2$ (21а) и условию (21б). При выполнении этих условий уравнения (20) имеют решение, при котором угол $\chi_2$ заключен между 0 и $\pi$. Укажем способ быстрого нахождения угла $\alpha_2$. Определим сначала $\alpha_2^{(1)}$ из (22), соответствующее $\beta_3^{(1)}$; если оно не удовлетворяет (21а), то определим другое $\alpha_2^{(2)}$, взяв $\beta_3^{(2)}$. Если при этом неравенство, обратное (21а), становится более слабым, то $\beta_3 > \beta_3^{(2)}$ (при $\beta_3^{(2)} > \beta_3^{(1)}$) и $\beta_3 < \beta_3^{(2)}$ (при $\beta_3^{(2)} < \beta_3^{(1)}$); если же неравенство, обратное (21а), становится более сильным, то $\beta_3 < \beta_3^{(1)}$ (при $\beta_3^{(2)} > \beta_3^{(1)}$) и $\beta_3 > \beta_3^{(1)}$ (при $\beta_3^{(2)} < \beta_3^{(1)}$). Действуя таким способом, дальше найдем подходящее значение $\alpha_2$, удовлетворяющее условию (21а). Условию (21б) удовлетворить легче: если коэффициенты в неравенствах (20) такие, что $|a_2^+| \le |b_2|$ или $|a_2^+| \ge |b_2|$, $a_2^+ \le 0$, то найденное значение $\alpha_2$ удовлетворяет всем условиям (21) и его принимаем за азимутальное направление вектора $p_2$; если же коэффициенты в (20) такие, что $|a_2^+| \ge |b_2|$, $a_2^+ \ge 0$, а значение $\alpha_2$ такое, что величина $c_2 > 0$, то сле–

дует изменить найденное значение $\alpha_2$ на величину $\pi$ ( если $c_2 < 0$, то $\alpha_2$ оставить прежним) и полученное значение принять за азимутальное направление вектора $p_2$ x)

Вычислив при найденном значении $\alpha_2$ величину $c_2$ (20а), определим угол $\chi_2$ используя распределение (16):

$$\cos\chi_2 = G_{Q,U}(\beta_4), \quad 0 \le \chi_2 \le \pi \quad . \tag{24}$$

Найденное значение $\chi_2$ должно удовлетворять двум условиям (20). Из распределения (16) трудно сразу путем случайной выборки $\beta_4$ найти угол $\chi_2$, удовлетворяющий двум условиям (20), поэтому укажем способ быстрого нахождения подходящего значения $\chi_2$. Сначала по распределению (16) находим $\chi_2^{(1)}$, соответствующий $\beta_4^{(1)}$. Если найденное значение $\chi_2^{(1)}$ не удовлетворяет условиям (20) (оба неравенства либо > 0, либо < 0), то определим другое $\chi_2^{(2)}$, взяв $\beta_4^{(2)}$. Если при найденном $\chi_2^{(2)}$ оба неравенства изменили знак, то искомое $\beta_4$ заключено между $\beta_4^{(1)}$ и $\beta_4^{(2)}$. Если же при найденном значении $\chi_2^{(2)}$ характер неравенств не изменился, то искомое $\beta_4$ будет ограничено либо $\beta_4 < \beta_4^{(2)}$ ( при $\beta_4^{(2)} < \beta_4^{(1)}$ ), либо $\beta_4 > \beta_4^{(2)}$ ( при $\beta_4^{(2)} > \beta_4^{(1)}$ ), если неравенства стали более слабыми; или $\beta_4$ будет ограничено либо $\beta_4 > \beta_4^{(1)}$ ( при $\beta_4^{(1)} > \beta_4^{(2)}$ ), либо $\beta_4 < \beta_4^{(1)}$ ( при

---

x) Если число частиц равно трем ( $n = 3$), то все произвольные углы $\chi_1$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ определены. Остальные три угла определим из закона сохранения импульса (14). В этом случае $a_2^+ = a_2^- = a_2 \ge 0$ ( $a_2 = p_1^2 + p_2^2 - p_3^2$ ), и первое уравнение будет $a_2 + b_2 \cos\chi_2 + c_2 \sin\chi_2 = 0$, $0 \le \chi_2 \le \pi$ . Это уравнение имеет два решения:

$$\text{I.} \ \cos\chi_2 = \frac{-a_2 b_2 - c_2\sqrt{c_2^2 + b_2^2 - a_2^2}}{b_2^2 + c_2^2}, \qquad \text{II.} \ \cos\chi_2 = \frac{-a_2 b_2 + c_2\sqrt{c_2^2 + b_2^2 - a_2^2}}{b_2^2 + c_2^2} \ .$$

Если в (21б) выполняется условие $a_2 \ge |b_2|$ (т.е. $c_2 < 0$ ), то можно взять любое из решений I, II, причем выбор удобно сделать, введя знаковую функцию

$$\binom{+}{-} = f(\beta) = \begin{cases} -, & \beta < ½ , \quad (\text{I}) \\ +, & \beta > ½ . \quad (\text{II}) \end{cases} \tag{23}$$

Если в (21б) выполнено условие $a_2 \le |b_2|$ (т.е. $c_2$ любое по знаку), то при $b_2 > 0$ решением является I , при $b_2 < 0$ решением является II . Угол $\chi_3$ легко определить из второго уравнения:

$$\cos\chi_3 = -\frac{1}{p_3}(p_1 \cos\chi_1 + p_2 \cos\chi_2), \quad 0 \le \chi_3 \le \pi \ .$$

Из третьего уравнения находим угол $\alpha_3$ : $\alpha_3 = \pi + \phi_2$, где $\phi_2$ определено в (25).

$\beta_4^{(1)} < \beta_4^{(2)}$ ), если неравенства стали более сильными. Действуя таким способом, дальше найдем после нескольких аналогичных шагов подходящее значение $\chi_2$ x).

Вычислим углы $\Phi_2$ , $\phi_2$ , определяющие направление вектора $\vec{q}_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ :

$$\cos\Phi_2 = \frac{p_1\cos\chi_1 + p_2\cos\chi_2}{q_2}, \quad 0 < \Phi_2 \leq \pi ,$$

$$\operatorname{tg}\phi_2 = \frac{q_{2y}}{q_{2x}} = \frac{p_1\sin\chi_1\sin\alpha_1 + p_2\sin\chi_2\sin\alpha_2}{p_1\sin\chi_1\cos\alpha_1 + p_2\sin\chi_2\cos\alpha_2}, \quad 0 \leq \phi_2 \leq 2\pi , \tag{25}$$

$$q_2 = \sqrt{p_1 + p_2 + b_2\cos\chi_2 + c_2\sin\chi_2} .$$

Поскольку $\operatorname{tg}\phi_2$ является неоднозначной функцией $\phi_2$ , то значение этого угла определим с помощью таблицы 1.

Таблица 1

| Значение угла $\phi_i$ | Знак $q_{ix}$ | Знак $q_{iy}$ |
|---|---|---|
| $0 - \pi/2$ | + | + |
| $\pi/2 - \pi$ | – | + |
| $\pi - 3\pi/2$ | – | – |
| $3\pi/2 - 2\pi$ | + | – |

$(i = 2, 3, 4, \ldots\ n - 1)$

Далее аналогичным образом определим углы $\chi_3$ , $\alpha_3$ вектора $\vec{p}_3$ , которые должны быть такими, чтобы выполнялись неравенства

---

x) Если значение $\chi_2$ такое, что одно из неравенств (20) обращается в равенство, то при условии $a_2^+ + b_2\cos\chi_2 + c_2\sin\chi_2 = 0$ имеем

$$\chi_3 = \chi_4 = \chi_5 = \ldots = \chi_n = \pi - \Phi_2, \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \ldots = \alpha_n = \pi - \phi_2 ,$$

при условии $a_2^- + b_2\cos\chi_2 + c_2\sin\chi_2 = 0$ и $p_3 \geq p_4 + p_5 + p_6 + \ldots + p_n$ имеем

$$\pi - \chi_3 = \chi_4 = \chi_5 = \ \ldots = \chi_n = \Phi_2, \pi - \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 \ldots = \alpha_n = \phi_2 \quad \text{(см. (25))}$$

$$(p_4+p_5+p_6+\ldots+p_n)^2>|\vec q_2+\vec p_3|^2\geqslant\begin{cases}(-p_4+p_5+p_6+\ldots+p_n)^2, \text{ если } & p_4\geq p_5+p_6+\ldots+p_n,\\ (q_2-p_3)^2, \text{ если } & p_4<p_5+p_6+\ldots+p_n.\end{cases} \quad (26)$$

Последние удобно записать в виде

$$\begin{aligned} a_3^+ + b_3\cos\chi_3 + c_3\sin\chi_3 \leq 0, \\ a_3^- + b_3\cos\chi_3 + c_3\sin\chi_3 \geq 0, \end{aligned} \qquad 0\leq\chi_3\leq\pi, \qquad (27)$$

где

$$a_3^+ = q_2^2+p_3^2-(p_4+p_5+p_6+\ldots+p_n)^2,$$

$$a_3^- = q_2^2+p_3^2-(-p_4+p_5+p_6+\ldots+p_n)^2, \text{ если } p_4>p_5+p_6+p_7+\ldots+p_n$$

$$a_3^- = 2q_2p_3, \text{ если } p_4<p_5+p_6+p_7+\ldots+p_n, \qquad (27а)$$

$$b_3 = 2q_2p_3\cos\Phi_2,$$

$$c_3 = 2q_2p_3\sin\Phi_2\cos(\alpha_3-\phi_2).$$

Существование решений (27) возможно при условиях $c_3^2>a_3^{+2}-b_3^2$ и $c_3^2>a_3^{-2}-b_3^2$, которые сводятся к условию

$$c_3^2>a_{3max}^2-b_3^2 \qquad (28а)$$

($a_{3max}^2$ – наибольшее из $a_3^{+2}$ и $a_3^{-2}$) и $c_3$ имеет любой знак при $|a_3^+|\leq|b_3|$ или при $|a_3^+|\geq|b_3|$, $a_3^+\leq 0$, $c_3<0$ при $|a_3^+|>|b_3|$, $a_3^+>0$. (28б)

Условия (28) позволяют определить угол $\alpha_3$:

$$\alpha_3 = 2\pi\beta_5, \quad 0\leq\alpha_3\leq 2\pi. \qquad (29)$$

Найденное значение $\alpha_3$ должно удовлетворять условиям (28а) и (28б). Все замечания, сделанные для угла $\alpha_2$ (см. замечания к формуле (22)), полностью аналогичны для угла $\alpha_3$ x).

---

x) Если число частиц равно четырем ( $n=4$), то все произвольные углы $\chi_1$, $\alpha_1$, $\chi_2$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ определены. Остальные три угла определим из закона сохранения (14). В этом случае $a_3^+=a_3^-=a_3\geq 0$ ($a_3=q_2^2+p_3^2-p_4^2$) и $\chi_3$ определяется из уравнения $a_3+b_3\cos\chi_3+c_3\sin\chi_3=0$, $0\leq\chi_3\leq\pi$, которое имеет два решения:

$$\text{I. } \cos\chi_3=\frac{-a_3b_3-c_3\sqrt{c_3^2+b_3^2-a_3^2}}{b_3^2+c_3^2}, \quad \text{II. } \cos\chi_3=\frac{-a_3b_3+c_3\sqrt{c_3^2+b_3^2-a_3^2}}{b_3^2+c_3^2}.$$

Если в (28б) выполняется условие $a_3\geq|b_3|$ (т.е. $c_3<0$), то решением уравнения является I и II, выбор одного из них удобно сделать с помощью знаковой функции (23). Если в (28б) выполнено условие $a_3\leq|b_3|$ (т.е. $c_3$ любое), то при $b_3>0$ решением является I, при $b_3<0$ решением является II. Угол $\chi_4$ вычислим из уравнения

$$\cos\chi_4=-\frac{1}{p_4}(p_1\cos\chi_1+p_2\cos\chi_2+p_3\cos\chi_3), \quad 0\leq\chi_4\leq\pi$$

Угол $\alpha_4$ вычислим из уравнения $\alpha_4=\pi+\phi_3$ (см. (31)).

Вычислим при найденном значении $\alpha_3$ величину $c_2$ (27а), определим угол $\chi_3$, используя распределение (16)

$$\cos\chi_3 = G_{Q,U}(\beta_6)\ ,\ 0 \le \chi_3 \le \pi\ . \tag{30}$$

Найденное значение $\chi_3$ должно удовлетворять двум условиям (27)[x]. Все замечания о нахождении $\chi_2$ остаются в силе для $\chi_3$ .

Вычислим углы $\Phi_3$ , $\phi_3$ , определяющие направление вектора $\vec{q}_3 = \vec{q}_2 + \vec{p}_3$ .

$$\cos\Phi_3 = \frac{p_1\cos\chi_1 + p_2\cos\chi_2 + p_3\cos\chi_3}{q_3},\ \ 0 \le \Phi_3 \le \pi\ ;$$

$$\operatorname{tg}\phi_3 = \frac{q_{3y}}{q_{3x}} = \frac{p_1\sin\chi_1\sin\alpha_1 + p_2\sin\chi_2\sin\alpha_2 + p_3\sin\chi_3\sin\alpha_3}{p_1\sin\chi_1\cos\alpha_1 + p_2\sin\chi_2\cos\alpha_2 + p_3\sin\chi_3\cos\alpha_3},\ 0 \le \phi_3 \le 2\pi; \tag{31}$$

$$q_3 = \sqrt{q_2 + p_3 + b_3\cos\chi_3 + c_3\sin\chi_3}\ .$$

Значение угла $\phi_3$ определяется по таблице 1.

Действуя таким же образом, определим углы $\chi_4$ , $\alpha_4$ , $\chi_5$ , $\alpha_5$ , ... $\chi_{k-1}$, $\alpha_{k-1}$ и вычислим углы $\Phi_{k-1}$ , $\phi_{k-1}$ , определяющие направление вектора $\vec{q}_{k-1} = \vec{q}_{k-2} + \vec{p}_{k-1}$ $(\vec{q}_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2)$,

$$\cos\Phi_{k-1} = \frac{1}{q_{k-1}}\sum_{i=1}^{k-1} p_i\cos\chi_i\ ,\quad 0 \le \Phi_{k-1} \le \pi\ ,$$

$$\operatorname{tg}\phi_{k-1} = \frac{q_{k-1,y}}{q_{k-1,x}} = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} p_i\sin\chi_i\sin\alpha_i}{\sum_{i=1}^{k-1} p_i\sin\chi_i\cos\alpha_i}\ ,\ \ 0 \le \phi_{k-1} \le 2\pi\ , \tag{32}$$

$$q_{k-1} = \sqrt{q_{k-2}^2 + p_{k-1}^2 + b_{k-1}\cos\chi_{k-1} + c_{k-1}\sin\chi_{k-1}}\ .$$

Значение угла $\phi_{k-1}$ определяется по таблице 1 .

---

x) Если значение угла $\chi_3$ такое, что одно из неравенств (27) обращается в равенство, то при условии $a_3^+ + b_3\cos\chi_3 + c_3\sin\chi_3 = 0$ имеем

$$\chi_4 = \chi_5 = \chi_6 = \dots = \chi_n = \pi - \Phi_3\ ,\ \ \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \dots = \alpha_n = \pi - \phi_3\ ,$$

при условии $a_3^- + b_3\cos\chi_3 + c_3\sin\chi_3 = 0$ и $p_4 > p_5 + p_6 + p_7 + \dots + p_n$ имеем

$$\pi - \chi_4 = \chi_5 = \chi_6 = \dots = \chi_n = \Phi_3\ ,\ \ \pi - \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \dots = \alpha_n = \phi_3\ ,$$

где $\Phi_3$ , $\phi_3$ определяются формулами (31).

Определим углы $\chi_k$, $\alpha_k$ вектора $\vec{p}_k$, которые должны быть такими, чтобы выполнялись неравенства

$$(p_{k+1}+p_{k+2}+\ldots+p_n)^2 \geq |\vec{q}_{k-1}+\vec{p}_k|^2 \geq \begin{cases}(-p_{k+1}+p_{k+2}+\ldots+p_n)^2, & \text{если } p_{k+1}\geq p_{k+2}+p_{k+3}+\ldots+p_n;\\ (q_{k-1}-p_k)^2, & \text{если } p_{k+1}<p_{k+2}+p_{k+3}+\ldots+p_n.\end{cases} \quad (33)$$

Эти неравенства представим в виде

$$\begin{aligned} &a_k^+ + b_k\cos\chi_k + c_k\sin\chi_k \leq 0,\\ &a_k^- + b_k\cos\chi_k + c_k\sin\chi_k \geq 0,\end{aligned} \qquad 0<\chi_k<\pi, \qquad (34)$$

где

$$a_k^+ = q_{k-1}^2+p_k^2-(p_{k+1}+p_{k+2}+p_{k+3}+\ldots+p_n)^2,$$

$$a_k^- = q_{k-1}^2+p_k^2-(-p_{k+1}+p_{k+2}+p_{k+3}+\ldots+p_n)^2, \quad \text{если } p_{k+1}\geq p_{k+2}+p_{k+3}+\ldots+p_n,$$

$$a_k^- = 2q_{k-1}\,p_k, \quad \text{если } p_{k+1}<p_{k+2}+p_{k+3}+\ldots+p_n, \qquad (34а)$$

$$b_k = 2q_{k-1}\,p_k\cos\Phi_{k-1},$$

$$c_k = 2q_{k-1}\,p_k\sin\Phi_{k-1}\cos(\alpha_k-\phi_{k-1}).$$

Существование решений (34) возможно при условиях $c_k^2 \geq a_k^{+2}-b_k^2$ и $c_k^2 \geq a_k^{-2}-b_k^2$, которые сводятся к условию

$$c_k^2 \geq a_{k\max}^2 - b_k^2 \qquad (35а)$$

($a_{k\max}^2$ – наибольшее из $a_k^{+2}$ и $a_k^{-2}$) и $c_k$ имеет любой знак при $|a_k^+|\leq|b_k|$ или при $|a_k^+|\geq|b_k|$, $a_k^+\leq 0$, $c_k<0$ при $|a_k^+|\geq|b_k|$, $a_k^+\geq 0$. (35б)

Условия (35) позволяют определить угол $\alpha_k$

$$\alpha_k = 2\pi\beta_{2k-1}, \qquad 0\leq\alpha\leq 2\pi, \qquad (36)$$

причем найденное в (36) значение $\alpha_k$ должно удовлетворять двум условиям (35а) и условию (35б). Все замечания, сделанные для угла $\alpha_2$ (см. замечания к формуле (22) ), полностью пригодны для угла $\alpha_k$.

Вычислив при найденном значении $\alpha_k$ величину $c_k$ (34а), определим угол $\chi_k$ используя распределение ( 16) :

$$\cos\chi_k = G_{Q,U..}(\beta_{2k}), \qquad 0\leq\chi_k\leq\pi. \qquad (37)$$

Найденное в (37) значение $\chi_k$ должно удовлетворять двум условиям (34)[x]. Все замечания для $\chi_2$ остаются в силе для $\chi_k$ .

Очевидно, что вычисление углов следует продолжать до $k = n-2$ и затем определить угол $\alpha_{n-1}$ , тогда будем иметь $2n-3$ произвольных угла

$$\chi_1, \alpha_1, \chi_2, \alpha_2, \ldots \chi_{n-2}, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1} . \tag{38}$$

Остальные три угла, $\chi_{n-1}$ , $\chi_n$ , $\alpha_n$ , найдем из закона сохранения импульса. Угол $\chi_{n-1}$ определяется из уравнения

$$a_{n-1} + b_{n-1} \cos\chi_{n-1} + c_{n-1} \sin\chi_{n-1} = 0, \tag{39}$$

где

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= q^2_{n-2} + p^2_{n-1} - p^2_n \geq 0, \\ b_{n-1} &= 2q_{n-2}\, p_{n-1} \cos\Phi_{n-1} , \\ c_{n-1} &= 2q_{n-2}\, p_{n-1} \sin\Phi_{n-1} \cos(\alpha_{n-1} - \phi_{n-2}) . \end{aligned} \tag{39a}$$

Уравнение (39) имеет два решения:

$$\begin{aligned} &\text{I. } \cos\chi_{n-1} = \frac{-a_{n-1} b_{n-1} - c_{n-1}\sqrt{c^2_{n-1} + b^2_{n-1} - a^2_{n-1}}}{b^2_{n-1} + c^2_{n-1}} , \\ &\text{II. } \cos\chi_{n-1} = \frac{-a_{n-1} b_{n-1} + c_{n-1}\sqrt{c^2_{n-1} + b^2_{n-1} - a^2_{n-1}}}{b^2_{n-1} + c^2_{n-1}} , \quad 0 \leq \chi_{n-1} \leq \pi . \end{aligned} \tag{40}$$

Если $a_{n-1} \geq |b_{n-1}|$ (т.е. $c_{n-1} < 0$ ), то в качестве решения (39) можно взять любое из решений I , II , выбор решения удобно сделать по знаковой функции (23). Если $a_{n-1} < |b_{n-1}|$ (т.е. $c_{n-1}$ любое по знаку), то при $b_{n-1} > 0$ решением (39) является I , при $b_{n-1} < 0$ решением (39) являеися II .

---

x) Если значение угла $\chi_k$ такое, что одно из неравенств (34) обращается в равенство, то при условии $a^+_k + b_k \cos\chi_k + c_k \sin\chi_k = 0$ имеем

$$\chi_{k+1} = \chi_{k+2} = \chi_{k+3} = \ldots = \chi_n = \pi - \Phi_k , \quad \alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \alpha_{k+3} = \ldots = \alpha_n = \pi - \phi_k ,$$

при условии $a^-_k + b_k \cos\chi_k + c_k \sin\chi_k = 0$ и $p_{k+1} \geq p_{k+2} + p_{k+3} + \ldots + p_n$ имеем

$$\pi - \chi_{k+1} = \chi_{k+2} = \chi_{k+3} = \ldots = \chi_n = \Phi_k , \quad \pi - \alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \alpha_{k+3} = \ldots = \alpha_n = \phi_k ,$$

где $\Phi_k$ , $\phi_k$ определяется формулами (32) при замене $k-1$ на $k$ .

Углы $\chi_n$ , $\alpha_n$ легко определить из уравнений

$$\cos\chi_n = -\frac{1}{p_n}\sum_{i=1}^{n-1} p_i \cos\chi_i\,, \quad 0 \le \chi_n \le \pi\,, \tag{41}$$
$$\alpha_n = \pi + \phi_{k-1}\,,$$

где угол $\phi_{n-1}$ определяется из (32) при $k = n$ .

Таким образом, найдены все $n$ величин импульсов $p_1$ , $p_2$ , $p_3$ , ... $p_n$ и их углы $\chi_1$ , $\alpha_1$ , $\chi_2$ , $\alpha_2$ , ... $\chi_n$ , $\alpha_n$ , удовлетворяющие законам сохранения энергии и импульса.

## Литература


1. Г.И.Копылов. ЖЭТФ, 35, 1426 (1958).
2. Г.И.Копылов. ЖЭТФ, 39, 1091 (1960).



Рукопись поступила в издательский отдел
26 апреля 1965 г.