ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

В. И. Огиевецкий, Чжоу Гуан-чжао

Р-214

Свойства зарядовой симметрии и представления расширенной группы Лоренца в теории элементарных частиц

ЖЭТФ, 1959, т36, в. 1, с. 264-270.
Nucl. Phys., 1959, т 10, в 3, с. 235-243.

г. Дубна, 1958 год

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

В. И. Огиевецкий, Чжоу Гуан-чжао

Р-214

Свойства зарядовой симметрии и представления расширенной группы Лоренца в теории элементарных частиц

г. Дубна, 1958 год

А н н о т а ц и я

Рассматривается расширенная группа Лоренца, включающая полную группу Лоренца и операцию зарядового сопряжения. Показано, что использование неприводимых проективных представлений этой расширенной группы требует существования зарядовых мультиплетов. Из инвариантности относительно отражений, зарядового сопряжения и законов сохранения электрического и барионного зарядов следует зарядовая симметрия и парное рождение странных частиц. Для свободных нуклонов существует преобразование Паули-Гюрси, требование инвариантности относительно которого и во взаимодействии приводит к изобарической инвариантности для всех частиц в сильных взаимодействиях.

I. Введение

Известно, что сильно взаимодействующие частицы объединяются в зарядовые мультиплеты (p , n , π^+, π^0, π^- , K^+ , K^0 и т.д.). Частицы, принадлежащие данному мультиплету, имеют почти совпадающие массы, один и тот же спин, но отличаются по величине электрического заряда. В соответствии с экспериментом принимаются гипотеза зарядовой симметрии и более сильная гипотеза зарядовой независимости. В обычной теории это выражается в инвариантности относительно вращений в некотором формальном изобарическом пространстве. Частицы данного мультиплета рассматриваются как состояния с различными проекциями изобарического спина одной и той же частицы соответствующего изобарического спина. Протон и нейтрон, например, образуют нуклеон.

Для описания нуклеона используется приводимое 8-компонентное представление полной группы Лоренца. Аналогичная ситуация (приводимость представления полной группы Лоренца) имеет место и для других сильно взаимодействующих частиц.

Возникает вопрос:

Если потребовать, чтобы элементарные частицы описывались только неприводимыми представлениями, то нельзя ли так расширить группу Лоренца и найти такие неприводимые представления этой расширенной группы, из которых автоматически вытекало бы существование зарядовых мультиплетов и свойства зарядовых симметрий.

Разрешению этого вопроса и посвящена настоящая работа.

Мы расширяем группу Лоренца следующим образом:

В квантовой теории волновые функции являются комплексными. Операция зарядового сопряжения C, переводящая частицу в античастицу, всегда представляется произведением линейного оператора (матрицы) на антилинейный оператор комплексного сопряжения:

$$C: \qquad \psi_c = C_0 \psi^*, \tag{I}$$

где C_0 определяется так, что ψ_c преобразуется по тому же самому неприводимому представлению собственной группы Лоренца, как и ψ.

В расширенную группу мы включаем кроме собственной группы Лоренца L, пространственных отражений I и временных отражений T, также и операцию зарядового сопряжения C.

Мы затем рассматриваем наряду с обычными неприводимыми представлениями расширенной группы также и её проективные неприводимые представления[x].

---

x) Если каждому элементу g группы G сопоставлен оператор $R(g)$, причём произведению элементов группы $g_1 g_2$ сопоставлен оператор $R(g_1 g_2) = \alpha(g_1, g_2) R(g_1) R(g_2)$ то говорят, что задано проективное представление группы. Если $\alpha(g_1, g_2) \equiv 1$, то проективное представление будет обычным. В общем случае $\alpha(g_1, g_2)$ может равняться и − I. Таким образом, в проективном представлении коммутирующим элементам группы могут быть сопоставлены антикоммутирующие операторы представления. В частности, обычное спинорное представление является проективным (операции γ_4 и $\gamma_4 \gamma_5$ антикоммутируют, тогда как пространственные и временные отражения коммутируют).

На важность использования проективных представлений полной группы Лоренца указали Гельфанд и Цетлин [1], в связи с теорией четностных дублетов Ли и Янга. Возможность применения проективных представлений связана с неопределенностью фазового множителя при волновой функции в квантовой теории. Позже Гельфанда и Цетлина проективные представления полной группы Лоренца рассматривались Тейлором и Мак Леннаном [2]. В работе Тейлора [2] намечается связь между этими представлениями и изобарической инвариатностью, причём, так как рассматривается только полная группа Лоренца, протоны и нейтроны, $\pi^{\pm}$ и π^{0} мезоны отличаются по пространственной четности. Идея необходимости новых определений операций пространственно-временных отражений, из которых следовали бы зарядовые симметрии, обсуждались также Саламом и Пайсом на 7-й Рочестерской конференции.

В этой статье мы не будем изучать всех неприводимых проективных представлений расширенной группы, а ограничимся лишь теми, которые необходимы для описания сильно взаимодействующих частиц. Будет показано, что если описать нуклоны, Ξ -частицы и K -мезоны необычными, проективными представлениями расширенной группы, а остальные частицы описывать обычным образом, то мультиплетность, свойство зарядовой симметрии и парное рождение странных частиц вытекает из стандартных законов сохранения числа барионов, электрического заряда и инвариантности относительно полной группы Лоренца и зарядового сопряжения.

В излагаемой теории существует преобразование Паули-Гюрси для свободных нуклонов, которое естественным образом связывается с изобарической инвариантностью. Из требования инвариантности и лагранжиана взаимодействия относительно этого преобразования для нуклонов, вытекает изобарическая инвариантность в сильных взаимодействиях для всех частиц.

В этой теории не трудно написать лагранжиан взаимодействия с электромагнитными полями с помощью оператора заряда. Оказывается, что швингеровское обращение времени не сохраняется для электромагнитных взаимодействий, а сохраняется только вигнеровское обращение времени.

Слабые взаимодействия, в которых нарушается и пространственная четность, более сложны, и в этой статье не будут рассматриваться.

Для конкретности будем считать, что относительная пространственная четность всех барионов одинакова и отражение обычных спиноров производится с помощью оператора γ_4. Все бозоны считаются псевдоскалярнырными. Начнем с рассмотрения нуклонов.

§ 3. Свободное нуклонное поле

Для 4 -компонентные спиноров, если потребовать, чтобы

$$I^2 = T^2 = C^2 = 1, \tag{2}$$

то, как легко показать, операторы I , T и C выражаются так

$$I: \qquad \psi' = \gamma_4 \psi, \tag{3a}$$

$$T: \qquad \psi' = i\gamma_4\gamma_5 \psi, \tag{3б}$$

$$C: \qquad \psi_c = i\gamma_2 \psi^*, \tag{3c}$$

где T -швингеровское спинорное обращение времени[3], а матрицы γ_i выражаются в представлении Паули.

Между операторами I , T и C и действуют следующие коммутационные соотношения:

$$IT = -TI, \tag{4a}$$

$$IC = -CI, \tag{4б}$$

$$TC = -CT. \tag{4c}$$

В отличие от обычной теории, сохраняя соотношения (2), мы потребуем, чтобы соотношение (4а) переменило знак для нуі нов, т.е. чтобы выполнялось:

$$IT = TI \quad (a), \qquad IC = -CI \quad (b),$$
$$TC = -CT \quad (c) \tag{4}$$

Коммутационным правилам (2) и (4) удовлетворяют только 8 x 8 матрицы:

$$I: \qquad \psi' = \tau_3 \times \gamma_4 \psi,$$
$$T: \qquad \psi' = 1 \times \gamma_4 \psi,$$
$$C: \qquad \psi_c = i\tau_3 \times \gamma_2 \psi^*, \tag{5}$$

где τ -матрицы Паули.

Эти операторы, совместно с операторами собственной гр пы Лоренца, в которых следует всюду заменить γ_μ на $1 \times \gamma_\mu$ образуют проективное неприводимое представление группы расш ренной группы Лоренца, причём спиноры ψ -восьмикомпонен $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$.

В этом представлении свободное поле ψ имеет однозна но определенный лагранжиан x)

$$\mathcal{L} = \overline{\Psi}(1\times\gamma_\mu\partial_\mu + i\tau_2\times\gamma_5 m)\Psi, \qquad (6)$$

где $\overline{\Psi} = \Psi^{*T} 1\times\gamma_4$, а уравнения поля имеют вид:

$$1\times\gamma_\mu\partial_\mu\Psi = -i\tau_2\times\gamma_5 m\Psi \qquad (7)$$

Лангранжиан (6), также как и уравнение (7) инвариантны относительно двух однопараметрических групп преобразований

$$\psi' = \exp(i\lambda)\psi, \qquad (8)$$

$$\psi' = \exp(i\tau_1\times\gamma_5\lambda)\psi \qquad (9)$$

и трехпараметрической группы

$$\psi' = a\psi + b\tau_3\times\gamma_5\psi_c, \qquad (10)$$

где $|a|^2 + |b|^2 = 1$

Преобразования (9) и (10) аналогичны преобразованиям Паули [4] для нейтрино и отличаются от них лишь заменой γ_5 на

---

x) При обращении времени, согласно Швингеру $\mathcal{L} \to \mathcal{L}^T$, где значок транспонирования относится к операторам гильберова пространства [?].

$\tau_1 \times \gamma_5$ и $\tau_3 \times \gamma_5$, соответственно.

Если мы введем новые 4-компонентные спиноры

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \gamma_5\psi_2), \quad \psi_{pc} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{c1} + \gamma_5\psi_{c2}),$$

$$\psi_{nc} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\gamma_5\psi_1 + \psi_2), \quad \psi_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_5\psi_{c1} - \psi_{c2}), \tag{II}$$

то эти спиноры удовлетворяют обычному уравнению Дирака

$$\gamma_\mu \partial_\mu \psi = -m\psi, \tag{I2}$$

а при преобразовании (9)

$$\psi_p' = \exp(i\lambda)\psi_p, \quad \psi_n' = \exp(i\lambda)\psi_n$$

$$\psi_{pc}' = \exp(-i\lambda)\psi_{pc}, \quad \psi_{nc}' = \exp(-i\lambda)\psi_{nc} \tag{I3}$$

Можно, таким образом, считать (9) gauge преобразованием, связанным с законом сохранения числа барионов, а ψ_p, ψ_n, ψ_{pc}, ψ_{nc} связать с протонным, нейтронным антипротонным и антинейтронным полями, соответственно.

С законом сохранения электрического заряда должно быть связано преобразование:

$$E: \quad \psi' = \exp\left[\frac{i}{2}(1 \times 1 + \tau_1 \times \gamma_5)\lambda\right]\psi \tag{I4}$$

Действительно, при преобразовании E

$$E: \quad \begin{aligned} &\psi_p' = \exp(i\lambda)\psi_p, &\psi_{pc}' = \exp(-i\lambda)\psi_{pc} \\ &\psi_n' = \psi_n, &\psi_{nc}' = \psi_{nc} \end{aligned} \tag{I5}$$

Трехпараметрическое преобразование (10) изоморфно вращению в изобарическом пространстве. Действительно, если мы образуем обычно используемое 8-компонентное нуклонное поле $\psi_N = \begin{pmatrix}\psi_p \\ \psi_n\end{pmatrix}$ то при преобразовании (10)

$$\psi_N' = \exp[i\vec{\tau}\cdot\vec{\lambda}]\psi_N, \tag{16}$$

где $\vec{\lambda}$ -вектор с вещественными компонентами λ_1, λ_2, λ_3, τ - обычные двумерные матрицы Паули, причём

$$a = \cos|\lambda| + i\frac{\lambda_3}{|\lambda|}\sin|\lambda|, \quad b = \frac{\sin|\lambda|}{|\lambda|}(\lambda_2 - i\lambda_1) \tag{17}$$

На аналогичный изоморфизм при чисто формальном удвоении числа компонент указал Гюрси [5].

§4. Взаимодействие нуклонов с обычными бозонами

Рассмотрим сначала взаимодействие нуклонов с нейтральным псевдоскалярным полем φ_0 с положительной временной четностью:

$$\begin{aligned} &I: && \varphi_0' = -\varphi_0, \\ &T: && \varphi_0' = \varphi_0, \\ &C: && \varphi_{0c} = \varphi_0 \end{aligned} \tag{18}$$

Требования инвариантности относительно I , T и C и преобразований (9) и (E) однозначно приводит к лагранжиану взаимодействия (рассматриваются в дальнейшем только лагранжианы взаимодействия без производных)

$$\mathcal{L} = i g_0 \overline{\Psi} \tau_3 \times \gamma_5 \Psi \varphi_0 = i g_0 (\overline{p} \gamma_5 p - \overline{n} \gamma_5 n) \varphi_0$$

$$= i g_0 \overline{\Psi}_N \gamma_5 \tau_3 \Psi_N \varphi_0 , \qquad (19)$$

т.е. знак константы взаимодействия мезонов φ_0 с протонами и нейтронами имеет равный знак и φ_0 может быть отождествлен с нейтральным π_0 -мезоном.

Если бы нейтральный мезон φ_0' был пространственным псевдоскаляром, но имел отрицательную временную чётность, то единственным образом вытекает лагранжиан взаимодействия

$$\mathcal{L} = g_0' \overline{\Psi} \tau_2 \times 1 \Psi \varphi_0'$$

$$= i g_0' (\overline{p} \gamma_5 p + \overline{n} \gamma_5 n) \varphi_0' \qquad (20)$$

φ_0' можно связать с проблематичным ρ_0 -мезоном.

Для лагранжиана взаимодействия нуклонов с заряженным псевдоскалярным бозонным полем φ

$$I: \quad \varphi' = -\varphi \quad ; \qquad T: \quad \varphi' = \varphi ;$$

$$C: \qquad \varphi_c = \varphi^*$$

опять-таки однозначно получается

$$L = ig(\bar{\Psi}\Psi_c \varphi^* - \bar{\Psi}_c \Psi \varphi)$$

$$= 2ig(\bar{p}\gamma_5 n \varphi^* + \bar{n}\gamma_5 p \varphi) \qquad (21)$$

И, таким образом, можно считать, что $\varphi(\varphi^*)$ описывает $\pi^-(\pi^+)$ мезоны.

Зарядовая симметрия (т.е. возможность одновременной замены $p \rightleftarrows n$, $\pi^+ \rightleftarrows \pi^-$, $\pi^0 \rightleftarrows -\pi^0$) взаимодействий (19) и (21) очевидна. Общий лагранжиан взаимодействия с π -мезонами имеет вид

$$L_\pi = ig_0(\bar{p}\gamma_5 p - \bar{n}\gamma_5 n)\pi^0$$

$$+ 2ig(\bar{p}\gamma_5 n \pi^+ + \bar{n}\gamma_5 p \pi^-) \qquad (22)$$

Если мы теперь потребуём, чтобы не только свободный лагранжиан нуклонов, но и лагранжиан взаимодействия был инвариантен относительно преобразований трехпараметрической группы, то

$$g = g_0/\sqrt{2} = g_\pi/\sqrt{2} \, ,$$

$$L_\pi = ig_\pi \bar{\Psi}_N \gamma_5 (\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}) \Psi_N \qquad (23)$$

При преобразовании (10) мезонные поля преобразуются следующим образом

$$(\vec{\tau}\cdot\vec{\pi})' = \exp[i\vec{\tau}\cdot\vec{\lambda}](\vec{\tau}\cdot\vec{\pi})\exp[-i\vec{\tau}\cdot\vec{\lambda}], \qquad (24)$$

причём массы мезонов π^+, π^- и π^0 должны совпадать.

Таким образом, мы пришли к обычной изобарически инвариантной теории взаимодействия π -мезонов с нуклонами.

§ 5. Свободные K-мезоны

Обычное представление расширенной группы Лоренца для бозонов исчерпано π -мезонами. K-мезоны мы будем описывать проективным представлением, в котором

$$I^2 = 1, \quad C^2 = 1, \quad T^2 = -1$$

$$IT = TI, \quad IC = CI, \quad TC = CT \tag{25}$$

Простейшее неприводимое представление, в котором выполнены эти правила коммутации является двумерным, а операторы I, T и C имеют вид:

$$\begin{aligned} I: &\quad \varphi' = -\varphi, \\ T: &\quad \varphi' = i\tau_2 \varphi, \\ C: &\quad \varphi_c = \varphi^* \end{aligned} \tag{26}$$

Отождествим K^+-мезон с φ_1, $\bar{K}^0$-мезон с φ_2, K^--мезон с φ_1^*, K^0-мезон с φ_2^*.

Тогда с законом сохранения электрического заряда можно связать преобразование

$$\varphi' = \exp\left[\frac{i}{2}(1+\tau_3)\lambda\right]\varphi \qquad (27)$$

Действительно, при этом преобразовании

$$K^{+\prime} = \exp(i\lambda)K^{+}, \quad K^{-\prime} = \exp(-i\lambda)K^{-},$$
$$K^{0\prime} = K^{0}, \quad \bar{K}^{0\prime} = \bar{K}^{0} \qquad (28)$$

Закону сохранения гиперзаряда отвечает преобразование $\varphi' = \exp(i\tau_3\lambda)\varphi$, при котором

$$K^{+\prime} = \exp(i\lambda)K^{+}, \quad K^{0\prime} = \exp(i\lambda)K^{0}$$

$$K^{-\prime} = \exp(-i\lambda)K^{-}, \quad \bar{K}^{0\prime} = \exp(-i\lambda)\bar{K}^{0} \qquad (29)$$

§ 6. Взаимодействие К-мезонов с нуклонами Λ и Σ частицы

Перейдем теперь к изучению взаимодействия К-мезонов с нуклонами. Так как и К-мезоны и нуклоны преобразуются по проективному представлению расширенной группы Лоренца и имеет место закон сохранения барионного заряда, то во взаимодействии обязательно должен участвовать ещё один барион, описываемый обычным представлением. Это требование приводит с необходимостью к парному рождению странных частиц. Остановимся сначала на случае нейтрального бариона. Мы уже говорили выше, что для определенности относительная пространственная четность всех барионов полагается одинаковой

$$\mathrm{I}: \qquad Y_0' = \gamma_4 Y_0 \qquad (30)$$

При преобразовании T для нуклонов, для исследуемого бариона имеются две возможности:

$$T: \qquad Y_0' = -\gamma_4 \gamma_5 Y_{0c}\,, \qquad (31)$$

$$Y_0' = \gamma_4 \gamma_5 Y_{0c} \qquad (32)$$

В уравнения (3I) и (32) надо вводить антибарион Y_{0c}, так как преобразование T для нуклонов антикоммутирует с преобразованием сохранения барионного заряда (9).

Если мы выберем закон (3I) для T, то единственный вид лагранжиана, совместимый с инвариантностью относительно преобразований расширенной группы Лоренца и преобразований (9) и (E) таков:

$$\mathcal{L} = ig\left[\bar{\Psi}(1\times\gamma_5 - \tau_1\times 1)(1\times 1 + \tau_3\times 1)\varphi\times Y_0 - \bar{\Psi}_C(1\times\gamma_5 + \tau_1\times 1)(1\times 1 - \tau_3\times 1)\varphi^*\times Y_0\right] + \text{эрм. сопр.} \tag{33}$$

Если перейти от Ψ и φ к операторам нуклонного поля и К-мезонного поля, то мы получим обычный вид лагранжиана взаимодействия нуклонов с Λ_0 частицами:

$$\mathcal{L} = ig_\Lambda\left(\bar{p}\gamma_5\Lambda_0 K^+ + \bar{n}\gamma_5\Lambda_0 K^0\right) + \text{эрм. сопр.} \tag{34}$$

Закон (32) для T приводит к лагранжиану, отличающемуся от выражения (33) лишь знаком + между двумя членами в выражении (33) и соответствует Σ_0 -частице:

$$\mathcal{L} = ig_{\Sigma_0}\left(\bar{p}\gamma_5\Sigma_0 K^+ - \bar{n}\gamma_5\Sigma_0 K^0\right) + \text{эрм. сопр.} \tag{35}$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что при преобразовании T для нуклонов законы преобразования для Λ_0 и Σ_0 отличаются знаком. Если теперь рассмотреть взаимодействие нуклонов с заряженными барионами, то удаётся найти инвариантный относительно зарядового сопряжения отражений пространства и времени и законов сохранения электрического и барионного зарядов лагранжиан только при условии, что при T

$$T: \quad \begin{aligned} &\Sigma^{+} \to -\gamma_4 \gamma_5 \Sigma_c^{-}, \\ &\Sigma^{-} \to -\gamma_4 \gamma_5 \Sigma_c^{+}, \end{aligned} \tag{36}$$

что предусматривает равенство масс у Σ^{+} и Σ^{-}-частиц. Этот лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = -ig\left[\bar{\Psi}(1\times 1 - \tau_1 \times \gamma_5)(1\times 1 - \tau_3 \times 1)\varphi^{*} \times \Sigma^{+} + \right.$$
$$\left. + \bar{\Psi}_c (1\times 1 + \tau_1 \times \gamma_5)(1\times 1 + \tau_3 \times 1)\varphi \times \Sigma^{-}\right]$$
$$+ \text{эрм. сопр.} \tag{37}$$

В обычных обозначениях его можно представить выражением

$$\mathcal{L} = i g_{\Sigma^{\pm}} (\bar{p}\gamma_5 \Sigma^{+} K^{0} + \bar{n}\gamma_5 \Sigma^{-} K^{+}) +$$
$$+ \text{эрм. сопр.} \tag{38}$$

Зарядовая симметрия очевидна.

Если теперь потребовать, чтобы преобразование типа Паули-Гюрси (10) оставляло инвариантным и лагранжиан взаимодействия, то

$$g_{\Sigma^\pm} = \sqrt{2}\, g_{\Sigma_0} = \sqrt{2}\, g_\Sigma , \tag{39}$$

массы Σ^+, Σ^- и Σ_0 должны быть равны, и получается обычный изобарически инвариантный лагранжиан

$$L = i g_\Sigma \left(\bar{p}\gamma_5 \Sigma_0 K^+ - \bar{n}\gamma_5 \Sigma_0 K^0 + \sqrt{2}\,\bar{p}\gamma_5 \Sigma^+ K^0 + \right.$$
$$\left. + \sqrt{2}\,\bar{n}\gamma_5 \Sigma^- K^+\right) + \text{эрм. сопр.} \tag{40}$$

§ 7. Ξ -частицы

В рамках рассматриваемых представлений остается ещё одна лишь возможность. Именно, в проективном представлении (5) можно, оставив для закона сохранения барионов то же преобразование (9), заменить в преобразовании (I4), связанном с законом сохранения электрического заряда, знак между 1×1 и $\tau_1 \times \gamma_5$

$$E: \quad \psi' = \exp\left[\frac{i}{2}\left(1\times 1 - \tau_1 \times \gamma_5\right)\lambda\right]\psi \tag{4I}$$

Тогда просто следует во всех формулах заменить p на Ξ^0, n на Ξ^-, K^+ на $\bar{K}^0$, K^0 на K^-. Мы снова получаем свойства зарядовой симметрии и при инвариантности относительно преобразования Паули и во взаимодействии обычные изобарически инвариантные лагранжианы.

§ 8. Заключение

Мы выполнили программу, намеченную в начале статьи. Введя новое непроводимое проективное представление расширенной группы Лоренца для нуклонов и отправляясь от него, действительно показано, что свойства зарядовых симметрий, парное рождение странных частиц, и мультиплетность вытекает из стандартных законов сохранения, а изобарическая инвариантность из преобразования типа Паули-Гюрси для свободных нуклонов, причём для неё есть место, так как с необходимостью увеличилось число компонент у волновых функций, преобразующихся по неприводимым представлениям.

Рассмотрение слабых взаимодействий с этой точки зрения здесь не проводилось. Эта задача оказывается значительно более трудной и менее однозначной из-за нарушения закона сохранения пространственной четности.

Авторы искренне благодарны проф. И.М. Гельфанду за ценное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

I. И. М. Гельфанд и М.П.Цетлин - ЖЭТФ 3I, II07, I956.

2. J.C. Taylor, Nuclear Phys. 3, 606, I957.

J.A. Mc Lennan, Jr. Phys. Rev. I09, 986, I958.

3. J. Schwinger, Phys. Rev. 9I, 7I3, I953.

4. W. Pauli, Nuovo Cimento 6, 204, I957.

5. F. Gürsey, Nuovo Cimento 7, 4II, I958.