ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2132

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.К. Мельников

О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ СОХРАНЕНИЯ УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ПРИ МАЛОМ ИЗМЕНЕНИИ ФУНКЦИИ ГАМИЛЬТОНА

1965

Р-2132

В.К. Мельников

О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ СОХРАНЕНИЯ УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ПРИ МАЛОМ ИЗМЕНЕНИИ ФУНКЦИИ ГАМИЛЬТОНА

Направлено в ДАН СССР

В настоящей заметке содержится следующая теорема, обобщающая теорему А.Н.Колмогорова [1,2] о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.

Теорема. Рассмотрим систему Гамильтона

$$\dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} \quad (x = (x_1, \ldots, x_m),\ y = (y_1, \ldots, y_m)), \tag{1}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (p = (p_1, \ldots, p_n), \quad q = (q_1, \ldots, q_n))$$

с функцией Гамильтона вида

$$H = H_0(x, y, p) + H_1(x, y, p, q),$$

обладающей следующими свойствами:

1. Функция $H_0(x,y,p)$ зависит аналитически от x, y, p в области $|x| < h$, $|y| < h$, $p \in G$ $(h > 0)$.

2. $\dfrac{\partial H_0}{\partial x} = \dfrac{\partial H_0}{\partial y} \equiv 0$ при $x = y = 0$.

3. Функциональный определитель матрицы

$$\mathcal{H}_0 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial x \partial y} & -\dfrac{\partial^2 H_0}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial y^2} & -\dfrac{\partial^2 H_0}{\partial y \partial x} \end{vmatrix}$$

не обращается в нуль в области G при $x = y = 0$ [x)].

4. Функциональный определитель

$$\det \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial p^2} \right|$$

не обращается в нуль в области G при $x = y = 0$.

5. В области G выполнены условия

$$\lambda_\alpha(p) - i(\omega, k) \neq 0, \quad \lambda_\alpha(p) + \lambda_\beta(p) - i(\omega, k) \neq 0,$$

---

x) Это условие излишне, если $\dfrac{\partial H_1}{\partial x} = \dfrac{\partial H_1}{\partial y} \equiv 0$ при $x = y = 0$.

где $\lambda_\alpha(p)$ и $\lambda_\beta(p)$ – произвольные собственные значения матрицы $\mathcal{H}_0$ при $x=y=0$, $\omega=\omega(p)=\frac{\partial H_0}{\partial p}\Big|_{x=y=0}$, $(\omega,k)=\sum_{j=1}^{n}\omega_j k_j$ и k_j – произвольные целые числа.

6. Функция $H_1(x,y,p,q)$ аналитическая по x, y, p, q в области F:
$|x|<h$, $|y|<h$, $p\in G$, $|\mathrm{Im}\,q|<\rho$ и периодическая по q с периодом 2π $(\rho>0)$.

Тогда для любого $\kappa>0$ найдется $M=M(\kappa,\rho,h,G,H_0)>0$ такое, что если в области F: $|x|<h$, $|y|<h$, $p\in G$, $|\mathrm{Im}\,q|<\rho$ справедливо неравенство $|H_1(x,y,p,q)|<M$, то существует разложение области $\tilde{G}=\mathrm{Re}\,G$ x) $\tilde{G}=G_1\cup G_2$ такое, что G_2 мало, т.е. $\mathrm{mes}\,G_2\le\kappa\,\mathrm{mes}\,\tilde{G}$, а для любого $p\in G_1$ существует инвариантный относительно движений системы (1) тор T_{p_ω}, обладающий следующими свойствами:

1. Инвариантные торы T_{p_ω} задаются параметрическими уравнениями

$$x=f_\omega(Q),\ y=g_\omega(Q),\quad p=p_\omega+h_\omega(Q)\quad q=Q+r_\omega(Q),$$

где $f_\omega(Q)$, $g_\omega(Q)$, $h_\omega(Q)$ и $r_\omega(Q)$ – аналитические функции Q, периодические по Q с периодом 2π.

2. Инвариантные торы T_{p_ω} мало отличаются от невозмущенных торов $x=y=0$, $p=p_\omega$, т.е.

$$|f_\omega(Q)|<\kappa,\quad |g_\omega(Q)|<\kappa,\quad |h_\omega(Q)|<\kappa,\quad |r_\omega(Q)|<\kappa.$$

3. Движение на торе T_{p_ω} условно-периодическое с n частотами $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_n)$, т.е. $\dot{Q}=\omega$, где $\omega=\frac{\partial H_0}{\partial p}\Big|_{x=y=0,\ p=p_\omega}$.

Доказательство этой теоремы основывается на возможности преобразования системы (1) с помощью канонической замены переменных в систему Гамильтона с функцией Гамильтона вида:

$$H=\bar{H}(X,Y,P)+H_2(X,Y,P,Q),$$

где $\frac{\partial\bar{H}}{\partial X}=\frac{\partial\bar{H}}{\partial Y}\equiv 0$ при $X=Y=0$, функция $H_2(X,Y,P,Q)$ в области F':
$|X|<h'<h$, $|Y|<h'$, $P\in G'\subset G$, $|\mathrm{Im}\,Q|<\rho'<\rho$

$(h'>0,\ \rho'>0)$ удовлетворяет неравенству

$$|H_2(X,Y,P,Q)|<M^{1+\frac{1}{6}}, \tag{2}$$

а мера разности $G\setminus G'$ мала вместе с M.

С этой целью положим

$$H(x,y,p,q)=\bar{H}(x,y,p)+\tilde{H}(x,y,p,q), \tag{3}$$

x) $\tilde{G}=\mathrm{Re}\,G$ есть пересечение области G с подпространством $\mathrm{Im}\,p=0$; при этом область G предполагается ограниченной.

где $\bar{H}(x,y,p) = H_0(x,y,p) + \bar{H}_1(x,y,p)$,

$$\bar{H}_1(x,y,p) = (2\pi)^{-m} \oint H_1(x,y,p,q)\,dq$$

и контурный интеграл в последнем равенстве берется по поверхности n -мерного тора. Пусть далее $x=f(p)$, $y=g(p)$ – решение системы уравнений $\frac{\partial \bar{H}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial y} = 0$, обращается в решение $x=y=0$ при $\bar{H}_1(x,y,p)\equiv 0$. Совершим теперь в системе (1) каноническую замену переменных[3]

$$x = x' + f(p'), \qquad y' = y - g(p'),$$

$$p = p', \qquad q' = q + \frac{\partial f}{\partial p'}\, y - \frac{\partial g}{\partial p'}\, x'$$

с производящей функцией $V = x'y + p'q + f(p')\,y - g(p')\,x'$.

В результате замены функция Гамильтона системы (1) согласно (3) примет вид:

$$H(x', y', p', q') = \bar{H}(x', y', p') + \tilde{\tilde{H}}(x', y', p', q'),$$

где $\oint \tilde{\tilde{H}}(x', y', p', q')\,dq' \equiv 0$ и $\frac{\partial \bar{H}}{\partial x'} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial y'} \equiv 0$

при $x' = y' = 0$.

Каноническая замена переменных

$$x' = X + \frac{\partial S}{\partial y'}, \qquad Y = y' + \frac{\partial S}{\partial X},$$

$$p' = P + \frac{\partial S}{\partial q'}, \qquad Q = q' + \frac{\partial S}{\partial P}, \tag{4}$$

с производящей функцией $V = Xy' + Pq' + S(X, y', P, q')$ приводит $H(x', y', p', q')$ к виду

$$H = \bar{H}(X, Y, P) + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5, \tag{5}$$

где

$$R_1 = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial q'_\alpha} \frac{\partial}{\partial P_\alpha} \bar{H}(X, y', P) + [\tilde{\tilde{H}}(X, y', P, q')]_N +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{m} \left(\frac{\partial S}{\partial y'_\alpha} \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \bar{H}(X, y', P) - \frac{\partial S}{\partial X_\alpha} \frac{\partial}{\partial y'_\alpha} \bar{H}(X, y', P) \right),$$

$$R_2 = \bar{H}(x', y', p') - \bar{H}(X, y', P) -$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial S}{\partial y'_\alpha} \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \bar{H}(X, y', P) - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial q'_\alpha} \frac{\partial}{\partial P_\alpha} H(X, y', P),$$

$$R_3 = \bar{H}(X, y', P) - \bar{H}(X, Y, P) + \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial S}{\partial X_\alpha} \frac{\partial}{\partial y'_\alpha} \bar{H}(X, y', P),$$

$$R_4 = \tilde{\tilde{H}}(X, y', P, q') - [\tilde{\tilde{H}}(X, y', P, q')]_N,$$

$$R_5 = \tilde{\tilde{H}}(x', y', p', q') - \tilde{\tilde{H}}(X, y', P, q'),$$

$$\tilde{\tilde{H}}(x', y', p', q') = \sum_{|k|\neq 0} h_k(x', y', p')\, e^{i(k,q')}$$

$$[\tilde{\tilde{H}}(X, y', P, q')]_N = \sum_{0<|k|<N} h_k(X, y', P)\, e^{i(k,q')}$$

и переменные x', y', p', q' выражаются через X, Y, P, Q согласно равенствам (4).

Возьмем функцию $S(X, y', P, q')$ в виде

$$S = S_0 + S_X X + S_{y'} y' + \tfrac{1}{2} S_{XX} X^2 + S_{Xy'} X y' + \tfrac{1}{2} S_{y'y'} y'^2,$$

где функция $S_0 = S_0(P, q')$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\omega, \frac{\partial S_0}{\partial q'}\right) + [\tilde{\tilde{H}}_0(P, q')]_N = 0, \tag{5}$$

векторы $S_X = S_X(P, q')$ и $S_{y'} = S_{y'}(P, q')$ удовлетворяют системе уравнений

$$\left(\omega, \frac{\partial S_X}{\partial q'}\right) + [\tilde{\tilde{H}}_X(P, q')]_N = \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial X \partial y'} S_X - \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial X^2} S_{y'},$$

$$\left(\omega, \frac{\partial S_{y'}}{\partial q'}\right) + [\tilde{\tilde{H}}_{y'}(P, q')]_N = \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial y'^2} S_X - \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial y' \partial X} S_{y'} \tag{6}$$

а матрицы $S_{XX} = S_{XX}(P, q')$, $S_{Xy'} = S_{Xy'}(P, q')$ и $S_{y'y'} = S_{y'y'}(P, q')$ удовлетворяют системе матричных уравнений

$$\left(\omega, \frac{\partial S_{XX}}{\partial q'}\right) + [\tilde{\tilde{H}}_{XX}(P, q')]_N = S_{XX} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial y' \partial X} + \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial X \partial y'} S_{XX} -$$

$$- S_{Xy'} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial X^2} S'_{Xy'} + \sum_{a=1}^{m} \left(S_{X_a} \frac{\partial}{\partial y'_a} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial X^2} - S_{y'_a} \frac{\partial}{\partial X_a} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial X^2} \right),$$

$$\left(\omega, \frac{\partial S_{Xy'}}{\partial q'}\right) + [\tilde{\tilde{H}}_{Xy'}(P, q')]_N = S_{XX} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial X \partial y'} S_{Xy'} - \tag{7}$$

$$- S_{Xy'} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial X \partial y'} - \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial X^2} S_{y'y'} + \sum_{a=1}^{m} \left(S_{X_a} \frac{\partial}{\partial y'_a} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial X \partial y'} - S_{y'_a} \frac{\partial}{\partial X_a} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial X \partial y'} \right),$$

$$\left(\omega, \frac{\partial S_{y'y'}}{\partial q'}\right) + [\tilde{\tilde{H}}_{y'y'}(P, q')]_N = S'_{Xy'} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial y'^2} S_{Xy'} -$$

$$- S_{y'y'} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial X \partial y'} - \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial y' \partial X} S_{y'y'} + \sum_{a=1}^{m} \left(S_{X_a} \frac{\partial}{\partial y'_a} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial y'^2} - S_{y'_a} \frac{\partial}{\partial X_a} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial y'^2} \right).$$

Здесь $\bar H = \bar H(X,y',P)$, $\omega = \omega(P) = \frac{\partial H}{\partial P}\Big|_{X=y'=0}$, матрицы $\frac{\partial^2 \bar H}{\partial X^2}$, $\frac{\partial^2 \bar H}{\partial X\,\partial y'}$, $\frac{\partial^2 \bar H}{\partial y'^2}$ взяты при $X=y'=0$, $[H_0(P,q')]_N$, $[H_X(P,q')]_N$ и т.д. означают соответственно значение функции $[H(X,y',P,q')]_N$ и ее частных производных при $X=y'=0$.

Пусть теперь в области $G_N^\delta \subset G-\beta$ x) выполнены условия

$$|(\omega,k)| > \delta |k|^{-(n+1)}, \qquad |\lambda_\alpha - i(\omega,k)| > \delta |k|^{-(n+1)},$$

$$|\lambda_\alpha + \lambda_\beta - i(\omega,k)| > \delta |k|^{-(n+1)}$$

для всех целочисленных значений $k = (k_1,\dots,k_n)$ таких, что $|k| = \sum_{j=1}^{n} |k_j| < N$. Тогда при достаточно малых $\delta > 0$ в области $P \in G_N^\delta$ $|\mathrm{Im}\, q'| < \rho - 3\delta$ система уравнений (5), (6), (7) имеет аналитическое решение, удовлетворяющее в этой области неравенствам

$$|S_0(P,q')| < M\,\delta^{-(2n+3)}, \quad |S_X(P,q'),\ S_{y'}(P,q')| < M h^{-1} \delta^{-(m+1)(n+2)+1},$$

$$|S_{XX}(P,q'),\ S_{Xy'}(P,q'),\ S_{y'y'}(P,q')| < M h^{-2} \delta^{-3m(n+2)+1}.$$

Отсюда следует, что в области F' ; $|X| < h'$, $|Y| < h'$,

$$P \in G' = G_N^\delta - 2\beta, \qquad |\mathrm{Im}\, Q| < \rho' = \rho - 3\gamma$$

при $N = \frac{1}{\gamma}\ln\frac{h^2}{2M}$ справедливы неравенства

$$|R_1| < M h^{-3} h'^3 \delta^{-\nu}, \quad |R_2, R_3, R_4, R_5| < M^2 h^{-2} \delta^{-2\nu},$$

где $\nu = 3m(n+2)$. Соответствующий выбор $\beta > 0$ позволяет сделать меру разности $G \setminus G'$ малой вместе с M. Полагая далее $M = \delta^T$, $h = \delta^\Gamma$, $h' = h^{1+1/6}$ где $T = 36\nu$, $\Gamma = 14\nu$ получаем, что в области F' выполнено неравенство (2), причем частные производные функции $H_2(X,Y,P,Q)$ по X и Y до второго порядка включительно будут малы вместе с M при $X=Y=0$. Это позволяет применять неограниченное число раз построенную конструкцию. Сходимость этого процесса доказывается аналогично тому, как это сделано в работе /2/.

В заключение необходимо отметить, что сформулированная теорема с очевидными изменениями остается справедливой и в случае канонической системы

$$\begin{aligned} \dot x &= -\frac{\partial H}{\partial \phi}, \quad \dot\phi = \frac{\partial H}{\partial x} \ (x = (x_1,\dots,x_m),\ \phi = (\phi_1,\dots,\phi_m)), \\ \dot p &= -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot q = \frac{\partial H}{\partial p} (p = (p_1,\dots,p_n),\ q = (q_1,\dots,q_n)) \end{aligned} \tag{8}$$

с функцией Гамильтона вида

$$H = H_0(x,p) + \epsilon\,(H_1(x,p,\phi) + H_2(x,p,\phi,q)),$$

кроме очевидных условий аналитичности по x, p, ϕ, q и периодичности по q, удовлетворяющей следующим условиям:

---

x) Область $G-\beta \subset G$ содержит те точки области G, расстояние от которых до границы области G больше $\beta\ (\beta > 0)$.

1. $\frac{\partial H_0}{\partial x} = \frac{\partial H_1}{\partial x} = \frac{\partial H_1}{\partial \phi} = 0$ при $x = \phi = 0$.

2. Функциональные определители матриц

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial p^2}, \quad \frac{\partial^2 H_0}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 H_1}{\partial \phi^2}$$

не обращаются в нуль в области G при $x = \phi = 0$.

3. Параметр ϵ достаточно мал.

Нахождение условно-периодических решений системы (8), близких к решению $x = \phi = 0$, $p = p_\omega$ системы (8) при $H_2(x, p, \phi, q) \equiv 0$ играет важную роль при исследовании явления неустойчивости в гамильтоновых системах, близких к интегрируемым[4].

Литература

1. А.Н. Колмогоров. О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. ДАН СССР, 98, № 4 (1954), 527-530.

2. В.И. Арнольд. Доказательство теоремы А.Н.Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. Успехи матем. наук, XVIII , 5 (113), 13-40.

3. М. Борн. Лекции по атомной механике, т. 1, Гос. научно-тех. изд. Украины, Киев, 1934.

4. В.И. Арнольд. О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы. ДАН СССР, 156, 1(1964), 9-12.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 апреля 1965 г.