ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Р-213

Ю. Н. Благовещенский и Г. И. Копылов

ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ВЕСОВ ПО МЕТОДУ МОНТЕ-КАРЛО

г. Дубна, 1958 год

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Р-213

Ю. Н. Благовещенский и Г. И. Копылов

ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ВЕСОВ ПО МЕТОДУ МОНТЕ-КАРЛО

г. Дубна, 1958 год

А Н Н О Т А Ц И Я

Предлагается способ вычисления повторных интегралов любой кратности по методу Монте-Карло. Излагается применение его к вычислению статистических весов при моделировании процессов множественного рождения. Обсуждаются возможности его применения в различных случаях.

При моделировании процесса множественного рождения (см. [1]) возникает необходимость вычисления статистического веса отдельных реакций. Эта задача уже неоднократно решалась для модели Ферми и сейчас имеются эффективные табличные и графические способы (см. [2], [3]) вычисления фазового объёма для этой модели. Однако при моделировании нужно уметь вычислять фазовые объёмы для различных моделей множественного рождения, т.е. иметь способ вычислять интеграл

$$S_n(E,0) = \int d^3p_1\, d^3p_2 \ldots d^3p_n\, \mathcal{F}(p_1, p_2, \ldots, p_n)\, \delta\Big(\sum_i p_i\Big)\, \delta\Big(\sum_i e_i - E\Big) \qquad \text{(I)}$$

для любого вида $\mathcal{F}$ x). Средством для вычисления (I) может служить метод Монте-Карло, в особенности та его разновидность, которая носит название метода "выборок по важности" ("importance of sampling") и позволяет резко улучшать сходимость приближений (см. по этому поводу [4]). Однако для применения метода "выборок по важности" надо представлять себе более или менее хорошо вид функции $\mathcal{F}$,что в настоящее время невозможно.

В этой работе мы прелагаем другую модификацию метода Монте-Карло - метод взвешенного расположения. Он не так сильно улучшает сходимость приближений как метод "выборок по важности", но

---

x) Все обозначения и формулы с двойной нумерацией типа: (2.I2) взяты из работы [I] .

всё же лучше "обычного" способа расчёта по методу Монте-Карло и применим для произвольной функции $\mathcal{F}$.

Идея его была высказана М.И. Подгорецким, математическое обоснование дано Ю.Н. Благовещенским [5].

§ I. Вычисление повторных интегралов

Пусть требуется вычислить

$$S = \int_{a_n} f(p)\,dp\,, \qquad (2)$$

где a_n -ограниченная область в n-мерном пространстве точек $p=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ и $f(p)$ - непрерывная неотрицательная функция n переменных.

Обычный путь вычисления (2) по методу Монте-Карло начинается с того, что равномерно "бросают" точку p в прямоугольник A_n содержащий a_n, со сторонами параллельными осям координат.

Пусть

$$\hat{f} = \begin{cases} f(p) \,, & \text{если } p \in a_n\,; \\ 0 \,, & \text{если } p \bar{\in} a_n\,. \end{cases} \qquad (3)$$

Тогда среднее значение $\hat{f}$ по всем бросаниям при увеличении их числа стремится к отношению S к объёму V_{A_n}. Следовательно, усредняя величину $V_{A_n}\cdot\hat{f}$, будем приближаться к S.

При таком методе расчёта существенно используется прямоугольник A_n. Между тем, в первоначальном интеграле (2) он отсутствует. Введение его выглядит не очень обоснованным. Естественной поэтому является мысль отказаться от розыгрыша p в прямоугольнике A_n, а бросать вместо этого каждый раз p прямо в область a_n. Но теперь, очевидно, уже нельзя будет при вычислении среднего $\hat{f}$ по всем бросаниям считать все бросания равноценными. Надо каждому из них присвоить определенный "вес", который бы учитывал тот факт, что при использовании прямоугольника A_n, попадание в область a_n случалось бы как правило после многократных промахов, непопаданий в a_n. Каждой точке $p \in a_n$ и следует поставить в соответствие среднее количество подобных промахов. Оно определяет вес значения $f(p)$.

Ясно, что вес обратно пропорционален количеству промахов. Ясно также, что вес не должен зависеть от вида функции $f(p)$. Зато он должен зависеть не только от формы области a_n, но и от последовательности, в которой разыгрываются координаты точки p.

Поэтому такой метод должен быть удобен при массовых расчётах интегралов от различных функций по одной и той же многомерной области. Подобная ситуация встречается, например, в задаче о моделировании процесса множественного рождения, где переход к новой модели означает изменение функции $\mathcal{F}$ в (I), а область интегрирования определяется лишь кинематическими соотношениями и поэтому остаётся неизменной.

Проиллюстрируем на двух примерах предлагаемый метод суммирования по Монте-Карло с весом. Из примеров легко будет усмотреть и общее правило для вычисления веса.

Пусть (рис. I , плоскость $\xi_1 0 \xi_2$) вычисляется интеграл по лежащей в плоскости $\xi_1 0 \xi_2$ четверти круга a_2 радиуса 1 . Опишем вокруг a_2 квадрат A_2 со стороной 1. Будем разыгрывать координаты точки $p(\xi_1, \xi_2)$ не одновременно, а последовательно. Координата ξ_1 точек $p \in a_n$ должна быть разыграна равномерно в интервале (0,I). Координату ξ_2 в прежнем способе тоже следовало бы разыграть в (0,I) равномерно. Тогда при фиксированном ξ_1 , доля числа точек, попавших в a_2 , от их общего числа, была бы равна отношению отрезков KK_1 / KK_2 , т.е. $\sqrt{1-\xi_1^2}$. Очевидно, если разыграть ξ_2 прямо на отрезке KK_1 , чтобы все $p \in a_2$, то точки p , разыгранные на этом отрезке равномерно, надо будет брать с весом $w(p) = \frac{KK_1}{KK_2}$, т.е. $w(p) = \sqrt{1-\xi_1^2}$, затем, как и прежде, вычислить в каждой точке $f(p)\,w(p)$ и усреднить по всем p .

Пусть теперь вычисляется интеграл по части сферы $a_3 : \xi_1, \xi_2, \xi_3 \geq 0$ радиуса 1 (рис. I). Опишем вокруг неё куб A_3 , со стороной 1. Пусть ξ_1 разыграно равномерно в (0,I). Тогда при равномерном розыгрыше ξ_2 на KK_1 каждую точку $p(\xi_1, \xi_2, 0)$ надо брать с весом KK_1 / KK_2 . В дальнейшем, получив ξ_1 и ξ_2 , надо разыграть ещё ξ_3 на отрезке $\mathcal{L}\mathcal{L}_1$ вместо $\mathcal{L}\mathcal{L}_2$; из общего числа точек, которые по „каноническому" способу были бы разыграны сперва на KK_2 , а потом на $\mathcal{L}\mathcal{L}_2$, в отрезок $\mathcal{L}\mathcal{L}_1$ попала бы часть:

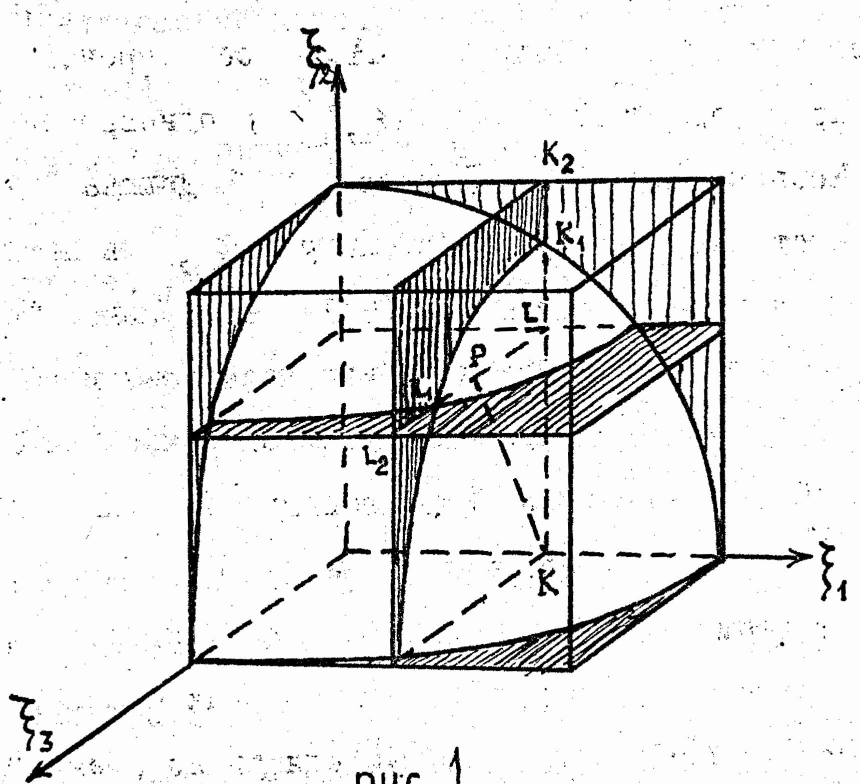

рис. 1

$$W(p) \equiv \left({}^{KK_1}/_{KK_2} \right) \cdot \left({}^{\mathcal{L}\mathcal{L}_1}/_{\mathcal{L}\mathcal{L}_2} \right) = \sqrt{1-\xi_1^2} \cdot \sqrt{1-\xi_1^2-\xi_2^2}. \quad (4)$$

Такой вес следует присвоить любой точке $p \in \mathcal{L}\mathcal{L}_2$, и любой функции от этой точки.

Может быть, здесь уместно подчеркнуть зависимость веса от процедуры розыгрыша. Так, если бы, получив ξ_1, мы бы разыграли расстояние PK и угол $\angle K_2KP$ в интервалах $(0, \sqrt{1-\xi_1^2})$ и $(0, \frac{\pi}{2})$ соответственно, то вес каждой точки p определялся бы уже отношением площадей круга радиуса $\sqrt{1-\xi_1^2}$ и квадрата со стороной I, т.е. был бы равен $\frac{\pi}{4}(1-\xi_1^2)$.

Теперь можно перейти к общему случаю. Пусть координаты точки $p=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ разыгрываются равномерно в порядке нумерации: т.е. ξ_k разыгрывается равномерно в пределах ξ_k', ξ_k'', которые существенно зависят отрезультатов предыдущих розыгрышей. Из изложения приведённых выше примеров индуктивно ясно, что $f(p)$ в точке p надо брать с весом:

$$W(p) = \prod_1^n (\xi_k'' - \xi_k') \quad (5)$$

а значение интеграла может быть получено как предел при последовательности S_N, т.е.

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum f(p) W(p), \quad (6)$$

где суммирование производится по всем N точкам выборки.

Предлагаемый метод, названный нами "методом взвешенного расположения", имеет с обычным методом Монте-Карло то общее, что розыгрыш ξ_k происходит равномерно; его роднит с методом "выборок по важности" наличие веса $w(p)$, определяемого, однако, не функцией $f(p)$, а положением точки p в a_n.

Оценим вероятность отклонения S_n от S в предлагаемом способе. По неравенству Чебышева

$$P\{|S_N-S|\leq\varepsilon\}\geq 1-\frac{\mathcal{D}S_N}{\varepsilon^2}, \qquad (7)$$

где

$$\mathcal{D}S_N=\frac{\mathcal{D}[f(p)w(p)]}{N}=\frac{1}{N}\left\{\int\limits_{a_n}[f(p)w(p)]^2\frac{dp}{w(p)}-S^2\right\}=\frac{1}{N}\left\{\int\limits_{a_n}f^2(p)w(p)dp-S^2\right\}. \qquad (8)$$

Т.е. вероятность того, что отклонение среднего по N бросаниям S_N от значения интеграла S не превосходит ε, отличается от единицы на величину:

$$\delta=\frac{\int\limits_{a_n}f^2(p)w(p)dp-S^2}{N\varepsilon^2}.$$

Соответствующая величина δ_1 для обычного метода Монте-Карло при N' бросаниях в прямоугольник A_n равна:

$$\delta_1 = \frac{V_{A_n} \cdot \int_{a_n} f^2(p)\,dp - S^2}{N'\varepsilon^2}$$

где V_{A_n} -объём прямоугольника A_n. Для многих многомерных интервалов в выражениях для δ и δ_1 можно пренебречь вторым слагаемым в сравнении с первым. Тогда, полагая $V_{A_n} = 1$ и учитывая вышесказанное для δ и δ_1 получим следующие приближенные выражения:

$$\delta \cong \frac{\int_{a_n} f^2(p)\,w(p)\,dp}{N\varepsilon^2} \;;\; \delta_1 = \frac{\int_{a_n} f^2(p)\,dp}{N'\varepsilon^2} \tag{9}$$

При одинаковой точности ε и равном числе бросаний $N' = N$ уменьшение δ возникает лишь за счёт замены 1 на $w<1$. Таким образом, значительная экономия в объёме вычислений появится лишь при $w \ll 1$. Очевидно, что это уменьшение дисперсии наступает из-за того, что точки, ранее разбросанные по всему A_n, теперь сосредоточены лишь в области a_n, а сужение области бросаний точки p ведёт к сужению разброса в значениях $f(p)$

Для того, чтобы численно оценить уменьшение δ по отношению к δ_1 была подсчитана величина $\omega_n = \delta_1/\delta$ для $n=3$ и $n=10$, когда a_n — n-мерный шар радиуса R, A_n -описанный около него n-мерный куб и $f(p) \equiv 1$. Числа оказались следующими: $\omega_3 \cong 1,5$; $\omega_{10} \cong 7,5$. Уменьшение дисперсии ведёт к уменьшению времени, потребного для вычисления интеграла с данной погрешностью. Следует ещё заметить, что если вычисление пределов интегрирования значительно сложнее, чем проверка факта попадания точки p в область a_n, то это уменьшения может и не наблюдаться. Однако во многих случаях метод взвешенного расположения даёт реальную выгоду в сравнении с обычным методом Монте-Карло. Особенно удобен в этом отношении тот случай, когда для проверки попадания точки p в область a_n необходимо вычислить пределы интегрирования, так как ими заданы границы области. В этом случае уменьшение дисперсии и даёт уменьшение времени, необходимого для вычисления интеграла, при применении предлагаемого способа.

§ 2. Вычисление фазовых объёмов

Чтобы применить способ "взвешенного расположения" к вычислению (I), следует расставить в (I) пределы интегрирования. Это можно сделать различным образом, в зависимости от выбора переменных и порядка интегрирования. Как уже было прежде отмечено, они определяются лишь кинематическими соотношениями между вторичными частицами, а не видом $\mathcal{F}$.

Учитывая наличие тройки компонент у каждой из переменных интегрирования $\vec{p}_k$, запишем (1) в виде

$$S = \ldots \int d\xi_k \int d\eta_k \int d\zeta_k \ldots \cdot \psi(\ldots, \xi_k, \eta_k, \zeta_k, \ldots) \qquad (10)$$

Тогда формула для вычисления S по методу "взвешенного расположения" примет вид

$$S = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum w\psi, \qquad (11)$$

где

$$\psi = \psi(\ldots, \xi_k, \eta_k, \zeta_k, \ldots); \qquad (12)$$

$$w = \prod_{k=1}^{n} (\xi_k'' - \xi_k')(\eta_k'' - \eta_k')(\zeta_k'' - \zeta_k'). \qquad (13)$$

В [1] показано, что (I) преобразуется к виду

$$S = \int d^3\vec{p}_1 \ldots d^3\vec{p}_{n-2}\, dp_{n-1}\, d\varphi_{n-1}\, p_{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} p_k^2 \cdot \frac{E_n}{P_{n-1}} \mathcal{F}(\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_{n-1}, -\sum_1^{n-1} \vec{p}_k) \qquad (14)$$

при пользовании введенной там сферической системой координат.

В зависимости от выбора порядка и переменных интегрирования можно привести 3 алгоритма расчёта (I): $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$.

$\alpha)$: Обозначим в (14)

$$p_k = \xi_k \ , \ \cos\theta_k = \eta_k \ , \ \varphi_k = \zeta_k \qquad (15)$$

и будем производить розыгрыш ξ_k, η_k, ζ_k в порядке нумерации от ξ_1 до ζ_{n-1}. Тогда пределы интегрирования даются формулами:

$$\xi_k'' = \frac{E_k^* P_k + p_k^* E_k}{M_k} \ ; \ \xi_k' = \begin{cases} 0 \ , \text{ если } \dfrac{E_k}{M_k} \leq \dfrac{E_k^*}{m_k} \text{ и } k < n-1 , \\ \dfrac{|E_k^* P_k - p_k^* E_k|}{M_k} \ , \text{ в остальных случаях;} \end{cases} \qquad (16)$$

$$\eta_k'' = \begin{cases} 1 \ , \text{ если } \dfrac{E_k}{M_k} \leq \dfrac{E_k^*}{m_k} \ ; \ p_k \leq \dfrac{p_k^* E_k - P_k E_k^*}{M_k} , \\ \dfrac{M_k E_k^* - E_k e_k}{P_k p_k} \ \text{ в остальных случаях ;} \end{cases} \ \eta_k' = -1 \ ; \qquad (17)$$

$$\zeta_k'' = 2\pi \ ; \ \zeta_k' = 0 \ (k = 1, 2, \ldots) \ ; \qquad (18)$$

а

$$\Psi = p_{n-1} \cdot \frac{E_n}{P_{n-1}} \cdot \mathcal{F}(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, \sum_1^{n-1} p_k) \prod_1^{n-2} p_k^2 \ . \qquad (19)$$

$\beta)$: Если переменить порядок интегрирования, пользуясь по-прежнему сферической системой координат, т.е. взять

$$\cos\theta_k = \xi_k \ , \ p_k = \eta_k \ , \ \varphi_k = \zeta_k \qquad (20)$$

то Ψ , как и прежде, вычисляется по (19). Из § 2 [I] следует, что пределы интегрирования по ξ_k и η_k суть

$$\xi_k' = -1 \ ; \ \xi_k'' = 1 \ ; \ \eta_k' = 0 \ ; \ \eta_k'' = p_{k\,max} \text{ при } \frac{E_k}{M_k} \leq \frac{E_k^*}{m_k} \qquad (21)$$

$$\xi_k' = -1 \ ; \ \xi_k'' = \xi_{max} \ ; \ \eta_k' = p_{k\,min} \ ; \ \eta_k'' = p_{k\,max} \text{ при } \frac{E_k}{M_k} \geqslant \frac{E_k^*}{m_k} \qquad (22)$$

Здесь ξ_{max} есть косинус предельного угла (см., например, (I.12) из [I])

$$\xi_{max} = -\frac{\sqrt{E_k^2 p_k^{*2} - e_k^2 P_k^2}}{m_k P_k} \tag{23}$$

а $p_{k\,\substack{max\\min}}$ суть предельные значения импульсов под углом θ_k (см., например, (I,9$_1$), (I.10) из [I])

$$p_{k\,\substack{max\\min}} = \frac{-E_k^* M_k P_k \cos\theta_k \pm \sqrt{E_k^2 \left(M_k^2 p_k^{*2} - m_k^2 P_k^2 \sin^2\theta_k\right)}}{E_k^2 - P_k^2 \cos^2\theta_k} \tag{24}$$

γ): Будем пользоваться прямоугольными координатами, обозначая

$$\vec{p}_k = \{\xi_k, \eta_k, \zeta_k\}. \tag{25}$$

Тогда

$$\Psi = p_{n-1} \frac{E_n}{P_{n-1}} \mathcal{F}\left(\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_{n-1}, -\sum_1^{n-1} \vec{p}_k\right). \tag{26}$$

Чтобы найти пределы интегрирования, учтем, что (см.[I]) область разрешенных значений p_k есть трехмерный эллипсоид вращения. Для трехмерного эллипсоида с матрицей коэффициентов (a_{ij}) $i,j = 1,\ldots,4$ экспериментальные значения координаты ξ равны:

$$\xi', \xi'' = \left(\Delta_{14} \pm \sqrt{-\Delta_2^{(1)} \Delta_4}\right) : \Delta_{44}; \tag{27}$$

Здесь Δ_4 -определитель матрицы (a_{ij}) при $i,j=1,\dots,4$; $\Delta_2^{(1)}$ - -определитель матрицы (a_{ij}) при $i,j=2,3$, Δ_{ij} -алгебро- ическое дополнение элемента a_{ij} матрицы (a_{ij}); $i,j=1,\dots,4$.
В интересующем нас эллипсоиде матрица $(a_{ij}$ имеет вид :

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} E_k^2-X_k^2 & -X_kY_k & -X_kZ_k & X_kM_kE_k^* \\ -X_kY_k & E_k^2-Y_k^2 & -Y_kZ_k & Y_kM_kE_k^* \\ -X_kZ_k & -Y_kZ_k & E_k^2-Z_k^2 & Z_kM_kE_k^* \\ X_kM_kE_k^* & Y_kM_kE_k^* & Z_kM_kE_k^* & E_k^2m_k^2-M_k^2E_k^{*2} \end{pmatrix} \qquad (28)$$

поэтому

$$\left.\begin{matrix} \xi_k' \\ \xi_k'' \end{matrix}\right\} = \frac{-X_kE_k^* \mp p_k\sqrt{M_k^2+X_k^2}}{M_k} \qquad (29)$$

В этих пределах может изменяться величина компоненты ξ_k вектор $\vec{\rho}_k$. Если ξ_k уже получено, то сечение эллипсоида плоскостью $\xi=\xi_k$ будет эллипсом с матрицей коэффициентов (a_{ij}); $i,j=1,2,3$:

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} E_k^2 - y_k^2 & -y_k z_k & y_k(M_k E_k^* - X_k \xi_k) \\ -y_k z_k & E_k^2 - z_k^2 & z_k(M_k E_k^* - X_k \xi_k) \\ y_k(M_k E_k^* - X_k \xi_k) & z_k(M_k E_k^* - X_k \xi_k) & \begin{matrix} E_k^2(\xi_k^2 + m_k^2) - \\ -(M_k E_k^* - X_k \xi_k)^2 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad (30)$$

Для эллипса экспериментальные значения координаты η_k выражаются формулой

$$\eta_k', \eta_k'' = \frac{\Delta_{13} \mp \sqrt{-a_{11}\Delta_3}}{\Delta_{33}} ; \qquad (31)$$

(где Δ_3 -определитель матрицы $(a_{ij}$ при $i,j=1,2,3)$. Наконец, когда в пределах (31) равномерно разыграно значение η_k, для компоненты ζ_k остаётся возможность изменяться внутри отрезка с концами ζ_k', ζ_k'. Для всех трех пар пределов (ξ_k', ξ_k''), (η_k', η_k''), (ζ_k', ζ_k'') можно написать одну формулу:

$$\left.\begin{matrix} \xi', \eta', \zeta' \\ \xi'', \eta''; \zeta'' \end{matrix}\right\} = \frac{AB \mp \sqrt{(C+A^2)(B^2-CD)}}{C}, \qquad (32)$$

где значения всех величин берутся из таблицы:

Таблица 1.

	ξ	η	ζ
A	X_k	Y_k	Z_k
B	$-M_k E_k^*$	$X_k \xi_k - M_k E_k^*$	$X_k \xi_k + Y_k \eta_k - M_k E_k^*$
C	M_k^2	$M_k^2 + X_k^2$	$M_k^2 + X_k^2 + Y_k^2$
D	m_k^2	$m_k^2 + \xi_k^2$	$m_k^2 + \xi_k^2 + \eta_k^2$ (33)

Пределы интегрирования по p_{n-1} и φ_{n-1} вычисляются по (16) и (18). Выражения для ψ (19), (26) теряют смысл при $P_{n-1} = 0$. Но легко показать, что, например, (19) при $P_{n-1} = 0$ можно заменить на

$$\psi = 2\prod_1^{n-2} p_k^2 \, \mathcal{F}\Big(p_1, \dots, p_{n-2}, p_{n-1}^*, -\sum_1^{n-2} p_k - p_{n-1}^*\Big) \cdot \frac{(E_{n-1} - E_{n-1}^*) E_{n-1}^* p_{n-1}^*}{M_{n-1}}, \tag{34}$$

если только в w (13) исключить множитель $(p_{n-1}'' - p_{n-1}')$:

$$w = \left[\prod_{k=1}^{n-2} (\xi_k'' - \xi_k')(\eta_k'' - \eta_k')(\zeta_k'' - \zeta_k')\right] \cdot (\zeta_{n-1}'' - \zeta_{n-1}') \tag{35}$$

и тем самым избавиться от неопределенности. Трудно заранее оценить, какой из алгоритмов $\alpha)$, $\beta)$ или $\gamma)$ даёт наиболее эффективный способ подсчёта Σ. Пусть, например, $\mathcal{F} = 1$. Тогда в $\alpha)$ и $\beta)$ можно проинтегрировать по всем ζ_k, и размерность области интегрирования уменьшится в полтора раза, что должно сильно улучшить сходимость, в $\gamma)$ подобного уменьшения размерности при этом не произойдет. Однако, ψ (26) в алгорифме γ) зависит лишь от трех переменных p_{n-1}, E_{n-1}, P_{n-1}, а ψ (19) в α) и β) ещё и от $p_1, \ldots, p_{n-2}$. Поэтому разброс значений ψ в α) и β) должен значительно (расчёт показывает, что на несколько порядков) превосходить разброс значений ψ в γ). Это приведет к увеличению дисперсии. A priori неясно, какой из факторов - увеличение разброса значений подинтегральной функции или уменьшение размерности области интегрирования - действует сильнее.

Изложенный здесь способ не претендует на удовлетворительное решение проблемы подсчёта статистических весов при моделировании процесса множественного рождения. Он также как и обычный способ посчёта по методу Монте-Карло требует большого объёма работы, хотя и даёт в некоторых случаях значительную выгоду. При множественном рождении с большим числом частиц статистические веса отдельных реакций примерно уравниваются и для их вычисления вероятностными методами нужен очень большой объём расчётов. Однако при вычислении сравнительно больших статистических весов метод взвешенного расположения может оказаться наиболее полезным.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[I]. Г.И. Копылов "Моделирование процесса множественного рождения", ЖЭТФ, 1958 год. (в печати).

[2]. G.E. Fialko, Ph.Rev., 105, N 1, 328 (1957)

[3]. Л. Заставенко (в печати)

[4]. J.W. Butler, в книге: Meyer H.A. „Symposium of Monte Carlo Metods", 1956г, N.-J.

[5]. Ю.Н. Благовещенский - "К вопросу о вычислении многократных интегралов методом Монте-Карло", Теория вер. и ... (в печати)

[6]. Г.И. Копылов - "Об оценкечисла вторичных частиц близ предельных углов", изд. ЛТФ ОИЯИ, Р-166, Дубна, 1958 год.

[7] ~~[illegible]~~ „Таблица случ. звёзд"