2124

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2124

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.Г. Кадышевский, Р.М. Мурадян

ГРУППА SU(3) В ТЕОРИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

I. Сильные и электромагнитные взаимодействия

(Обзор)

1965

P-2124

В.Г. Кадышевский, Р.М. Мурадян

ГРУППА SU(3)
В ТЕОРИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

I. Сильные и электромагнитные взаимодействия

(Обзор)

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение

Последние годы ознаменовались большими успехами гипотезы унитарной симметрии в теории элементарных частиц. Новая группа симметрии SU(3) дала возможность построить изящную классификацию адронов, которая вобрала в себя схему изотопических мультиплетов Гелл-Манна–Нишиджимы. При этом оператор гиперзаряда получил в унитарной схеме теоретико-групповую интерпретацию, эквивалентную интерпретации операторов проекций изотопического спина. Кроме того, как известно, из гипотезы SU(3) -симметрии следует целый ряд соотношений между физическими величинами, хорошо оправдывающихся на опыте.

В настоящее время существуют различные конкретные методы работы с группой SU(3). Среди них выделяются два особенно простых, для усвоения которых не требуется детального знания общей теории групп Ли в духе Картана и Вейля. Это, во-первых, тензорный метод, основанный на применении тензорной алгебры в унитарном 3-пространстве и инвариантных тензоров δ^i_k, ϵ_{ijk}, ϵ^{ijk}. С этим аппаратом можно познакомиться по обзорам[C4,5].

Второй простой метод опирается на понятие тензорного оператора и теорему Вигнера-Эккарта. Важным достоинством его является непосредственная связь с формализмом квантовой механики. Мощь этого метода была убедительно продемонстрирована рядом авторов[C3, D2 -6].

В настоящем обзоре вторым из названных методов выводятся некоторые известные следствия гипотезы SU(3) -инвариантности, касающиеся сильных, электромагнитных и слабых взаимодействий. Тензорным методом мы не пользуемся, считая его хорошо известным. Поэтому, например в обзоре, не встречается ставшее уже привычным изображение барионных и бозонных октетов в виде матриц 3 x 3, а вместо этого каждой частице сопоставляется "вектор состояния" в унитарном пространстве.

В целях лучшей ориентации читателя, входящего в круг идей унитарной симметрии, ниже мы будем неоднократно обращаться к аналогии между группами SU(3) и SU(2). По этой причине следующий параграф целиком посвящается напоминанию некоторых известных положений из теории группы SU(2).

§ 2. Группа SU(2), ее генераторы и инварианты

Группу SU(2), т.е. двумерную специальную унитарную группу, образует совокупность всех комплексных 2 x2 матриц, удовлетворяющих следующим требованиям:

$$U^+U = 1 \qquad \text{(унитарность)} \qquad (1)$$

$$\det U = 1 \qquad \text{(специальность или унимодулярность)} \qquad (2)$$

В силу (1) и (2) любая матрица из SU(2) может быть представлена в экспоненциальной форме[x)]:

$$U = e^{iH} \qquad (3)$$

при условии, что H -эрмитова 2x2 матрица со шпуром, равным нулю. Наиболее общий вид матрицы H с указанными свойствами, очевидно, следующий:

$$H = \begin{pmatrix} \omega_3 & \omega_1 - i\omega_2 \\ \omega_1 + i\omega_2 & -\omega_3 \end{pmatrix} = \omega_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \omega_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \omega_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – произвольные вещественные параметры. Следовательно, группа SU(2) является трехпараметрической. Из (3) и (4) вытекает, что ее генераторы, т.е. величины $\frac{1}{i} \frac{\partial U}{\partial \omega_j} \Big|_{\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0}$ совпадают с матрицами Паули:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Поскольку ни одна из матриц (5) не коммутирует с двумя другими, ранг группы SU(2) равен единице[xx)]. Введем оператор изотопического спина $\vec{I}$, полагая

$$I_i = \frac{1}{2} \tau_i \; ; \; (i = 1,2,3), \qquad (6)$$

и рассмотрим прямое произведение этого оператора на матричный вектор Паули $\vec{\tau}$ с компонентами (5):

$$\vec{I} \times \vec{\tau} = I_1 \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + I_2 \times \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + I_3 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} I_3 & I_1 - iI_2 \\ I_1 + iI_2 & -I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_3 & I_- \\ I_+ & -I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

---

x) Это представление является аналогом записи комплексного числа z, модуль которого равен единице, в показательной форме $z = e^{i\phi}$, где ϕ – вещественно. Заметим, что матрица H не определяется однозначно заданием U, также как задание z определяет ϕ лишь с точностью до 2π.

xx) Напомним, что рангом группы называется максимальное число линейно независимых генераторов, коммутирующих между собой.

Операторы a^i_k $(i,k = 1,2)$, удовлетворяющие условию $a^1_1 + a^2_2 = 0$, мы будем называть генераторами группы SU(2) в тензорной форме. Из их определения и равенств (6) и (5), очевидно, вытекает, что

$$a^1_1 = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad a^1_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^2_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^2_3 = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

или в компактной записи:

$$(a^i_k)^\mu_\nu = \delta_{i\nu} \delta_{k\mu} - \tfrac{1}{2} \delta_{ik} \delta_{\mu\nu}. \qquad (9)$$

С помощью (9) нетрудно убедиться в справедливости правила коммутации:

$$[\, a^i_k \,, a^j_\ell \,] = \delta^i_\ell \, a^j_k - \delta^j_k \, a^i_\ell \,, \qquad (10)$$

которое, в силу (7), эквивалентно соотношениям:

$$[\, I_3 \,, I_\pm \,] = \pm I_\pm \,, \qquad (11)$$

$$[\, I_+ \,, I_- \,] = 2 I_3 . \qquad (12)$$

Вычислим теперь шпур квадрата матрицы, составленной из генераторов a:

$$Sp \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix} = a^i_k \, a^k_i = a^1_1 \, a^1_1 + a^1_2 \, a^2_1 + a^2_1 \, a^1_2 + a^2_2 \, a^2_2 =$$
$$= 2 (I^2_1 + I^2_2 + I^2_3) = 2 \vec{I}^2 . \qquad (13)$$

Оператор квадрата полного спина $\vec{I}^2$ называется также оператором Казимира группы SU(2). Эта величина, как известно, полностью характеризует неприводимые представления данной группы.

§ 3. Генераторы и инварианты группы SU(3)

Трехмерную специальную унитарную группу SU(3) образует совокупность всех унитарных унимодулярных 3x3 матриц. Аналогично (3) любой элемент из SU(3) можно записать в экспоненциальной форме:

$$U = e^{iH}, \qquad (14)$$

где H – эрмитова 3x3 матрица с нулевым шпуром, зависящая от восьми произвольных вещественных параметров $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_8$.

$$
H=\begin{pmatrix}\omega_3+\frac{1}{\sqrt3}\omega_8 & \omega_1-i\omega_2 & \omega_4-i\omega_5\\ \omega_1+i\omega_2 & -\omega_3+\frac{1}{\sqrt3}\omega_8 & \omega_6-i\omega_7\\ \omega_4+i\omega_5 & \omega_6+i\omega_7 & -\frac{2}{\sqrt3}\omega_8\end{pmatrix}\equiv\sum_{k=1}^{8}\omega_k\lambda_k . \qquad (15)
$$

Матрицы λ_k $(k=1,2,\dots,8)$ являются генераторами группы SU(3) и иногда называются матрицами Гелл-Манна. Согласно (15),

$$
\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},
$$

$$
\lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\quad \lambda_8=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}. \qquad (16)
$$

Поскольку в (16) можно найти не более двух матриц, коммутирующих между собой (например, λ_3 и λ_8), то ранг группы SU(3) равен двум.

Введем в рассмотрение оператор унитарного спина (ср. с (6))

$$
F_k=\tfrac12\lambda_k\,,\quad (k=1,2,\dots,8) \qquad (17)
$$

и генераторы в тензорной форме (ср. с (7)):

$$
\sum_{k=1}^{8}F_k\times\lambda_k=\begin{pmatrix}F_3+\frac{1}{\sqrt3}F_8 & F_1-iF_2 & F_4-iF_5\\ F_1+iF_2 & -F_3+\frac{1}{\sqrt3}F_8 & F_6-iF_7\\ F_4+iF_5 & F_6+iF_7 & -\frac{2}{\sqrt3}F_8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^1_1 & A^1_2 & A^1_3\\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3\\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3\end{pmatrix}. \qquad (18)
$$

Очевидно,

$$
A^1_1=\frac13\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad A^1_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad A^1_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},
$$

$$
A^2_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad A^2_2=\frac13\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad A^2_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \qquad (19)
$$

$$
A^3_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad A^3_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad A^3_3=\frac13\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix},
$$

причем в силу условия

$$
A^1_1+A^2_2+A^3_3=0
$$

лишь 8 величин A^i_k являются независимыми. Для операторов A^i_k имеется аналог формулы (9):

$$
(A^i_k)^{\mu}_{\nu}=\delta_{i\nu}\delta_{k\mu}-\frac13\delta_{ik}\delta_{\mu\nu}\,,\quad (i,k,\mu,\nu=1,2,3)\,, \qquad (20)
$$

откуда легко получить соотношение коммутации:

$$
[A^i_k\,,A^j_\ell]=\delta^i_\ell A^j_k-\delta^j_k A^i_\ell\,. \qquad (21)
$$

Компоненты унитарного спина F обозначим следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&F_1=I_1\,,\quad F_4=K_1\,,\quad F_6=L_1\,,\quad F_8=\frac{\sqrt3}{2}Y\,,\\
&F_2=I_2\,,\quad F_5=K_2\,,\quad F_7=L_2\,,\\
&F_3=I_3.
\end{aligned} \qquad (22)
$$

С учетом (22) матрица генераторов (18) принимает вид (ср. с (7)):

$$
(A^i_k)=\begin{pmatrix}I_3+\frac{Y}{2} & I_1-iI_2 & K_1-iK_2\\ I_1+iI_2 & -I_3+\frac12 Y & L_1-iL_2\\ K_1+iK_2 & L_1+iL_2 & -Y\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}Q & I_- & K_-\\ I_+ & -Q+Y & L_-\\ K_+ & L_+ & -Y\end{pmatrix}. \qquad (23)
$$

Операторы I_1, I_2, I_3 интерпретируются как компоненты вектора изотопического спина (ср. с (6)), оператор Y сопоставляется гиперзаряду, а $Q=I_3+\frac12 Y$ – электрическому заряду.

Пользуясь (21) и (23), легко найти соотношения коммутации между величинами $I_\pm, K_\pm, L_\pm, I_3, Y$ (их общее число равно, очевидно, числу сочетаний из 8 элементов по 2, т.е. 28).

$$
[I_+\,,I_-]=2I_3
$$

$$
[I_\pm\,,K_\pm]=0
$$

$$
[I_\pm\,,K_\mp]=\mp L_\mp
$$

$$
[I_\pm\,,L_\pm]=\pm K_\pm
$$

$$
[I_\pm\,,L_\mp]=0
$$

$$[I_\pm, Y] = 0$$

$$[I_\pm, I_3] = \mp I_\pm$$

$$[K_+, K_-] = I_3 - \frac{3}{2} Y$$

$$[K_\pm, L_\pm] = 0 \qquad (24)$$

$$[K_\pm, L_\mp] = - I_\pm$$

$$[K_\pm, Y] = \mp K_\pm$$

$$[K_\pm, I_3] = \mp \tfrac{1}{2} K_\pm$$

$$[L_+, L_-] = + I_3 - \frac{3}{2} Y$$

$$[L_\pm, Y] = \mp L_\pm$$

$$[L_\pm, I_3] = \pm \tfrac{1}{2} L_\pm$$

$$[Y, I_3] = 0$$

Так как SU(3) является группой второго ранга, то ее неприводимые представления арактеризуются собственными значениями двух операторов Казимира[x)]. Способ получения этих операторов идентичен уже описанному (см. конец предыдущего параграфа). 'ассмотрим квадрат матрицы генераторов A^i_k

$$B^i_k = A^i_j A^j_k$$

вычислим шпур матрицы B^i_k :

$$Sp\,B = A^i_j A^j_i = A^1_1 A^1_1 + A^2_1 A^1_2 + A^3_1 A^1_3 + A^1_2 A^2_1 + A^2_2 A^2_2 + \qquad (25)$$

$$+ A^3_2 A^2_3 + A^1_3 A^3_1 + A^2_3 A^3_2 + A^3_3 A^3_3 = 2 \sum_{k=1}^{8} F^2_k = 2F^2 .$$

x) Доказательство этого утверждения содержится, например, в /B3/.

Величина F^2, равная сумме квадратов компонент вектора унитарного спина, называется первым оператором Казимира группы SU(3). Теперь возведем A^i_j в третью степень:

$$C^i_k = A^i_j A^j_m A^m_k$$

и возьмем шпур от C^i_k :

$$Sp\,C = A^i_j A^j_m A^m_i = G^3 . \qquad (26)$$

Оператор G^3 называется вторым оператором Казимира группы SU(3).

С помощью (21) нетрудно убедиться, что величины F^2 и G^3 коммутируют со всеми генераторами рассматриваемой группы, т.е. действительно являются ее инвариантами.

Шпуры от более высоких степеней матриц A^i_j функционально выражаются через F^2 и G^3.

§ 4. Коэффициенты Клебша-Гордана

Рассмотрим вначале коэффициенты К. – Г. группы SU(2). Состояние одной частицы в SU(2) характеризуется изотопической волновой функцией, которую, применяя обозначения Дирака, можно записать в виде кет-вектора $|i i_3\rangle$. Пусть нам дана еще одна частица с волновой функцией $|i' i'_3\rangle$. Оба рассматриваемые состояния, очевидно, преобразуются по неприводимым представлениям группы SU(2), отвечающим значениям i и i' полного изотопического спина. Прямое произведение этих состояний $|i i_3\rangle |i' i'_3\rangle$, преобразующееся, как правило, по приводимому представлению, можно разложить в прямую сумму состояний, преобразующихся по неприводимым представлениям. Для этой цели введем оператор суммарного изотопического спина $I_k = i_k + i'_k$ (k=1,2,3) и вместо четверки квантовых чисел $i i' i_3 i'_3$ будем описывать состояние заданием набора $I I_3 i i'$. Условие полноты этого набора имеет вид:

$$1 = \sum_{I I_3} |I I_3 i i'\rangle \langle I I_3 i i'| . \qquad (27)$$

Умножая обе части равенства (27) на кет-векторы наших двух частиц, получим:

$$|i i_3\rangle |i' i'_3\rangle = \sum_{I I_3} |I I_3 i i'\rangle \langle I I_3 i i' | i i_3 i' i'_3\rangle . \qquad (28)$$

Величины $\langle I I_3 i i' | i i_3 i' i'_3\rangle$ являются коэффициентами Клебша-Гордана группы SU(2). Для них употребляется также сокращенное обозначение $\langle I I_3 | i i_3 i' i'_3\rangle$. Общепринятый выбор произвольной фазы, согласно Кондону и Шортли, приводит к тому, что коэффициенты прямого и обратного преобразований совпадают, т.е. $\langle I I_3 | i i_3 i' i'_3\rangle = \langle i i_3 i' i'_3 | I I_3\rangle$. Таблицы этих коэффициентов широко распространены.

Перейдем теперь к группе SU(3). Свойства коэффициентов К.-Г. этой группы изучены, например, в работе /C3/, где можно ознакомиться со всеми деталями. Для приложений же достаточно понимать физический смысл коэффициентов и уметь пользоваться их таблицами.

Рассмотрим две частицы, принадлежащие некоторым унитарным супермультиплетам. Обозначим компоненты их операторов унитарного спина через f_k и f'_k $(k=1,2,\dots,8)$. Тогда состояние этих частиц можно задать кет-векторами[x)]:

$$|f^2 g^3 y\, i\, i_3 \rangle = |\underset{\approx}{n}\, y\, i\, i_3\rangle \ , \tag{29}$$

$$|f'^2 g'^3 y' i' i'_3 \rangle = |\underset{\approx}{n}' y' i' i'_3\rangle \ . \tag{30}$$

Состояния (29) и (30) преобразуются по неприводимым представлениям группы SU(3), в которых операторы Казимира имеют значения f^2, g^3 и f'^2, g'^3 соответственно. Прямое произведение (29) и (30) – вектор $|\underset{\approx}{n}\, y\, i\, i_3\rangle |\underset{\approx}{n}' y' i' i'_3\rangle$ – преобразуется, вообще говоря, по некоторому приводимому представлению данной группы. Сведение этого произведения к суперпозиции векторов состояний, преобразующихся по неприводимым представлениям с определенными размерностями $\underset{\approx}{N}$ (или инвариантами Казимира F^2 и G^3), осуществляется с помощью коэффициентов Клебша–Гордана следующим образом. Введем оператор суммарного унитарного спина $F_k = f_k + f'_k$ $(k=1,2,\dots,8)$ и рассмотрим набор из 9 коммутирующих операторов:

$$F^2,\ G^3,\ Y,\ I,\ I_3,\ f^2,\ f'^2,\ g^3,\ g'^3. \tag{31}$$

Ясно, что набор (31) не является полным, так как раньше мы описывали состояние двух частиц при помощи набора из 10 коммутирующих операторов:

$$f^2,\ g^3,\ y,\ i,\ i_3;\ f'^2,\ g'^3,\ y',\ i',\ i'_3 . \tag{32}$$

Это положение соответствует тому факту, что представление, характеризуемое операторами Казимира F^2 и G^3, может содержаться в прямом произведении $\underset{\approx}{n} \times \underset{\approx}{n}'$ более чем один раз. Поэтому в набор (31) необходимо включить десятый оператор, учитывающий различие между этими представлениями с одинаковыми $\underset{\approx}{N}$. Мы будем обозначать этот оператор буквой R. Практически оператор R можно связать со свойствами симметрии волновых функций при определенных дискретных преобразованиях.

Теперь введем в рассмотрение вектор состояния двух частиц:

$$|F^2 G^3 Y\, I\, I_3 f^2 f'^2 g^3 g'^3\rangle_R \tag{33}$$

---

x) Во всех представлениях группы SU(3), используемых в настоящее время, имеется взаимно однозначное соответствие между величинами (f^2, g^3) и размерностью представления $\underset{\approx}{n}$.

(мы поместили индекс R вне кет-вектора, так как, в отличие от других квантовых чисел, он не содержится в группе). Условие полноты системы состояний (33) имеет вид:

$$1 = \sum_{\substack{F^2 G^3 R \\ Y I I_3}} |F^2 G^3 Y\, I\, I_3 f^2 f'^2 g^3 g'^3\rangle_{R\,R}\langle F^2 G^3 Y I I_3 f^2 f'^2 g^3 g'^3| \, . \tag{34}$$

Умножая обе стороны этого равенства на кет-векторы (29) и (30), получим:

$$|f^2 g^3 y\, i\, i_3\rangle |f'^2 g'^3 y' i' i'_3\rangle = \tag{35}$$
$$= \sum_{\substack{F^2 G^3 R \\ Y I I_3}} |F^2 G^3\, Y I I_3\, f^2 f'^2 g^3 g'^3\rangle_{R\,R}\langle F^2 G^3 Y I I_3 f^2 f'^2 g^3 g'^3 | f^2 g^3 y\, i\, i_3 f'^2 g'^3 y' i' i'_3 \rangle$$

Величина

$${}_R\langle F^2 G^3 Y I I_3 f^2 f'^2 g^3 g'^3 | f^2 g^3 y\, i\, i_3 f'^2 g'^3 i'\, i'_3 \rangle \tag{36а}$$

называется коэффициентом Клебша–Гордана группы SU(3). Короче ее можно записать так:

$${}_R\langle F^2 G^3 Y I I_3 | f^2 g^3 y\, i\, i_3 f'^2 g'^3 y' i' i'_3 \rangle \ , \tag{36б}$$

или, еще более компактно:

$${}_R\langle \underset{\approx}{N}\ Y I I_3 | \underset{\approx}{n}\, y\, i\, i\ \underset{\approx}{n}' y' i' i'_3 \rangle \, . \tag{36в}$$

В итоге ряд Клебша–Гордана для группы SU(3) принимает вид:

$$|\underset{\approx}{n}\, y\, i\, i_3\rangle |\underset{\approx}{n}' y' i' i'_3\rangle = \sum_{\substack{\underset{\approx}{N}\, R \\ Y I I_3}} |\underset{\approx}{N}\, Y I I_3\rangle_{R\,R}\langle \underset{\approx}{N}\, Y I I_3 | \underset{\approx}{n}\, y\, i\, i_3 \underset{\approx}{n}' y' i' i'_3\rangle \ . \tag{37а}$$

Если произвольные фазы внутри изотопических мультиплетов и между ними фиксированы согласно условиям де Сварта /C3/, то коэффициенты Клебша–Гордана представляют из себя вещественные ортогональные матрицы. Поэтому в разложении, обратном по отношению к (37а), используются те же коэффициенты К.-Г., так что

$$|\underset{\approx}{N}\, Y I I_3\rangle_R = \sum_{\substack{\underset{\approx}{n} y i i_3 \\ \underset{\approx}{n}' y' i' i'_3}} |\underset{\approx}{n}\, y\, i\, i_3\rangle |\underset{\approx}{n}' y' i' i'_3\rangle \langle \underset{\approx}{n}\, y\, i\, i_3 \underset{\approx}{n}\, y' i' i'_3 | \underset{\approx}{N}\, Y I I_3)_R \ . \tag{37б}$$

§ 5. Юкавское взаимодействие

Рассмотрим взаимодействие типа Юкавы между октетом барионов и октетом псевдоскалярных мезонов. При полном отсутствии симметрии лагранжиан взаимодействия $\mathcal{L}_{int}$ зависел бы от 64 констант связи. Гипотеза изотопической инвариантности оставляет независимыми только 12 констант, стоящих при формах:

$$g_{NN\pi}: \bar N \vec\tau N \vec\pi - (\bar p p - \bar n n)\pi^0 + \sqrt2(\bar n p \pi^- + \bar p n \pi^+),$$

$$g_{\Xi\Xi\pi}: \bar \Xi \vec\tau \Xi \vec\pi = (\bar\Xi^0\Xi^0 - \bar\Xi^-\Xi^-)\pi^0 + \sqrt2(\bar\Xi^-\Xi^0\pi^- + \bar\Xi^0\Xi^-\pi^+),$$

$$g_{\Lambda\Sigma\pi}: \bar\Lambda \vec\Sigma \vec\pi + \bar{\vec\Sigma}\Lambda\vec\pi = \bar\Lambda(\Sigma^0\pi^0 + \Sigma^+\pi^- + \Sigma^-\pi^+) + \bar\Sigma^0\Lambda\pi^0 + \bar\Sigma^-\Lambda\pi^- + \bar\Sigma^+\Lambda\pi^+,$$

$$g_{\Sigma\Sigma\pi}: -i(\bar{\vec\Sigma} \times \vec\Sigma)\vec\pi = -i(\bar\Sigma^-\Sigma^- - \bar\Sigma^+\Sigma^+)\pi^0 - i(\bar\Sigma^0\Sigma^+ - \bar\Sigma^-\Sigma^0)\pi^- - i(\bar\Sigma^+\Sigma^0 - \bar\Sigma^0\Sigma^-)\pi^+,$$

$$g_{NN\eta}: \bar N N \eta = (\bar p p + \bar n n)\eta,$$

$$g_{\Xi\Xi\eta}: \bar\Xi\Xi\eta = (\bar\Xi^-\Xi^- + \bar\Xi^0\Xi^0)\eta,$$

$$g_{\Lambda\Lambda\eta}: \bar\Lambda\Lambda\eta,$$

$$g_{N\Lambda K}: \bar N \Lambda K + \bar\Lambda N \bar K = \bar p \Lambda K^+ + \bar n \Lambda K^0 + \bar\Lambda(p K^- + n \bar K^0),$$

$$g_{\Xi\Lambda K}: \bar\Xi\Lambda K + \bar\Lambda\Xi K = \bar\Xi^0\Lambda K^0 - \bar\Xi^-\Lambda K^- + \bar\Xi^0\Lambda^0 K^0 + \bar\Lambda(\Xi^0 K^0 - \Xi^- K^+),$$

$$g_{N\Sigma K}: \bar N \vec\tau \vec\Sigma K + \bar{\vec\Sigma} N \vec\tau \bar K = \bar p \Sigma^0 K^+ - \bar n \Sigma^0 K^0 + \sqrt2(\bar n \Sigma^- K^+ + \bar p \Sigma^+ K^0) +$$

$$+ \bar\Sigma^0(p K^- - n \bar K^0) + \sqrt2(\bar\Sigma^- n K^- + \bar\Sigma^+ p \bar K^0),$$

$$g_{\Xi\Sigma K}: \bar\Xi \vec\tau \vec\Sigma \bar K + \bar{\vec\Sigma}\Xi\vec\tau K = \bar\Xi^-\Sigma^0 K^- + \bar\Xi^0\Sigma^0\bar K^0 + \sqrt2(\bar\Xi^-\bar K^0\Sigma^- - \bar\Xi^0 K^-\Sigma^+) +$$

$$+ \bar\Sigma^0(\bar\Xi^- K^+ + \Xi^0 K^0) + \sqrt2(\bar\Sigma^-\Xi^- K^0 - \bar\Sigma^+\Xi^0 K^+).$$

Посмотрим теперь, какие ограничения на константы связи накладывает требование SU(3) -инвариантности лагранжиана взаимодействия.

В пределе точной SU(3) -симметрии лагранжиан $\mathfrak{L}_{int}$ должен быть унитарным скаляром. Из трех октетов (антибарионного, барионного и мезонного) можно образовать два унитарных скаляра. Действительно, пользуясь таблицей умножения (см. Приложение I), находим без труда

$$\begin{aligned}\underset{\approx}{8}\times\underset{\approx}{8}\times\underset{\approx}{8} = \underset{\approx}{1} + \underset{\approx}{1} + \underset{\approx}{8} + \underset{\approx}{8} + \underset{\approx}{8} + \underset{\approx}{8} + \underset{\approx}{8} + \underset{\approx}{8} + \underset{\approx}{8} + \underset{\approx}{8} + \\ + \underset{\approx}{10} + \underset{\approx}{10} + \underset{\approx}{10} + \underset{\approx}{10} + \underset{\approx}{10^*} + \underset{\approx}{10^*} + \underset{\approx}{10^*} + \underset{\approx}{10^*} + \underset{\approx}{27} + \underset{\approx}{27} + \underset{\approx}{27} + \\ \underset{\approx}{27} + \underset{\approx}{27} + \underset{\approx}{27} + \underset{\approx}{35} + \underset{\approx}{35} + \underset{\approx}{35^*} + \underset{\approx}{35^*} + \underset{\approx}{64}.\end{aligned} \tag{39}$$

Синглеты, содержащиеся в (39), могут отличаться друг от друга четностью относительно R - преобразования /A1/ и соответствуют, по терминологии Гелл-Манна, D- или F - связи. Мы будем обозначать эти величины через $\mathfrak{L}^{(\underset{\approx}{1})}_{000}$ и $\mathfrak{L}^{(\underset{\approx}{1})'}_{000}$, или обобщенно, через $\mathfrak{L}^{(\underset{\approx}{1})R}_{000}$, так что

$$\mathfrak{L}_{int} = -\sum_R g_R \mathfrak{L}^{(\underset{\approx}{1})R}_{000} \equiv -g\,\mathfrak{L}^{(\underset{\approx}{1})}_{000} - g'\mathfrak{L}^{(\underset{\approx}{1})'}_{000}. \tag{40}$$

Теперь из октетов

$$|\underset{\approx}{8}\, Y I I_3> \;;\qquad |\underset{\approx}{8}\, Y' I' I'_3> \;;\qquad |\underset{\approx}{8}\, y i i_3> \tag{41}$$

антибарионы   барионы 0^- – мезоны

построим синглеты $\mathfrak{L}^{(\underset{\approx}{1})R}_{000}$ в явном виде. Построение произведем в два этапа. Сначала из антибарионов и барионов с помощью коэффициентов К.-Г. (см. (37б)) сконструируем "бозонное" состояние $|\underset{\approx}{8} - yi - i_3>_R$:

$$|\underset{\approx}{8} - yi - i_3>_R = \sum_{\substack{YII_3\\ Y'I'I'_3}} |\underset{\approx}{8}\, YII_3>|\underset{\approx}{8}\, Y'I'I'_3> < \underset{\approx}{8}\, YII_3\, \underset{\approx}{8}\, Y'I'I'_3 | \underset{=}{8} - yi - i_3>_R. \tag{42}$$

Затем из октета мезонов $|\underset{\approx}{8}\, yii_3>$ и состояния $|\underset{\approx}{8} - yi - i_3>_R$ образуем искомые унитарные скаляры:

$$\mathfrak{L}^{(\underset{\approx}{1})R}_{000} = \sum_{yii_3} |\underset{\approx}{8} - yi - i_3>_R |\underset{\approx}{8}\, yii_3> < \underset{\approx}{8} - yi - i_3\, \underset{\approx}{8}\, yii_3 | \underset{\approx}{1}\, 000>, \tag{43}$$

или окончательно, после подстановки (42) в (43):

$$\mathfrak{L}^{(\underset{\approx}{1})R}_{000} = \sum_{\substack{YII_3\\ Y'I'I'_3\\ yii_3}} |\underset{\approx}{8}\, YII_3>|\underset{\approx}{8}\, Y'I'I'_3>|\underset{\approx}{8}\, yii_3> < \underset{\approx}{8}\, YII_3\, \underset{\approx}{8}\, Y'I'I'_3 | \underset{\approx}{8} - yi - i_3>_R \times$$
$$\times < \underset{\approx}{8}\, yii_3\, \underset{\approx}{8} - yi - i_3 | \underset{\approx}{1}\, 000>. \tag{44}$$

Чтобы практически применять формулу (44), необходимо знать конкретный вид векторов состояния (41). Ниже мы выписываем все эти векторы, полагая /C3/, что при зарядовом сопряжении как барионные, так и мезонные состояния преобразуются по закону:

$$|\overline{N Y I I_3}\rangle = (-1)^{I_3+\frac{1}{2}Y}\,|\underset{\approx}{N}\; -Y\; I\; -I_3\rangle\ .$$

Барионы	Антибарионы
$\lvert p\rangle = \lvert\underset{\approx}{8}\,1\,\tfrac12\,\tfrac12\rangle$	$\lvert\bar p\rangle = -\lvert\underset{\approx}{8}\,-1\,\tfrac12\,-\tfrac12\rangle$
$\lvert n\rangle = \lvert\underset{\approx}{8}\,1\,\tfrac12\,-\tfrac12\rangle$	$\lvert\bar n\rangle = \lvert\underset{\approx}{8}\,-1\,\tfrac12\,\tfrac12\rangle$
$\lvert\Sigma^+\rangle = -\lvert\underset{\approx}{8}\,0\,1\,1\rangle$	$\lvert\bar\Sigma^+\rangle = \lvert\underset{\approx}{8}\,0\,1\,-1\rangle$
$\lvert\Sigma^\circ\rangle = \lvert\underset{\approx}{8}\,0\,1\,0\rangle$	$\lvert\bar\Sigma^\circ\rangle = \lvert\underset{\approx}{8}\,0\,1\,0\rangle$
$\lvert\Sigma^-\rangle = \lvert\underset{\approx}{8}\,0\,1\,-1\rangle$	$\lvert\bar\Sigma^-\rangle = -\lvert\underset{\approx}{8}\,0\,1\,1\rangle$
$\lvert\Lambda\rangle = \lvert\underset{\approx}{8}\,0\,0\,0\rangle$	$\lvert\bar\Lambda\rangle = \lvert\underset{\approx}{8}\,0\,0\,0\rangle$
$\lvert\Xi^\circ\rangle = \lvert\underset{\approx}{8}\,-1\,\tfrac12\,\tfrac12\rangle$	$\lvert\bar\Xi^\circ\rangle = \lvert\underset{\approx}{8}\,1\,\tfrac12\,-\tfrac12\rangle$
$\lvert\Xi^-\rangle = \lvert\underset{\approx}{8}\,-1\,\tfrac12\,-\tfrac12\rangle$	$\lvert\bar\Xi^-\rangle = -\lvert\underset{\approx}{8}\,1\,\tfrac12\,\tfrac12\rangle$

(45а)

Псевдоскалярные мезоны

$$|\pi^+\rangle = -|\underset{\approx}{8}\,0\,1\,1\rangle$$
$$|\pi^\circ\rangle = |\underset{\approx}{8}\,0\,1\,0\rangle$$
$$|\pi^-\rangle = |\underset{\approx}{8}\,0\,1\,-1\rangle$$
$$|\eta\rangle = |\underset{\approx}{8}\,0\,0\,0\rangle$$
$$|K^+\rangle = |\underset{\approx}{8}\,1\,\tfrac12\,\tfrac12\rangle$$
$$|K^\circ\rangle = |\underset{\approx}{8}\,1\,\tfrac12\,-\tfrac12\rangle$$
$$|K^-\rangle = -|\underset{\approx}{8}\,-1\,\tfrac12\,-\tfrac12\rangle$$
$$|\bar K^\circ\rangle = |\underset{\approx}{8}\,-1\,\tfrac12\,\tfrac12\rangle$$

Подставляя (45а) и (45б) в (44) и учитывая равенство (40), можно найти соотношения между константами g и g' и 12 константами связи из (38)[/С3/]. Проиллюстрируем это на примере π-N взаимодействия.

Вначале из таблицы коэффициентов К.-Г. (см. Приложение II) определим множители $\langle\underset{\approx}{8}\,y\,i\,i_3\;\underset{\approx}{8}\,-y\,i\,-i_3|\underset{\approx}{1}\,0\,0\,0\rangle$. В результате интересующая нас часть синглета (44) принимает вид:

$$(\underset{000}{\mathfrak{L}^{(1)}_{\approx}}{}_{R'})_{NN\pi} = -\frac{1}{\sqrt8}\sum_{\substack{YII_3\\ Y'I'I'_3}} |\underset{\approx}{8}\,Y\,I\,I_3\rangle\,|\underset{\approx}{8}\,Y'I\,I'_3\rangle\{|\pi^+\rangle\langle\underset{\approx}{8}\,Y\,I\,I_3\;\underset{\approx}{8}\,Y\,I'I'_3|\underset{\approx}{8}\,0\,1\,-1\rangle_R -$$
$$-|\pi^-\rangle\langle\underset{\approx}{8}\,Y\,I\,I_3\;\underset{\approx}{8}\,Y'I'I'_3|\underset{\approx}{8}\,0\,1\,1\rangle_R + |\pi^\circ\rangle\langle\underset{\approx}{8}\,Y\,I\,I_3\;\underset{\approx}{8}\,Y\,I'I'_3|\underset{\approx}{8}\,0\,1\,0\rangle_R\}\ , \qquad (46)$$

где суммирование производится лишь по нуклонным и антинуклонным состояниям. Далее, снова используя ту же таблицу, находим окончательно:

$$(\mathfrak{L}_{int})_{NN\pi} = -\sum_R g_R(\underset{000}{\mathfrak{L}^{(1)}_{\approx}}{}_R)_{NN\pi} =$$
$$= -\left(\frac{g\sqrt{30}}{40} + \frac{g'\sqrt6}{24}\right)[(\bar p p - \bar n n)\pi^\circ + \sqrt2(\bar n p\pi^- + \bar p n\pi^+)] = \qquad (47)$$
$$= -\left(\frac{g\sqrt{30}}{40} + \frac{g'\sqrt6}{24}\right)\bar N\vec\tau N\vec\pi\ .$$

Сравнивая выражение (47) и (38), получаем связь между константами $g_{NN\pi}$, g и g'

$$g_{NN\pi} = g\,\frac{\sqrt{30}}{40} + g'\,\frac{\sqrt6}{24} \qquad (48)$$

Аналогичным образом устанавливаются соотношения между g, g' и остальными константами связи из (38). Мы приведем их без вывода:

$$g_{\Xi\Sigma K} = -\frac{\sqrt{30}}{40}g - \frac{\sqrt6}{24}g'\ ,$$
$$g_{\Xi\Xi\pi} = -g_{N\Sigma K} = -\frac{\sqrt{30}}{40}g + \frac{\sqrt6}{24}g'\ ,$$
$$g_{\Lambda\Sigma\pi} = g_{\Sigma\Sigma\eta} = -g_{\Lambda\Lambda\eta} = \frac{\sqrt{10}}{20}g\ ,$$
$$g_{\Sigma\Sigma\pi} = +\frac{\sqrt6}{12}g'\ , \qquad (49)$$
$$g_{NN\eta} = g_{\Xi\Lambda K} = -\frac{\sqrt{10}}{40}g + \frac{\sqrt2}{8}g'\ ,$$
$$g_{\Xi\Xi\eta} = g_{N\Lambda K} = -\frac{\sqrt{10}}{40}g - \frac{\sqrt2}{8}g'\ .$$

§ 6. Теорема Вигнера-Эккарта

Из квантовой механики хорошо известно, что различным физическим величинам можно сопоставить операторы. Например, вектору импульса отвечает оператор импульса $\vec{p}$, вектору углового момента – оператор углового момента $\vec{J}$ и т.д. Компоненты этих векторных операторов уже не являются c-числами, а удовлетворяют определенным перестановочным соотношениям. Однако при преобразованиях координат они по-прежнему преобразуются как компоненты обычных векторов.

Аналогичным образом можно рассматривать тензорные операторы, сопоставленные тензорным физическим величинам. Неприводимым тензорным оператором называется совокупность определенного числа операторов, которые при переходе к другой системе координат преобразуются друг через друга, как обычные неприводимые тензоры. При вычислении матричных элементов от таких операторов большую помощь оказывает теорема Вигнера-Эккарта.

Вначале рассмотрим эту теорему в применении к группе SU(2). Пусть $T^{(I)}_{I_3}$ – неприводимый тензорный оператор, преобразующийся по представлению I группы SU(2) и имеющий $2I+1$ компоненту x). Попробуем найти его матричный элемент между двумя векторами состояний группы SU(2):

$$\langle I I_3 | T^{(I')}_{I'_3} | I'' I''_3 \rangle . \tag{50}$$

Конечно, в явном виде (50) вычисляется только в том случае, когда известен конкретный вид оператора T. Однако, даже не конкретизируя T, можно показать, что этот матричный элемент всегда пропорционален коэффициенту Клебша-Гордона вида $\langle I I_3 | I' I'_3 I'' I''_3 \rangle$, причем коэффициент пропорциональности $a(I, I' I'')$ xx) не зависит от проекций, а является функцией I, I', I'':

$$\langle I I_3 | T^{(I')}_{I'_3} | I'' I''_3 \rangle = a(I, I', I'') \langle I I_3 | I' I'_3 I'' I''_3 \rangle . \tag{51}$$

В этом и состоит теорема Вигнера-Эккарта. Доказательство ее может быть проведено как с помощью теории групп, так и алгебраически, и содержится во многих учебниках.

Соотношение (51) показывает, что зависимость матричного элемента от проекций I_3, I'_3, I''_3 выделяется в явном виде. Поэтому, зная матричный элемент в каком-либо простейшем случае (например, при $I_3 = I'_3 = I''_3 = 0$), мы автоматически находим его величину при любых значениях проекций.

---

x) Т.е. закон преобразования величины $T^{(I)}_{I_3}$ такой же, как у кет-вектора $|I I_3\rangle$.

xx) В литературе встречается несколько наименований величины $a(I, I', I'')$: приведенный матричный элемент, амплитудная матрица, дважды отчеркнутая матрица. Последнее наименование связано с обозначением $a(I, I', I'') = \langle I \| T^{(I')} \| I'' \rangle$.

Второе важное следствие теоремы Вигнера-Эккарта заключается в том, что она позволяет получить правила отбора, т.е. условия, при которых матричный элемент тензорного оператора отличен от нуля. Эти правила отбора прямо следуют из свойств коэффициентов Клебша-Гордона и устанавливают, что матричный элемент не исчезает лишь в том случае, когда

$$I_3 = I'_3 + I''_3 \tag{52а}$$

и, кроме того, выполняется неравенство треугольника:

$$| I - I'' | \le I' \le I + I'' . \tag{52б}$$

Перейдем теперь к группе SU(3) и поставим себе задачу найти матричные элементы тензорного оператора $T^{(\underset{\approx}{N})}_{YII_3}$ между векторами состояний типа (29)-(30), т.е. величины

$$\langle \underset{\approx}{n} Y I I_3 | T^{(\underset{\approx}{n}')}_{Y' I' I'_3} | \underset{\approx}{n}'' Y'' I'' I''_3 \rangle . \tag{53}$$

В отличие от предыдущего случая в прямом произведении представлений $\underset{\approx}{n}' \times \underset{\approx}{n}''$ группы SU(3) неприводимое представление $\underset{\approx}{n}$ может встретиться более, чем один раз. Поэтому теперь матричные элементы типа (53) не просто пропорциональны отдельным коэффициентам Клебша-Гордана группы SU(3), а являются, вообще говоря, некоторыми линейными комбинациями из них. Теорема Вигнера-Эккарта для группы SU(3) гласит /С3/:

$$\begin{aligned} &\langle \underset{\approx}{n} Y I I_3 | T^{(\underset{\approx}{n}')}_{Y' I' I'_3} | \underset{\approx}{n}'' Y'' I'' I''_3 \rangle = \\ &= \sum_R a^R(\underset{\approx}{n}, \underset{\approx}{n}', \underset{\approx}{n}'') \langle \underset{\approx}{n}_R Y I I_3 | \underset{\approx}{n}' Y' I' I'_3 \, \underset{\approx}{n}'' Y'' I'' I''_3 \rangle . \end{aligned} \tag{54}$$

Здесь индекс R принимает столько значений, сколько раз неприводимое представление $\underset{\approx}{n}$ встречается в произведении $\underset{\approx}{n}' \times \underset{\approx}{n}''$.

Из свойств коэффициентов Клебша-Гордана группы SU(3) вытекают определенные правила отбора. А именно, матричный элемент (53) отличен от нуля лишь при соблюдении следующих условий:

1. Представление $\underset{\approx}{n}$ содержится хотя бы один раз в прямом произведении $\underset{\approx}{n}' \times \underset{\approx}{n}''$.
2. Имеет место равенство $I_3 = I'_3 + I''_3$.
3. Выполняется неравенство треугольника для изоспина
$$| I - I'' | \le I' \le I + I'' .$$
4. Выполняется соотношение $Y = Y' + Y''$.

§ 7. Нарушение унитарной симметрии и массовые формулы

Унитарная симметрия является идеализацией действительности, на что указывает существование значительных разностей масс частиц, входящих в одни и те же супермультиплеты. Однако очень простые предположения о тензорных свойствах поля, нарушающего SU(3) -симметрию, позволяют получить соотношения между расщепленными массами, находящиеся в прекрасном согласии с экспериментом. Чтобы лучше понять это, обратимся вначале опять к изотопической симметрии и посмотрим, как ее нарушение может привести к возникновению разностей масс внутри изотопических мультиплетов.

В пределе точной SU(2) -симметрии массовый оператор должен быть скалярным тензорным оператором $T^{(0)}_{0}$. Поэтому его матричный элемент между состояниями группы SU(2), согласно теореме Вигнера-Эккарта, имеет вид:

$$\langle I\, I_3 |\, T^{(0)}_{0}\, | I\, I_3 \rangle = M_0(I), \tag{55}$$

где $M_0(I)$ – масса, одинаковая для всего I -мультиплета.

Если теперь между членами изотопических мультиплетов включить электромагнитное взаимодействие, то полная изотопическая симметрия исчезает, но компонента I_3 по-прежнему останется сохраняющимся квантовым числом. Тензорный оператор M, коммутирующий с I_3, в самом общем виде записывается так:

$$M = \sum T^{(I)}_{0},$$

причем суммирование проводится по целочисленным I. В первом приближении достаточно взять два члена из этой суммы:

$$M = T^{(0)}_{0} + T^{(1)}_{0}. \tag{56}$$

Отсюда по теореме Вигнера-Эккарта

$$\langle I I_3 | M | I I_3\rangle = M_0(I) + \langle I I_3 | T^{(1)}_{0} | I I_3\rangle = M_0(I) + c(I)\langle I I_3 | 1\, 0\, I\, I_3\rangle . \tag{57}$$

Перейдем теперь к конкретным примерам.

Поскольку

$$\Sigma^{+} = -|11\rangle \quad \Sigma^{0} = |10\rangle \quad \Sigma^{-} = |1-1\rangle ,$$

то на основании (57)[x]:

$$m_{\Sigma^+} = m_0 + c\,\langle 11 | 1011\rangle = m_0 - \tfrac{1}{2} c ,$$

$$m_{\Sigma^0} = m_0 + c\,\langle 10 | 1010\rangle = m_0 ,$$

$$m_{\Sigma^-} = m_0 + c\,\langle 1-1 | 101-1\rangle = m_0 + \tfrac{1}{2} c .$$

x) Таблица коэффициентов К.-Г. группы SU(2) имеется, например, в /Д 8/.

Исключая из этих равенств константы m_0 и c, находим соотношение между массами:

$$m_{\Sigma^0} = \frac{m_{\Sigma^+} + m_{\Sigma^-}}{2} .$$

В качестве другого примера рассмотрим изотопический квартет $\Delta^{++}_{\delta}, \Delta^{+}_{\delta}, \Delta^{0}_{\delta}, \Delta^{-}_{\delta}$:

$$\Delta^{++}_{\delta} = |3/2\ \ 3/2\rangle, \quad \Delta^{+}_{\delta} = |3/2\ \ 1/2\rangle, \quad \Delta^{0}_{\delta} = |3/2\ \ -1/2\rangle, \quad \Delta^{-}_{\delta} = |3/2\ \ -3/2\rangle .$$

Аналогично предыдущему будем иметь:

$$m_{\Delta^{++}_{\delta}} = m_0 + c\,\langle 3/2\ 3/2\,|\,1\,0\,3/2\,3/2\rangle = m_0 + 3/5\,c ,$$

$$m_{\Delta^{+}_{\delta}} = m_0 + c\,\langle 3/2\ 1/2\,|\,1\,0\,3/2\,1/2\rangle = m_0 + 1/15\,c ,$$

$$m_{\Delta^{0}_{\delta}} = m_0 + c\,\langle 3/2\ -1/2\,|\,1\,0\,3/2\,-1/2\rangle = m_0 - 1/15\,c ,$$

$$m_{\Delta^{-}_{\delta}} = m_0 + c\,\langle 3/2\ -3/2\,|\,1\,0\,3/2\,-3/2\rangle = m_0 - 3/5\,c .$$

Откуда

$$m_{\Delta^{++}_{\delta}} + m_{\Delta^{-}_{\delta}} = m_{\Delta^{+}_{\delta}} + m_{\Delta^{0}_{\delta}} = \tfrac{1}{2}\left(m_{\Delta^{++}_{\delta}} + m_{\Delta^{+}_{\delta}} + m_{\Delta^{0}_{\delta}} + m_{\Delta^{-}_{\delta}}\right).$$

Вернемся теперь к группе SU(3). В пределе точной унитарной симметрии массовый оператор M должен быть скалярным оператором $T^{(\underset{\sim}{0})}_{000}$. В этом случае его матричный элемент между двумя состояния группы SU(3), согласно теореме Вигнера-Эккарта, имеет вид:

$$\langle \underset{\sim}{N}\, Y\, I\, I_3 \,|\, T^{(\underset{\sim}{0})}_{000} \,|\, \underset{\sim}{N}\, Y\, I\, I_3\rangle = M_0(\underset{\sim}{N}),$$

где $M_0(\underset{\sim}{N})$ – масса, одинаковая для всего унитарного мультиплета.

Предположим далее, что унитарная симметрия нарушается в результате включения какого-то взаимодействия, но при этом, однако, сохраняются изоспин I, его третья проекция I_3 и гиперзаряд Y. Наиболее общий вид оператора M, удовлетворяющего условиям коммутации

$$[M, I^2] = [M, I_3] = [M, Y] = 0,$$

очевидно, следующий

$$M = \sum_{\underset{\sim}{N}} T^{(\underset{\sim}{N})}_{000} , \tag{58}$$

где суммирование проводится лишь по тем мультиплетам, которые содержат состояния с $I = I_3 = Y = 0$. В октетной модели это соответствует представлениям размерности 1, 8, 27, ... Следуя Окубо, в формуле (58) учтем лишь первые два члена (ср. (56)):

$$M = T^{(\underset{\sim}{0})}_{000} + T^{(\underset{\sim}{8})}_{000} . \tag{59}$$

Откуда / D 1/

$$\mu(p) = \mu(\Sigma^{+}) \quad ,$$

$$\mu_{\Lambda} = \tfrac{1}{2}\mu_{n} = \tfrac{1}{2}\mu_{\Xi^{o}} = -\mu_{\Sigma^{o}} \quad ,$$

$$\mu_{\Sigma^{-}} = \mu_{\Xi^{-}} = -\mu_{p} - \mu_{n} \quad .$$

Литература

A. Фундаментальные работы

1. Y.Ne'eman. Nucl. Phys., 26, 222 (1961).[x)]
2. M.Gell-Mann. Phys. Rev., 125, 1067 (1962).[x)]
3. S.Okubo. Progr. Theor. Phys., 27, 949 (1962).

B. Монографии, лекции и обзоры по теории групп

1. M.Hamermesh. Group Theory and its Applications to physical problem. Addison-Wesley, USA, 1962.
2. Г. Вейль. Теория групп и квантовая механика. ОНТИ, ДНТВУ, Харьков, 1938.
3. G.Racah. Group Theory and Spectroscopy. Preprint R-1864, Dubna, 1964.
4. A.Salam. The Formalism of Lie Groups. Theor. Phys. Internatuonal Atomic Agency, Vienna (1963).
5. W.Pauli. Conrinuous Groups in Quantum Mechanics. Preprint CERN, 56-31 (1956).

C. Обзоры по SU(3) -симметрии

1. A.Salam. Symmetry of Strong Interactions. The 1964 Intern. Conference on High Energy Phys. Dubna, 1964.
2. R.E.Behrends, I.Dreitlein, C.Fronsdal and B.W.Lee. Rev. Mod. Phys., 34, 1 (1962).
3. I.I. de Swart. Rev. Mod Phys., 35, 916 (1964). Имеется русский перевод: УФН, 84, 651 (1964).
4. Я.А.Смородинский. Унитарная симметрия элементарных частиц. Препринт ОИЯИ, Р-1736, Дубна, 1964.
5. В.И.Огиевецкий. Техника SU(3) -группы. XII Международная зимняя школа по физике высоких энергий. Дубна, 1964.

---

x) См. перевод в сб. "Элементарные частицы и компенсирующие поля". "Мир", Москва, 1964.

6. Y.Ne'eman. The Symmetry Approach to Particle Physics. Preprint, Israel IA-854, 1963.
7. M.Gourdin. Some Topics Related to Unitary Symmetry. Engebnisse der exakten Naturwissenschaften, 36, Band, Springer Verlag, 1964.

D. Коэффициенты Клебша-Гордана и тензорные операторы

1. P.Mc Namee, S.J., and F.Chalton. Tables to the Clebsh-Gordon Coefficients of SU(3). Preprint, Stanford University, 1964.
2. D.Lurie, A.Macfarlane. Journ. Math. Phys., 5, 565 (1964).
3. A.Macfarlane, N.Mukunda, E.C.G.Sudarshan. Journ. Math. Phys., 5, 576 (1964).
4. N.Mukunda, L.K.Pandit. Tensor Methods and a Unified Representation Theory of SU(3). Preprint Rochester, UR-875-38, 1964.
5. I.Ginibre. Journ. Phys. Math., 4, 720 (1963).
6. B.Diu. Nuovo Cim., 28, 466 (1963).
7. C.Eckart. Rev. Mod. Phys., 2, 305 (1930).
8. A.H.Rosenfeld et al. Rev. Mod. Phys., 36, 977 (1964).

Рукопись поступила в издательский отдел
17 апреля 1965 г.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Таблица умножения представлений SU(3) до 27 × 27

8	10	10*	27	
1 + 8 + 8 + 10 + 10* + 27	8 + 10 + 27 + 35	8 + 10* + 27 + 35	8 + 10 + 10* 27 + 27 35 + 35* + 64	8
	10* + 27 + 28 + 35	1 + 8 + 27 + 64	8 + 10 + 10* + 27+ 35 + 35* + 64 + 81	10
		10+ 27 + 28*+ 35*	8+ 10+ 10*+ 27+ 35+ 35*+ 64 + 81*	10*
			1 + 8 + 8 + 10 + 10* + 27 + 27 + 27 + 28 + 28* + 35 + 35 + 35* + 35* + 64 + 64 + 81 + 81 + 125	27

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Таблица коэффициентов Клебша-Гордана группы SU(3) для 8⊗8 и 8⊗27

8 ⊗ 8		27 2 1 1
1 ½ ½	1 ½ ½	1

8 ⊗ 8		27 2 1 0	$\overline{10}$ 2 0 0
1 ½ ½	1 ½ -½	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$
1 ½ -½	1 ½ ½	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$

8 ⊗ 8		27 2 1 -1
1 ½ -½	1 ½ -½	1

8 ⊗ 8		27 1 3/2 3/2	10 1 3/2 3/2
1 ½ ½	0 1 1	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$
0 1 1	1 ½ ½	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$

		27 1 3/2 ½	10 1 3/2 ½	27 1 ½ ½	$\overline{10}$ 1 ½ ½	8 1 ½ ½	8' 1 ½ ½
1 ½ ½	0 1 0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{60}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	$\sqrt{\frac{3}{20}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$
1 ½ ½	0 0 0	0	0	$\sqrt{\frac{9}{20}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{20}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$
1 ½ -½	0 1 1	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{30}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$
0 1 1	1 ½ -½	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{30}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$
0 1 0	1 ½ ½	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{60}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$\sqrt{\frac{3}{20}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$
0 0 0	1 ½ ½	0	0	$\sqrt{\frac{9}{20}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{20}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$

		27 1 3/2 -½	10 1 3/2 -½	27 1 ½ -½	$\overline{10}$ 1 ½ -½	8 1 ½ -½	8' 1 ½ -½
1 ½ ½	0 1 -1	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{30}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$
1 ½ -½	0 1 0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{60}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\sqrt{\frac{3}{20}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$
1 ½ -½	0 0 0	0	0	$\sqrt{\frac{9}{20}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{20}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$
0 1 0	1 ½ -½	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{60}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\sqrt{\frac{3}{20}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$
0 1 -1	1 ½ ½	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{30}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$
0 0 0	1 ½ -½	0	0	$\sqrt{\frac{9}{20}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{20}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$

		27 1 3/2 -3/2	10 1 3/2 -3/2
1 ½ -½	0 1 -1	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$
0 1 -1	1 ½ -½	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$

$8 \otimes 8$		27 $0\ 2\ 2$
$0\ 1\ 1$	$0\ 1\ 1$	1

$8 \otimes 8$		27 $0\ 2\ 1$	27 $0\ 1\ 1$	10 $0\ 1\ 1$	$\overline{10}$ $0\ 1\ 1$	8 $0\ 1\ 1$	$8'$ $0\ 1\ 1$
$1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	0	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$
$0\ 1\ 1$	$0\ 1\ 0$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
$0\ 1\ 1$	$0\ 0\ 0$	0	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	0
$0\ 1\ 0$	$0\ 1\ 1$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$
$0\ 0\ 0$	$0\ 1\ 1$	0	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	0
$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	0	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$

$8 \otimes 8$		27 $0\ 2\ 0$	27 $0\ 1\ 0$	10 $0\ 1\ 0$	$\overline{10}$ $0\ 1\ 0$	8 $0\ 1\ 0$	$8'$ $0\ 1\ 0$	27 $0\ 0\ 0$	8 $0\ 0\ 0$	$8'$ $0\ 0\ 0$	1 $0\ 0\ 0$
$1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	0	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\sqrt{\frac{3}{20}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$\sqrt{\frac{3}{40}}$	$\sqrt{\frac{1}{20}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{8}}$
$1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	0	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\sqrt{\frac{3}{20}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\sqrt{\frac{3}{40}}$	$-\sqrt{\frac{1}{20}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{8}}$
$0\ 1\ 1$	$0\ 1\ -1$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{120}}$	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{8}}$
$0\ 1\ 0$	$0\ 1\ 0$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{1}{120}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{8}}$
$0\ 1\ 0$	$0\ 0\ 0$	0	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	0	0	0	0	0
$0\ 1\ -1$	$0\ 1\ 1$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{120}}$	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{8}}$
$0\ 0\ 0$	$0\ 1\ 0$	0	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	0	0	0	0	0
$0\ 0\ 0$	$0\ 0\ 0$	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{27}{40}}$	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{8}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	0	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\sqrt{\frac{3}{20}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\sqrt{\frac{3}{40}}$	$-\sqrt{\frac{1}{20}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{8}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	0	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\sqrt{\frac{3}{20}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	$\sqrt{\frac{3}{40}}$	$\sqrt{\frac{1}{20}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{8}}$

$8 \otimes 8$		27 $0\ 2\ -1$	27 $0\ 1\ -1$	10 $0\ 1\ -1$	$\overline{10}$ $0\ 1\ -1$	8 $0\ 1\ -1$	$8'$ $0\ 1\ -1$
$1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	0	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$
$0\ 1\ 0$	$0\ 1\ -1$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
$0\ 1\ -1$	$0\ 1\ 0$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$
$0\ 1\ -1$	$0\ 0\ 0$	0	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	0
$0\ 0\ 0$	$0\ 1\ -1$	0	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	0
$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	0	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$

$8 \otimes 8$		27 $0\ 2\ -2$
$0\ 1\ -1$	$0\ 1\ -1$	1

$8 \otimes 8$		27 $-1\ \frac{3}{2}\ \frac{3}{2}$	$\overline{10}$ $-1\ \frac{3}{2}\ \frac{3}{2}$
$0\ 1\ 1$	$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$0\ 1\ 1$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$

$8 \otimes 8$		27 $-1\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}$	$\overline{10}$ $-1\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}$	27 $-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	10 $-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	8 $-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$8'$ $-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$
$0\ 1\ 1$	$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{30}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$
$0\ 1\ 0$	$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{60}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\sqrt{\frac{3}{20}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$
$0\ 0\ 0$	$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	0	0	$\sqrt{\frac{9}{20}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{20}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$0\ 1\ 0$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{60}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\sqrt{\frac{3}{20}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$0\ 0\ 0$	0	0	$\sqrt{\frac{9}{20}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{20}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$0\ 1\ 1$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{30}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$

$8 \otimes 8$		27 $-1\ \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}$	$\overline{10}$ $-1\ \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}$	27 $-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	10 $-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	8 $-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$8'$ $-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$
$0\ 1\ 0$	$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{60}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$\sqrt{\frac{3}{20}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$
$0\ 1\ -1$	$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{30}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$
$0\ 0\ 0$	$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	0	0	$\sqrt{\frac{9}{20}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{20}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$0\ 1\ -1$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{30}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$0\ 1\ 0$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{60}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	$\sqrt{\frac{3}{20}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$0\ 0\ 0$	0	0	$\sqrt{\frac{9}{20}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{20}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$

$8 \otimes 8$		27 $-1\ \frac{3}{2}\ -\frac{3}{2}$	$\overline{10}$ $-1\ \frac{3}{2}\ -\frac{3}{2}$
$0\ 1\ -1$	$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$0\ 1\ -1$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$

$8 \otimes 8$		27 $-2\ 1\ 1$
$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	1

$8 \otimes 8$		27 $-2\ 1\ 0$	10 $-2\ 0\ 0$
$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$

$8 \otimes 8$		27 $-2\ 1\ -1$
$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	1

$8 \otimes 27$

	$\underline{64}$	$\underline{35}$
	2	2
	2	2
	2	2
$1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\quad 1\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{3}{2}$	$\sqrt{2/3}$	$-\sqrt{1/3}$
$0\ 1\ 1\quad 2\ 1\ 1$	$\sqrt{1/3}$	$\sqrt{2/3}$

	$\underline{64}$	$\underline{35}$	$\underline{64}$	$\overline{35}$	$\underline{27}$	$\underline{27}'$
	2	2	2	2	2	2
	2	2	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1
$1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\quad 1\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}$	$\sqrt{1/2}$	$-\sqrt{1/4}$	$\sqrt{1/126}$	$-\sqrt{1/9}$	$\sqrt{5/56}$	$\sqrt{1/24}$
$1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\quad 1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}$	0	0	$\sqrt{40/63}$	$\sqrt{5/36}$	$-\sqrt{1/56}$	$\sqrt{5/24}$
$1\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\quad 1\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{3}{2}$	$\sqrt{1/6}$	$-\sqrt{1/12}$	$-\sqrt{1/42}$	$\sqrt{1/3}$	$-\sqrt{15/56}$	$-\sqrt{1/8}$
$0\ 1\ 1\quad 2\ 1\ 0$	$\sqrt{1/6}$	$\sqrt{1/3}$	$-\sqrt{1/42}$	$-\sqrt{1/12}$	$-\sqrt{15/56}$	$\sqrt{1/8}$
$0\ 1\ 0\quad 2\ 1\ 1$	$\sqrt{1/6}$	$\sqrt{1/3}$	$\sqrt{1/42}$	$\sqrt{1/12}$	$\sqrt{15/56}$	$-\sqrt{1/8}$
$0\ 0\ 0\quad 2\ 1\ 1$	0	0	$\sqrt{2/7}$	$-\sqrt{1/4}$	$-\sqrt{5/56}$	$-\sqrt{3/8}$

	$\underline{64}$	$\underline{35}$	$\underline{64}$	$\overline{35}$	$\underline{27}$	$\underline{27}'$	$\overline{35}$	$\overline{10}$
	2	2	2	2	2	2	2	2
	2	2	1	1	1	1	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0
$1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\quad 1\ \tfrac{3}{2}\ -\tfrac{1}{2}$	$\sqrt{1/3}$	$-\sqrt{1/6}$	$\sqrt{1/63}$	$-\sqrt{2/9}$	$\sqrt{5/28}$	$\sqrt{1/12}$	0	0
$1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\quad 1\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}$	0	0	$\sqrt{20/63}$	$\sqrt{5/72}$	$-\sqrt{1/112}$	$\sqrt{5/48}$	$-\sqrt{5/12}$	$-\sqrt{1/12}$
$1\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\quad 1\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}$	$\sqrt{1/3}$	$-\sqrt{1/6}$	$-\sqrt{1/63}$	$\sqrt{2/9}$	$-\sqrt{5/28}$	$-\sqrt{1/12}$	0	0
$1\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\quad 1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}$	0	0	$\sqrt{20/63}$	$\sqrt{5/72}$	$-\sqrt{1/112}$	$\sqrt{5/48}$	$\sqrt{5/12}$	$\sqrt{1/12}$
$0\ 1\ 1\quad 2\ 1\ -1$	$\sqrt{1/18}$	$\sqrt{1/9}$	$-\sqrt{1/42}$	$-\sqrt{1/12}$	$-\sqrt{15/56}$	$\sqrt{1/8}$	$\sqrt{1/18}$	$-\sqrt{5/18}$
$0\ 1\ 0\quad 2\ 1\ 0$	$\sqrt{2/9}$	$\sqrt{4/9}$	0	0	0	0	$-\sqrt{1/18}$	$\sqrt{5/18}$
$0\ 1\ -1\quad 2\ 1\ 1$	$\sqrt{1/18}$	$\sqrt{1/9}$	$\sqrt{1/42}$	$\sqrt{1/12}$	$\sqrt{15/56}$	$-\sqrt{1/8}$	$\sqrt{1/18}$	$-\sqrt{5/18}$
$0\ 0\ 0\quad 2\ 1\ 0$	0	0	$\sqrt{2/7}$	$-\sqrt{1/4}$	$-\sqrt{5/56}$	$-\sqrt{3/8}$	0	0

	$\underline{64}$	$\underline{35}$	$\underline{64}$	$\overline{35}$	$\underline{27}$	$\underline{27}'$
	2	2	2	2	2	2
	2	2	1	1	1	1
	-1	-1	-1	-1	-1	-1
$1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\quad 1\ \tfrac{3}{2}\ -\tfrac{3}{2}$	$\sqrt{1/6}$	$-\sqrt{1/12}$	$\sqrt{1/42}$	$-\sqrt{1/3}$	$\sqrt{15/56}$	$\sqrt{1/8}$
$1\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\quad 1\ \tfrac{3}{2}\ -\tfrac{1}{2}$	$\sqrt{1/2}$	$-\sqrt{1/4}$	$-\sqrt{1/126}$	$\sqrt{1/9}$	$-\sqrt{5/56}$	$-\sqrt{1/24}$
$1\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\quad 1\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}$	0	0	$\sqrt{40/63}$	$\sqrt{5/36}$	$-\sqrt{1/56}$	$\sqrt{5/24}$
$0\ 1\ 0\quad 2\ 1\ -1$	$\sqrt{1/6}$	$\sqrt{1/3}$	$-\sqrt{1/42}$	$-\sqrt{1/12}$	$-\sqrt{15/56}$	$\sqrt{1/8}$
$0\ 1\ -1\quad 2\ 1\ 0$	$\sqrt{1/6}$	$\sqrt{1/3}$	$\sqrt{1/42}$	$\sqrt{1/12}$	$\sqrt{15/56}$	$-\sqrt{1/8}$
$0\ 0\ 0\quad 2\ 1\ -1$	0	0	$\sqrt{2/7}$	$-\sqrt{1/4}$	$-\sqrt{5/56}$	$-\sqrt{3/8}$

	$\underline{64}$	$\underline{35}$
	2	2
	2	2
	-2	-2
$1\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\quad 1\ \tfrac{3}{2}\ -\tfrac{3}{2}$	$\sqrt{2/3}$	$-\sqrt{1/3}$
$0\ 1\ -1\quad 2\ 1\ -1$	$\sqrt{1/3}$	$\sqrt{2/3}$

$8 \otimes 27$

	$\underline{64}$
	3
	$\tfrac{3}{2}$
	$\tfrac{3}{2}$
$1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\quad 2\ 1\ 1$	1

	$\underline{64}$	$\overline{35}$
	3	3
	$\tfrac{3}{2}$	$\tfrac{1}{2}$
	$\tfrac{1}{2}$	$\tfrac{1}{2}$
$1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\quad 2\ 1\ 0$	$\sqrt{2/3}$	$-\sqrt{1/3}$
$1\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\quad 2\ 1\ 1$	$\sqrt{1/3}$	$\sqrt{2/3}$

	$\underline{64}$	$\overline{35}$
	3	3
	$\tfrac{3}{2}$	$\tfrac{1}{2}$
	$-\tfrac{1}{2}$	$-\tfrac{1}{2}$
$1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\quad 2\ 1\ -1$	$\sqrt{1/3}$	$-\sqrt{2/3}$
$1\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\quad 2\ 1\ 0$	$\sqrt{2/3}$	$\sqrt{1/3}$

	$\underline{64}$
	3
	$\tfrac{3}{2}$
	$-\tfrac{3}{2}$
$1\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\quad 2\ 1\ -1$	1

$8 \otimes 27$

	$\underline{64}$	$\underline{27}$
	1	1
	$\tfrac{5}{2}$	$\tfrac{5}{2}$
	$\tfrac{5}{2}$	$\tfrac{5}{2}$
$1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\quad 0\ 2\ 2$	$\sqrt{1/3}$	$-\sqrt{2/3}$
$0\ 1\ 1\quad 1\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{3}{2}$	$\sqrt{2/3}$	$\sqrt{1/3}$

	$\underline{64}$	$\underline{35}$	$\underline{64}$	$\underline{35}$	$\overline{35}$	$\underline{27}$	$\underline{27}'$	$\underline{10}$
	1	1	1	1	1	1	1	1
	$\tfrac{5}{2}$	$\tfrac{5}{2}$	$\tfrac{3}{2}$	$\tfrac{3}{2}$	$\tfrac{3}{2}$	$\tfrac{3}{2}$	$\tfrac{3}{2}$	$\tfrac{3}{2}$
	$\tfrac{3}{2}$	$\tfrac{3}{2}$	$\tfrac{3}{2}$	$\tfrac{3}{2}$	$\tfrac{3}{2}$	$\tfrac{3}{2}$	$\tfrac{3}{2}$	$\tfrac{3}{2}$
$1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\quad 0\ 2\ 1$	$\sqrt{4/15}$	$-\sqrt{8/15}$	$\sqrt{1/315}$	$-\sqrt{1/720}$	$-\sqrt{1/36}$	$\sqrt{125/224}$	$\sqrt{1/32}$	$-\sqrt{5/72}$
$1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\quad 0\ 1\ 1$	0	0	$\sqrt{25/63}$	$-\sqrt{25/144}$	$\sqrt{5/36}$	$-\sqrt{27/224}$	$\sqrt{5/32}$	$-\sqrt{1/72}$
$1\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\quad 0\ 2\ 2$	$\sqrt{1/15}$	$-\sqrt{2/15}$	$-\sqrt{4/315}$	$\sqrt{1/180}$	$\sqrt{1/9}$	$-\sqrt{15/56}$	$-\sqrt{1/8}$	$\sqrt{5/18}$
$0\ 1\ 1\quad 1\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}$	$\sqrt{2/5}$	$\sqrt{1/5}$	$-\sqrt{2/945}$	$\sqrt{49/1080}$	$-\sqrt{2/27}$	$-\sqrt{5/112}$	$\sqrt{3/16}$	$\sqrt{5/108}$
$0\ 1\ 1\quad 1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}$	0	0	$\sqrt{50/189}$	$\sqrt{25/54}$	$\sqrt{5/54}$	$\sqrt{1/7}$	0	$\sqrt{2/27}$
$0\ 1\ 0\quad 1\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{3}{2}$	$\sqrt{4/15}$	$\sqrt{2/15}$	$\sqrt{1/315}$	$-\sqrt{49/720}$	$\sqrt{1/9}$	$\sqrt{15/224}$	$-\sqrt{9/32}$	$-\sqrt{5/72}$
$0\ 0\ 0\quad 1\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{3}{2}$	0	0	$\sqrt{5/21}$	$-\sqrt{5/48}$	$-\sqrt{1/3}$	$\sqrt{5/224}$	$-\sqrt{3/32}$	$\sqrt{5/24}$
$-1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\quad 2\ 1\ 1$	0	0	$\sqrt{5/63}$	$\sqrt{5/36}$	$-\sqrt{1/9}$	$-\sqrt{15/56}$	$-\sqrt{1/8}$	$-\sqrt{5/18}$

	$\underline{64}$	$\underline{35}$	$\underline{64}$	$\underline{35}$	$\overline{35}$	$\underline{27}$	$\underline{27}'$	$\underline{10}$	$\underline{64}$	$\overline{35}$	$\underline{27}$	$\underline{27}'$	$\overline{10}$	$\underline{8}$
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	$\tfrac{5}{2}$	$\tfrac{5}{2}$	$\tfrac{3}{2}$	$\tfrac{3}{2}$	$\tfrac{3}{2}$	$\tfrac{3}{2}$	$\tfrac{3}{2}$	$\tfrac{3}{2}$	$\tfrac{1}{2}$	$\tfrac{1}{2}$	$\tfrac{1}{2}$	$\tfrac{1}{2}$	$\tfrac{1}{2}$	$\tfrac{1}{2}$
	$\tfrac{1}{2}$	$\tfrac{1}{2}$	$\tfrac{1}{2}$	$\tfrac{1}{2}$	$\tfrac{1}{2}$	$\tfrac{1}{2}$	$\tfrac{1}{2}$	$\tfrac{1}{2}$	$\tfrac{1}{2}$	$\tfrac{1}{2}$	$\tfrac{1}{2}$	$\tfrac{1}{2}$	$\tfrac{1}{2}$	$\tfrac{1}{2}$
$1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\quad 0\ 2\ 0$	$\sqrt{1/3}$	$-\sqrt{2/3}$	$\sqrt{2/315}$	$-\sqrt{1/360}$	$-\sqrt{1/18}$	$\sqrt{15/112}$	$\sqrt{1/16}$	$-\sqrt{5/36}$	0	0	0	0	0	0
$1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\quad 0\ 1\ 0$	0	0	$\sqrt{50/189}$	$-\sqrt{25/216}$	$\sqrt{2/54}$	$-\sqrt{9/112}$	$\sqrt{3/48}$	$-\sqrt{1/128}$	$\sqrt{2/189}$	$-\sqrt{5/36}$	$\sqrt{9/140}$	$\sqrt{1/12}$	$-\sqrt{1/27}$	$\sqrt{4/135}$
$1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\quad 0\ 0\ 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{50/63}$	$\sqrt{5/18}$	$-\sqrt{1/180}$	$\sqrt{1/4}$	$\sqrt{1/9}$	$\sqrt{1/45}$
$1\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\quad 0\ 2\ 1$	$\sqrt{2/15}$	$-\sqrt{4/15}$	$-\sqrt{1/165}$	$\sqrt{1/240}$	$\sqrt{1/12}$	$-\sqrt{45/224}$	$-\sqrt{3/32}$	$\sqrt{5/24}$	0	0	0	0	0	0
$1\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\quad 0\ 1\ 1$	0	0	$\sqrt{25/189}$	$-\sqrt{25/432}$	$\sqrt{2/108}$	$-\sqrt{9/224}$	$\sqrt{5/96}$	$-\sqrt{1/216}$	$-\sqrt{16/189}$	$\sqrt{2/27}$	$-\sqrt{9/70}$	$-\sqrt{1/6}$	$\sqrt{8/27}$	$-\sqrt{8/135}$
$0\ 1\ 1\quad 1\ \tfrac{3}{2}\ -\tfrac{1}{2}$	$\sqrt{8/15}$	$\sqrt{1/30}$	$-\sqrt{8/2835}$	$\sqrt{49/1080}$	$-\sqrt{3/81}$	$-\sqrt{2/64}$	$\sqrt{1/4}$	$\sqrt{3/81}$	$-\sqrt{1/567}$	$\sqrt{1/162}$	$-\sqrt{1/21}$	0	$-\sqrt{5/81}$	$\sqrt{4/81}$
$0\ 1\ 1\quad 1\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}$	0	0	$\sqrt{50/567}$	[illegible]	$\sqrt{5/162}$	$\sqrt{1/81}$	0	$\sqrt{1/81}$	$-\sqrt{80/567}$	$-\sqrt{125/648}$	$-\sqrt{361/1680}$	$\sqrt{1/15}$	$\sqrt{49/324}$	$\sqrt{4/405}$
$0\ 1\ 0\quad 1\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}$	$\sqrt{2/5}$	$\sqrt{1/5}$	$\sqrt{1/2835}$	$-\sqrt{49/6480}$	$\sqrt{1/81}$	[illegible]	$-\sqrt{1/32}$	[illegible]	$\sqrt{2/567}$	$-\sqrt{1/81}$	$\sqrt{2/21}$	0	$\sqrt{10/81}$	$-\sqrt{8/81}$
$0\ 1\ 0\quad 1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}$	0	0	$\sqrt{100/567}$	$\sqrt{64/81}$	$\sqrt{5/81}$	$\sqrt{2/21}$	0	$\sqrt{2/81}$	$\sqrt{10/567}$	$\sqrt{125/1296}$	$\sqrt{361/1260}$	$-\sqrt{1/32}$	$-\sqrt{49/648}$	$-\sqrt{2/405}$
$0\ 1\ -1\quad 1\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{3}{2}$	$\sqrt{1/15}$	$\sqrt{1/30}$	$\sqrt{2/945}$	$-\sqrt{49/1080}$	$\sqrt{2/27}$	$\sqrt{5/112}$	$-\sqrt{1/16}$	$-\sqrt{5/108}$	$-\sqrt{1/189}$	$\sqrt{1/54}$	$-\sqrt{1/7}$	0	$-\sqrt{1/27}$	$\sqrt{4/27}$
$0\ 0\ 0\quad 1\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}$	0	0	$\sqrt{5/21}$	$-\sqrt{5/48}$	$-\sqrt{1/3}$	$\sqrt{3/224}$	$-\sqrt{3/32}$	$\sqrt{5/24}$	0	0	0	0	0	0
$0\ 0\ 0\quad 1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{10/21}$	$-\sqrt{5/48}$	$-\sqrt{169/1120}$	$-\sqrt{3/32}$	$-\sqrt{1/24}$	$-\sqrt{2/15}$
$-1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\quad 2\ 1\ 0$	0	0	$\sqrt{10/189}$	$\sqrt{5/54}$	$-\sqrt{2/27}$	$-\sqrt{3/28}$	$-\sqrt{1/12}$	$-\sqrt{5/27}$	$-\sqrt{4/189}$	$\sqrt{1/216}$	$-\sqrt{1/112}$	$\sqrt{3/48}$	$-\sqrt{5/108}$	$-\sqrt{4/27}$
$-1\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\quad 2\ 1\ 1$	0	0	$\sqrt{5/189}$	$\sqrt{5/108}$	$-\sqrt{1/27}$	$-\sqrt{5/56}$	$-\sqrt{1/24}$	$-\sqrt{5/54}$	$\sqrt{8/189}$	$-\sqrt{1/108}$	$\sqrt{1/56}$	$-\sqrt{3/24}$	$\sqrt{2/54}$	$\sqrt{8/27}$

$\underset{\sim}{8}\otimes\underset{\sim}{27}$	64 1 3/2 -1/2	35 1 3/2 -1/2	64 1 1/2 -1/2	35 1 1/2 -1/2	$\overline{35}$ 1 1/2 -1/2	27 1 1/2 -1/2	27' 1 1/2 -1/2	10 1 1/2 -1/2	64 1 1/2 -1/2	$\overline{35}$ 1 1/2 -1/2	27 1 1/2 -1/2	27' 1 1/2 -1/2	$\overline{10}$ 1 1/2 -1/2	8 1 1/2 -1/2
1 ½ ½ · 0 2 -1	$\sqrt{2/15}$	$-\sqrt{4/15}$	$\sqrt{1/105}$	$-\sqrt{1/240}$	$-\sqrt{1/12}$	$\sqrt{45/224}$	$\sqrt{1/32}$	$-\sqrt{3/28}$	0	0	0	0	0	0
1 ½ ½ · 0 1 -1	0	0	$\sqrt{25/189}$	$-\sqrt{25/432}$	$\sqrt{5/108}$	$-\sqrt{9/224}$	$\sqrt{3/56}$	$-\sqrt{1/216}$	$\sqrt{10/189}$	$-\sqrt{5/27}$	$\sqrt{9/70}$	$\sqrt{1/6}$	$-\sqrt{2/27}$	$\sqrt{8/135}$
1 ½ -½ · 0 2 0	$\sqrt{1/3}$	$-\sqrt{2/15}$	$-\sqrt{2/105}$	$\sqrt{1/160}$	$\sqrt{1/18}$	$-\sqrt{45/112}$	$-\sqrt{1/16}$	$\sqrt{3/56}$	0	0	0	0	0	0
1 ½ -½ · 0 1 0	0	0	$\sqrt{50/189}$	$-\sqrt{25/216}$	$\sqrt{5/54}$	$-\sqrt{9/112}$	$\sqrt{5/48}$	$-\sqrt{1/108}$	$-\sqrt{5/189}$	$\sqrt{5/36}$	$-\sqrt{9/140}$	$-\sqrt{1/12}$	$\sqrt{1/27}$	$-\sqrt{4/135}$
1 ½ -½ · 0 0 0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{10/63}$	$\sqrt{1/18}$	$-\sqrt{1/140}$	$\sqrt{1/8}$	$\sqrt{1/9}$	$\sqrt{1/45}$
0 1 1 · 1 3/2 -1/2	$\sqrt{1/15}$	$\sqrt{1/30}$	$-\sqrt{2/945}$	$\sqrt{49/1080}$	$-\sqrt{2/27}$	$-\sqrt{5/112}$	$\sqrt{1/16}$	$\sqrt{5/108}$	$-\sqrt{1/189}$	$\sqrt{1/36}$	$-\sqrt{1/4}$	0	$-\sqrt{2/27}$	$\sqrt{1/27}$
0 1 0 · 1 3/2 -1/2	$\sqrt{2/5}$	$\sqrt{1/5}$	$-\sqrt{1/2835}$	$\sqrt{49/6480}$	$-\sqrt{1/81}$	$-\sqrt{5/672}$	$\sqrt{1/32}$	$\sqrt{5/648}$	$\sqrt{2/567}$	$-\sqrt{1/81}$	$\sqrt{2/21}$	0	$\sqrt{10/81}$	$-\sqrt{8/81}$
0 1 0 · 1 ½ -½	0	0	$\sqrt{100/567}$	$\sqrt{25/81}$	$\sqrt{3/81}$	$\sqrt{2/21}$	0	$\sqrt{2/81}$	$-\sqrt{10/567}$	$-\sqrt{125/1296}$	$-\sqrt{361/11340}$	$\sqrt{1/12}$	$\sqrt{49/648}$	$\sqrt{2/405}$
0 1 -1 · 1 3/2 ½	$\sqrt{1/5}$	$\sqrt{1/10}$	$\sqrt{8/2835}$	$-\sqrt{49/810}$	$\sqrt{8/81}$	$\sqrt{2/63}$	$-\sqrt{1/6}$	$-\sqrt{2/81}$	$-\sqrt{1/567}$	$\sqrt{1/162}$	$-\sqrt{1/21}$	0	$-\sqrt{2/81}$	$\sqrt{1/81}$
0 1 -1 · 1 ½ ½	0	0	$\sqrt{50/567}$	$\sqrt{25/108}$	$\sqrt{5/112}$	$\sqrt{1/21}$	0	$\sqrt{1/81}$	$\sqrt{20/567}$	$\sqrt{125/648}$	$\sqrt{361/11340}$	$-\sqrt{1/15}$	$-\sqrt{49/324}$	$-\sqrt{4/405}$
0 0 0 · 1 3/2 -1/2	0	0	$\sqrt{1/21}$	$-\sqrt{3/48}$	$-\sqrt{1/3}$	$\sqrt{5/224}$	$-\sqrt{3/32}$	$\sqrt{3/24}$	0	0	0	0	0	0
0 0 0 · 1 ½ -½	0	0	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{20/21}$	$-\sqrt{5/48}$	$-\sqrt{169/1125}$	$-\sqrt{1/32}$	$-\sqrt{1/24}$	$-\sqrt{2/15}$
-1 ½ ½ · 0 1 -1	0	0	$\sqrt{2/189}$	$\sqrt{1/108}$	$-\sqrt{1/27}$	$-\sqrt{3/56}$	$-\sqrt{1/24}$	$-\sqrt{3/56}$	$-\sqrt{8/189}$	$\sqrt{1/108}$	$-\sqrt{1/56}$	$\sqrt{5/24}$	$-\sqrt{5/54}$	$-\sqrt{8/27}$
-1 ½ -½ · 0 1 0	0	0	$\sqrt{16/189}$	$\sqrt{4/35}$	$-\sqrt{2/27}$	$-\sqrt{9/28}$	$-\sqrt{1/12}$	$-\sqrt{2/27}$	$\sqrt{4/189}$	$-\sqrt{2/216}$	$\sqrt{1/112}$	$-\sqrt{5/48}$	$\sqrt{5/108}$	$\sqrt{1/27}$

	64 1 3/2 -3/2	35 1 3/2 -3/2	64 1 1/2 -3/2	35 1 1/2 -3/2	$\overline{35}$ 1 1/2 -3/2	27 1 1/2 -3/2	27' 1 1/2 -3/2	10 1 1/2 -3/2
1 ½ ½ · 0 2 -2	$\sqrt{1/15}$	$-\sqrt{2/15}$	$\sqrt{4/105}$	$-\sqrt{1/150}$	$-\sqrt{1/9}$	$\sqrt{12/56}$	$\sqrt{1/8}$	$-\sqrt{1/18}$
1 ½ -½ · 0 2 -1	$\sqrt{4/15}$	$-\sqrt{8/15}$	$-\sqrt{2/105}$	$\sqrt{1/720}$	$\sqrt{1/36}$	$-\sqrt{15/224}$	$-\sqrt{1/32}$	$\sqrt{1/72}$
1 ½ -½ · 0 1 -1	0	0	$\sqrt{25/63}$	$-\sqrt{25/144}$	$\sqrt{1/18}$	$-\sqrt{27/224}$	$\sqrt{1/32}$	$-\sqrt{1/18}$
0 1 0 · 1 3/2 -3/2	$\sqrt{4/15}$	$\sqrt{2/15}$	$-\sqrt{1/105}$	$\sqrt{49/720}$	$-\sqrt{1/9}$	$-\sqrt{15/224}$	$\sqrt{3/32}$	$\sqrt{1/72}$
0 1 -1 · 1 3/2 -1/2	$\sqrt{2/5}$	$\sqrt{1/5}$	$\sqrt{2/945}$	$-\sqrt{49/1080}$	$\sqrt{2/27}$	$\sqrt{5/112}$	$-\sqrt{1/16}$	$-\sqrt{5/108}$
0 1 -1 · 1 ½ -½	0	0	$\sqrt{50/189}$	$\sqrt{25/54}$	$\sqrt{5/54}$	$\sqrt{1/9}$	0	$\sqrt{1/27}$
0 0 0 · 1 3/2 -3/2	0	0	$\sqrt{1/21}$	$-\sqrt{3/48}$	$-\sqrt{1/3}$	$\sqrt{5/224}$	$-\sqrt{3/32}$	$\sqrt{3/24}$
-1 ½ -½ · 0 1 -1	0	0	$\sqrt{5/63}$	$\sqrt{1/36}$	$-\sqrt{1/9}$	$-\sqrt{12/56}$	$-\sqrt{1/8}$	$-\sqrt{1/18}$

	64 1 3/2 -3/2	35 1 3/2 -3/2
1 ½ -½ · 0 2 -2	$\sqrt{1/3}$	$-\sqrt{2/3}$
0 1 -1 · 1 3/2 -3/2	$\sqrt{2/3}$	$\sqrt{1/3}$

$\underset{\sim}{8}\otimes\underset{\sim}{27}$	64 0 3 3
0 1 1 · 0 2 2	1

	64 0 3 2	64 0 2 2	35 0 2 2	$\overline{35}$ 0 2 2	27 0 2 2	27' 0 2 2
1 ½ ½ · -1 3/2 3/2	0	$\sqrt{4/21}$	$-\sqrt{1/3}$	$\sqrt{1/12}$	$-\sqrt{12/56}$	$\sqrt{1/8}$
0 1 1 · 0 2 1	$\sqrt{2/3}$	0	$\sqrt{1/24}$	$-\sqrt{1/24}$	0	$\sqrt{1/4}$
0 1 1 · 0 1 1	0	$\sqrt{10/21}$	$\sqrt{5/24}$	$\sqrt{5/24}$	$\sqrt{3/28}$	0
0 1 0 · 0 2 2	$\sqrt{1/3}$	0	$-\sqrt{1/12}$	$\sqrt{1/12}$	0	$-\sqrt{1/2}$
0 0 0 · 0 2 2	0	$\sqrt{1/7}$	$-\sqrt{1/4}$	$-\sqrt{1/4}$	$\sqrt{5/14}$	0
-1 ½ ½ · 1 3/2 3/2	0	$\sqrt{4/21}$	$\sqrt{1/12}$	$-\sqrt{1/3}$	$-\sqrt{15/56}$	$-\sqrt{1/8}$

	64 0 3 1	64 0 2 1	35 0 2 1	$\overline{35}$ 0 2 1	27 0 2 1	27' 0 2 1	64 0 1 1	35 0 1 1	$\overline{35}$ 0 1 1	27 0 1 1	27' 0 1 1	10 0 1 1	$\overline{10}$ 0 1 1	8 0 1 1
1 ½ ½ · -1 3/2 ½	0	$\sqrt{1/7}$	$-\sqrt{1/4}$	$\sqrt{1/16}$	$-\sqrt{45/224}$	$\sqrt{3/32}$	$\sqrt{5/567}$	$-\sqrt{1/324}$	$-\sqrt{25/1296}$	$\sqrt{9/224}$	$\sqrt{5/96}$	$-\sqrt{5/81}$	$-\sqrt{5/324}$	$\sqrt{4/81}$
1 ½ ½ · -1 ½ ½	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{100/567}$	$-\sqrt{5/81}$	$\sqrt{20/81}$	$-\sqrt{9/70}$	$\sqrt{1/6}$	$-\sqrt{1/81}$	$\sqrt{16/81}$	$\sqrt{4/405}$
1 ½ -½ · -1 3/2 3/2	0	$\sqrt{1/21}$	$-\sqrt{1/12}$	$\sqrt{1/48}$	$-\sqrt{15/224}$	$\sqrt{1/32}$	$-\sqrt{5/189}$	$\sqrt{1/108}$	$\sqrt{25/432}$	$-\sqrt{27/224}$	$-\sqrt{3/32}$	$\sqrt{5/27}$	$\sqrt{5/108}$	$-\sqrt{4/27}$
0 1 1 · 0 2 0	$\sqrt{2/5}$	0	$\sqrt{1/16}$	$-\sqrt{1/16}$	0	$\sqrt{3/8}$	$-\sqrt{1/2835}$	$\sqrt{1/1296}$	$\sqrt{1/1296}$	$-\sqrt{1/56}$	0	$\sqrt{5/324}$	$-\sqrt{5/324}$	$\sqrt{4/81}$
0 1 1 · 0 1 0	0	$\sqrt{5/21}$	$\sqrt{5/48}$	$\sqrt{5/48}$	$\sqrt{3/56}$	0	0	$\sqrt{5/48}$	$-\sqrt{5/48}$	0	$\sqrt{1/8}$	$\sqrt{1/12}$	$\sqrt{1/12}$	0
0 1 1 · 0 0 0	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{100/567}$	$\sqrt{20/81}$	$\sqrt{20/81}$	$\sqrt{8/35}$	0	$\sqrt{4/81}$	$-\sqrt{4/81}$	$-\sqrt{2/405}$
0 1 0 · 0 2 1	$\sqrt{8/15}$	0	$-\sqrt{1/48}$	$\sqrt{1/48}$	0	$-\sqrt{1/8}$	$\sqrt{1/945}$	$-\sqrt{1/432}$	$-\sqrt{1/432}$	$\sqrt{3/56}$	0	$-\sqrt{5/108}$	$\sqrt{5/108}$	$-\sqrt{4/27}$
0 1 0 · 0 1 1	0	$\sqrt{2/21}$	$\sqrt{5/48}$	$\sqrt{5/48}$	$\sqrt{3/56}$	0	0	$-\sqrt{5/48}$	$\sqrt{5/48}$	0	$-\sqrt{1/8}$	$-\sqrt{1/12}$	$-\sqrt{1/12}$	0
0 1 -1 · 0 2 2	$\sqrt{1/15}$	0	$-\sqrt{1/24}$	$\sqrt{1/24}$	0	$-\sqrt{1/4}$	$-\sqrt{2/945}$	$\sqrt{1/216}$	$\sqrt{1/216}$	$-\sqrt{3/28}$	0	$\sqrt{5/54}$	$-\sqrt{5/54}$	$\sqrt{8/27}$
0 0 0 · 0 2 1	0	$\sqrt{1/7}$	$-\sqrt{1/4}$	$-\sqrt{1/4}$	$\sqrt{5/14}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 0 0 · 0 1 1	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{25/63}$	$-\sqrt{5/36}$	$-\sqrt{5/36}$	$-\sqrt{1/70}$	0	$\sqrt{1/9}$	$-\sqrt{1/9}$	$-\sqrt{4/45}$
-1 ½ ½ · 1 3/2 ½	0	$\sqrt{1/7}$	$\sqrt{1/16}$	$-\sqrt{1/4}$	$-\sqrt{45/224}$	$-\sqrt{3/32}$	$-\sqrt{5/567}$	$\sqrt{25/1296}$	$\sqrt{1/324}$	$-\sqrt{9/224}$	$\sqrt{5/96}$	$-\sqrt{5/324}$	$-\sqrt{5/81}$	$-\sqrt{4/81}$
-1 ½ ½ · 1 ½ ½	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{100/567}$	$\sqrt{20/81}$	$-\sqrt{5/81}$	$-\sqrt{9/70}$	$-\sqrt{1/6}$	$-\sqrt{16/81}$	$\sqrt{1/81}$	$\sqrt{4/405}$
-1 ½ -½ · 1 3/2 3/2	0	$\sqrt{1/21}$	$\sqrt{1/48}$	$-\sqrt{1/12}$	$-\sqrt{15/224}$	$-\sqrt{1/32}$	$\sqrt{5/189}$	$-\sqrt{25/432}$	$-\sqrt{1/108}$	$\sqrt{27/224}$	$-\sqrt{3/32}$	$\sqrt{5/108}$	$\sqrt{5/27}$	$\sqrt{4/27}$

$8 \otimes 27$	64 0 3 0	64 0 2 0	35 0 2 0	$\overline{35}$ 0 2 0	27 0 2 0	$27'$ 0 2 0	64 0 1 0	35 0 1 0	$\overline{35}$ 0 1 0	27 0 1 0	$27'$ 0 1 0	10 0 1 0	$\overline{10}$ 0 1 0	8 0 1 0	64 0 0 0	27 0 0 0	$27'$ 0 0 0	8 0 0 0
$1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\quad -1\ \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}$	0	$\sqrt{\frac{2}{21}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{24}}$	$-\sqrt{\frac{15}{112}}$	$\sqrt{\frac{1}{16}}$	$\sqrt{\frac{10}{567}}$	$-\sqrt{\frac{1}{162}}$	$-\sqrt{\frac{25}{648}}$	$\sqrt{\frac{9}{112}}$	$\sqrt{\frac{5}{48}}$	$-\sqrt{\frac{10}{81}}$	$-\sqrt{\frac{5}{162}}$	$\sqrt{\frac{8}{81}}$	0	0	0	0
$1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\quad -1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{50}{567}}$	$-\sqrt{\frac{5}{162}}$	$\sqrt{\frac{10}{81}}$	$-\sqrt{\frac{9}{140}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\sqrt{\frac{1}{162}}$	$\sqrt{\frac{8}{81}}$	$\sqrt{\frac{2}{405}}$	$\sqrt{\frac{2}{21}}$	$\sqrt{\frac{3}{140}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{15}}$
$1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\quad -1\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}$	0	$\sqrt{\frac{2}{21}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{24}}$	$-\sqrt{\frac{15}{112}}$	$\sqrt{\frac{1}{16}}$	$-\sqrt{\frac{10}{567}}$	$\sqrt{\frac{1}{162}}$	$\sqrt{\frac{25}{648}}$	$-\sqrt{\frac{9}{112}}$	$-\sqrt{\frac{5}{48}}$	$\sqrt{\frac{10}{81}}$	$\sqrt{\frac{5}{162}}$	$-\sqrt{\frac{8}{81}}$	0	0	0	0
$1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\quad -1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{50}{567}}$	$-\sqrt{\frac{5}{162}}$	$\sqrt{\frac{10}{81}}$	$-\sqrt{\frac{9}{140}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\sqrt{\frac{1}{162}}$	$\sqrt{\frac{8}{81}}$	$\sqrt{\frac{2}{405}}$	$-\sqrt{\frac{2}{21}}$	$-\sqrt{\frac{3}{140}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{15}}$
$0\ 1\ 1\quad 0\ 2\ -1$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{16}}$	$-\sqrt{\frac{1}{16}}$	0	$-\sqrt{\frac{3}{8}}$	$-\sqrt{\frac{1}{945}}$	$\sqrt{\frac{1}{432}}$	$\sqrt{\frac{1}{432}}$	$-\sqrt{\frac{3}{56}}$	0	$\sqrt{\frac{5}{108}}$	$-\sqrt{\frac{5}{108}}$	$\sqrt{\frac{4}{27}}$	0	0	0	0
$0\ 1\ 1\quad 0\ 1\ -1$	0	$\sqrt{\frac{5}{63}}$	$\sqrt{\frac{5}{144}}$	$\sqrt{\frac{5}{144}}$	$\sqrt{\frac{1}{56}}$	0	0	$\sqrt{\frac{5}{48}}$	$-\sqrt{\frac{5}{48}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{8}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{63}}$	$-\sqrt{\frac{8}{35}}$	0	$\sqrt{\frac{4}{45}}$
$0\ 1\ 0\quad 0\ 2\ 0$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	0	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{4}{2835}}$	$-\sqrt{\frac{1}{324}}$	$-\sqrt{\frac{1}{324}}$	$\sqrt{\frac{1}{14}}$	0	$-\sqrt{\frac{5}{81}}$	$\sqrt{\frac{5}{81}}$	$-\sqrt{\frac{16}{81}}$	0	0	0	0
$0\ 1\ 0\quad 0\ 1\ 0$	0	$\sqrt{\frac{20}{63}}$	$\sqrt{\frac{5}{36}}$	$\sqrt{\frac{5}{36}}$	$\sqrt{\frac{1}{14}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{1}{63}}$	$\sqrt{\frac{8}{35}}$	0	$-\sqrt{\frac{4}{45}}$
$0\ 1\ 0\quad 0\ 0\ 0$	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{100}{567}}$	$\sqrt{\frac{20}{81}}$	$\sqrt{\frac{20}{81}}$	$\sqrt{\frac{8}{35}}$	0	$\sqrt{\frac{4}{81}}$	$-\sqrt{\frac{4}{81}}$	$-\sqrt{\frac{1}{405}}$	0	0	0	0
$0\ 1\ -1\quad 0\ 2\ 1$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{16}}$	$\sqrt{\frac{1}{16}}$	0	$-\sqrt{\frac{3}{8}}$	$-\sqrt{\frac{1}{945}}$	$\sqrt{\frac{1}{432}}$	$\sqrt{\frac{1}{432}}$	$-\sqrt{\frac{3}{56}}$	0	$\sqrt{\frac{5}{108}}$	$-\sqrt{\frac{5}{108}}$	$\sqrt{\frac{4}{27}}$	0	0	0	0
$0\ 1\ -1\quad 0\ 1\ 1$	0	$\sqrt{\frac{5}{63}}$	$\sqrt{\frac{5}{144}}$	$\sqrt{\frac{5}{144}}$	$\sqrt{\frac{1}{56}}$	0	0	$-\sqrt{\frac{5}{48}}$	$\sqrt{\frac{5}{48}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{8}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{63}}$	$-\sqrt{\frac{8}{35}}$	0	$\sqrt{\frac{4}{45}}$
$0\ 0\ 0\quad 0\ 2\ 0$	0	$\sqrt{\frac{1}{7}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{5}{14}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$0\ 0\ 0\quad 0\ 1\ 0$	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{25}{63}}$	$-\sqrt{\frac{5}{36}}$	$-\sqrt{\frac{5}{36}}$	$-\sqrt{\frac{1}{70}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{9}}$	$-\sqrt{\frac{1}{9}}$	$-\sqrt{\frac{4}{45}}$	0	0	0	0
$0\ 0\ 0\quad 0\ 0\ 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{4}{7}}$	$-\sqrt{\frac{8}{35}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\quad 1\ \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}$	0	$\sqrt{\frac{2}{21}}$	$\sqrt{\frac{1}{24}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{15}{112}}$	$-\sqrt{\frac{1}{16}}$	$-\sqrt{\frac{10}{567}}$	$\sqrt{\frac{25}{648}}$	$\sqrt{\frac{1}{162}}$	$-\sqrt{\frac{9}{112}}$	$\sqrt{\frac{5}{48}}$	$-\sqrt{\frac{5}{162}}$	$-\sqrt{\frac{10}{81}}$	$-\sqrt{\frac{8}{81}}$	0	0	0	0
$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\quad 1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{50}{567}}$	$\sqrt{\frac{10}{81}}$	$-\sqrt{\frac{5}{162}}$	$-\sqrt{\frac{9}{140}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\sqrt{\frac{8}{81}}$	$\sqrt{\frac{1}{162}}$	$\sqrt{\frac{2}{405}}$	$-\sqrt{\frac{2}{21}}$	$-\sqrt{\frac{3}{140}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{2}{15}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\quad 1\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}$	0	$\sqrt{\frac{2}{21}}$	$\sqrt{\frac{1}{24}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{15}{112}}$	$-\sqrt{\frac{1}{16}}$	$\sqrt{\frac{10}{567}}$	$-\sqrt{\frac{25}{648}}$	$-\sqrt{\frac{1}{162}}$	$\sqrt{\frac{9}{112}}$	$-\sqrt{\frac{5}{48}}$	$\sqrt{\frac{5}{162}}$	$\sqrt{\frac{10}{81}}$	$\sqrt{\frac{8}{81}}$	0	0	0	0
$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\quad 1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{50}{567}}$	$\sqrt{\frac{10}{81}}$	$-\sqrt{\frac{5}{162}}$	$-\sqrt{\frac{9}{140}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\sqrt{\frac{8}{81}}$	$\sqrt{\frac{1}{162}}$	$\sqrt{\frac{2}{405}}$	$\sqrt{\frac{2}{21}}$	$\sqrt{\frac{3}{140}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{15}}$

$8 \otimes 27$	64 0 3 -1	64 0 2 -1	35 0 2 -1	$\overline{35}$ 0 2 -1	27 0 2 -1	$27'$ 0 2 -1	64 0 1 -1	35 0 1 -1	$\overline{35}$ 0 1 -1	27 0 1 -1	$27'$ 0 1 -1	10 0 1 -1	$\overline{10}$ 0 1 -1	8 0 1 -1
$1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\quad -1\ \frac{3}{2}\ -\frac{3}{2}$	0	$\sqrt{\frac{1}{21}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	$\sqrt{\frac{1}{48}}$	$-\sqrt{\frac{15}{224}}$	$\sqrt{\frac{1}{32}}$	$\sqrt{\frac{5}{189}}$	$-\sqrt{\frac{1}{108}}$	$-\sqrt{\frac{25}{432}}$	$\sqrt{\frac{27}{224}}$	$\sqrt{\frac{5}{32}}$	$-\sqrt{\frac{5}{27}}$	$-\sqrt{\frac{5}{108}}$	$\sqrt{\frac{4}{27}}$
$1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\quad -1\ \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}$	0	$\sqrt{\frac{1}{7}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{16}}$	$-\sqrt{\frac{45}{224}}$	$\sqrt{\frac{3}{32}}$	$-\sqrt{\frac{5}{567}}$	$\sqrt{\frac{1}{324}}$	$\sqrt{\frac{25}{1296}}$	$-\sqrt{\frac{9}{224}}$	$-\sqrt{\frac{5}{96}}$	$\sqrt{\frac{5}{81}}$	$-\sqrt{\frac{5}{324}}$	$-\sqrt{\frac{4}{81}}$
$1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\quad -1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{100}{567}}$	$-\sqrt{\frac{5}{81}}$	$\sqrt{\frac{20}{81}}$	$-\sqrt{\frac{9}{70}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{81}}$	$\sqrt{\frac{16}{81}}$	$\sqrt{\frac{4}{405}}$
$0\ 1\ 1\quad 0\ 2\ -2$	$\sqrt{\frac{1}{15}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{24}}$	$-\sqrt{\frac{1}{24}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{2}{945}}$	$\sqrt{\frac{1}{216}}$	$\sqrt{\frac{1}{216}}$	$-\sqrt{\frac{3}{28}}$	0	$\sqrt{\frac{5}{54}}$	$-\sqrt{\frac{5}{54}}$	$\sqrt{\frac{8}{27}}$
$0\ 1\ 0\quad 0\ 2\ -1$	$\sqrt{\frac{8}{15}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{48}}$	$-\sqrt{\frac{1}{48}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{8}}$	$\sqrt{\frac{1}{945}}$	$-\sqrt{\frac{1}{432}}$	$-\sqrt{\frac{1}{432}}$	$\sqrt{\frac{3}{56}}$	0	$-\sqrt{\frac{5}{108}}$	$\sqrt{\frac{5}{108}}$	$-\sqrt{\frac{4}{27}}$
$0\ 1\ 0\quad 0\ 1\ -1$	0	$\sqrt{\frac{5}{21}}$	$\sqrt{\frac{5}{48}}$	$\sqrt{\frac{5}{48}}$	$\sqrt{\frac{3}{56}}$	0	0	$\sqrt{\frac{5}{48}}$	$-\sqrt{\frac{5}{48}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{8}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	0
$0\ 1\ -1\quad 0\ 2\ 0$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{16}}$	$\sqrt{\frac{1}{16}}$	0	$-\sqrt{\frac{3}{8}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2835}}$	$\sqrt{\frac{1}{1296}}$	$\sqrt{\frac{1}{1296}}$	$-\sqrt{\frac{1}{56}}$	0	$\sqrt{\frac{5}{324}}$	$-\sqrt{\frac{5}{324}}$	$\sqrt{\frac{4}{81}}$
$0\ 1\ -1\quad 0\ 1\ 0$	0	$\sqrt{\frac{5}{21}}$	$\sqrt{\frac{5}{48}}$	$\sqrt{\frac{5}{48}}$	$\sqrt{\frac{3}{56}}$	0	0	$-\sqrt{\frac{5}{48}}$	$\sqrt{\frac{5}{48}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{8}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	0
$0\ 1\ -1\quad 0\ 0\ 0$	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{100}{567}}$	$\sqrt{\frac{20}{81}}$	$\sqrt{\frac{20}{81}}$	$\sqrt{\frac{8}{35}}$	0	$\sqrt{\frac{4}{81}}$	$-\sqrt{\frac{4}{81}}$	$-\sqrt{\frac{1}{405}}$
$0\ 0\ 0\quad 0\ 2\ -1$	0	$\sqrt{\frac{1}{7}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{5}{14}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$0\ 0\ 0\quad 0\ 1\ -1$	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{25}{63}}$	$-\sqrt{\frac{5}{36}}$	$-\sqrt{\frac{5}{36}}$	$-\sqrt{\frac{1}{70}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{9}}$	$-\sqrt{\frac{1}{9}}$	$-\sqrt{\frac{4}{45}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\quad 1\ \frac{3}{2}\ -\frac{3}{2}$	0	$\sqrt{\frac{1}{21}}$	$\sqrt{\frac{1}{48}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\sqrt{\frac{15}{224}}$	$-\sqrt{\frac{1}{32}}$	$-\sqrt{\frac{5}{189}}$	$\sqrt{\frac{25}{432}}$	$\sqrt{\frac{1}{108}}$	$-\sqrt{\frac{27}{224}}$	$\sqrt{\frac{5}{32}}$	$-\sqrt{\frac{5}{108}}$	$-\sqrt{\frac{5}{27}}$	$-\sqrt{\frac{4}{27}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\quad 1\ \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}$	0	$\sqrt{\frac{1}{7}}$	$\sqrt{\frac{1}{16}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{45}{224}}$	$-\sqrt{\frac{3}{32}}$	$\sqrt{\frac{5}{567}}$	$-\sqrt{\frac{25}{1296}}$	$-\sqrt{\frac{1}{324}}$	$\sqrt{\frac{9}{224}}$	$-\sqrt{\frac{5}{96}}$	$-\sqrt{\frac{5}{324}}$	$\sqrt{\frac{5}{81}}$	$\sqrt{\frac{4}{81}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\quad 1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{100}{567}}$	$\sqrt{\frac{20}{81}}$	$-\sqrt{\frac{5}{81}}$	$-\sqrt{\frac{9}{70}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{16}{81}}$	$\sqrt{\frac{1}{81}}$	$\sqrt{\frac{4}{405}}$

	64 0 3 -2	64 0 2 -2	35 0 2 -2	$\overline{35}$ 0 2 -2	27 0 2 -2	$27'$ 0 2 -2
$1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\quad -1\ \frac{3}{2}\ -\frac{3}{2}$	0	$\sqrt{\frac{4}{21}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\sqrt{\frac{15}{56}}$	$\sqrt{\frac{1}{8}}$
$0\ 1\ 0\quad 0\ 2\ -2$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
$0\ 1\ -1\quad 0\ 2\ -1$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{24}}$	$\sqrt{\frac{1}{24}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$
$0\ 1\ -1\quad 0\ 1\ -1$	0	$\sqrt{\frac{10}{21}}$	$\sqrt{\frac{5}{24}}$	$\sqrt{\frac{5}{24}}$	$\sqrt{\frac{3}{28}}$	0
$0\ 0\ 0\quad 0\ 2\ -2$	0	$\sqrt{\frac{1}{7}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{5}{14}}$	0
$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\quad 1\ \frac{3}{2}\ -\frac{3}{2}$	0	$\sqrt{\frac{4}{21}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{15}{56}}$	$-\sqrt{\frac{1}{8}}$

	64 0 3 -3
$0\ 1\ -1\quad 0\ 2\ -2$	1

$\underline{8}\otimes\underline{27}$		$\underline{64}$ -1 $\frac{5}{2}$ $\frac{5}{2}$	$\overline{35}$ -1 $\frac{5}{2}$ $\frac{5}{2}$
$0\ 1\ 1$	$-1\ \frac{3}{2}\ \frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$0\ 2\ 2$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$

		$\underline{64}$ -1 $\frac{5}{2}$ $\frac{3}{2}$	$\overline{35}$ -1 $\frac{5}{2}$ $\frac{3}{2}$	$\underline{64}$ -1 $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$	35 -1 $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$	$\overline{35}$ -1 $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$	27 -1 $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$	$27'$ -1 $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$	$\overline{10}$ -1 $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$
$1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$-2\ 1\ 1$	0	0	$\sqrt{\frac{5}{63}}$	$-\sqrt{\frac{1}{9}}$	$\sqrt{\frac{5}{36}}$	$-\sqrt{\frac{15}{56}}$	$\sqrt{\frac{1}{8}}$	$\sqrt{\frac{5}{18}}$
$0\ 1\ 1$	$-1\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{2}{945}}$	$\sqrt{\frac{2}{27}}$	$-\sqrt{\frac{49}{1080}}$	$\sqrt{\frac{5}{112}}$	$\sqrt{\frac{1}{16}}$	$\sqrt{\frac{5}{108}}$
$0\ 1\ 1$	$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	0	0	$\sqrt{\frac{50}{189}}$	$\sqrt{\frac{5}{54}}$	$\sqrt{\frac{25}{54}}$	$\sqrt{\frac{1}{7}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{27}}$
$0\ 1\ 0$	$-1\ \frac{3}{2}\ \frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{4}{15}}$	$\sqrt{\frac{2}{15}}$	$-\sqrt{\frac{1}{315}}$	$-\sqrt{\frac{1}{9}}$	$\sqrt{\frac{49}{720}}$	$-\sqrt{\frac{15}{224}}$	$-\sqrt{\frac{9}{32}}$	$-\sqrt{\frac{5}{72}}$
$0\ 0\ 0$	$-1\ \frac{3}{2}\ \frac{3}{2}$	0	0	$\sqrt{\frac{5}{21}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{5}{48}}$	$\sqrt{\frac{5}{224}}$	$\sqrt{\frac{3}{32}}$	$-\sqrt{\frac{5}{24}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$0\ 2\ 1$	$\sqrt{\frac{4}{15}}$	$-\sqrt{\frac{8}{15}}$	$-\sqrt{\frac{1}{315}}$	$\sqrt{\frac{1}{36}}$	$\sqrt{\frac{1}{120}}$	$-\sqrt{\frac{15}{224}}$	$\sqrt{\frac{1}{32}}$	$-\sqrt{\frac{5}{72}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$0\ 1\ 1$	0	0	$\sqrt{\frac{25}{63}}$	$\sqrt{\frac{5}{36}}$	$-\sqrt{\frac{25}{144}}$	$-\sqrt{\frac{27}{224}}$	$-\sqrt{\frac{5}{32}}$	$\sqrt{\frac{1}{72}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$0\ 2\ 2$	$\sqrt{\frac{1}{15}}$	$-\sqrt{\frac{2}{15}}$	$\sqrt{\frac{4}{315}}$	$-\sqrt{\frac{1}{9}}$	$-\sqrt{\frac{1}{180}}$	$\sqrt{\frac{15}{56}}$	$-\sqrt{\frac{1}{8}}$	$\sqrt{\frac{5}{18}}$

		$\underline{64}$ -1 $\frac{5}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\overline{35}$ -1 $\frac{5}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\underline{64}$ -1 $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$	35 -1 $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\overline{35}$ -1 $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$	27 -1 $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$	$27'$ -1 $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\overline{10}$ -1 $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\underline{64}$ -1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	35 -1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	27 -1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$27'$ -1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	10 -1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\underline{8}$ -1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$-2\ 1\ 0$	0	0	$\sqrt{\frac{10}{189}}$	$-\sqrt{\frac{2}{27}}$	$\sqrt{\frac{5}{54}}$	$-\sqrt{\frac{5}{28}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$\sqrt{\frac{2}{27}}$	$\sqrt{\frac{4}{189}}$	$-\sqrt{\frac{1}{216}}$	$\sqrt{\frac{1}{112}}$	$\sqrt{\frac{5}{48}}$	$-\sqrt{\frac{5}{108}}$	$\sqrt{\frac{4}{27}}$
$1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$-2\ 1\ 1$	0	0	$\sqrt{\frac{5}{189}}$	$-\sqrt{\frac{1}{27}}$	$\sqrt{\frac{5}{108}}$	$-\sqrt{\frac{5}{56}}$	$\sqrt{\frac{1}{24}}$	$\sqrt{\frac{5}{54}}$	$-\sqrt{\frac{8}{189}}$	$\sqrt{\frac{1}{108}}$	$-\sqrt{\frac{1}{56}}$	$-\sqrt{\frac{5}{24}}$	$\sqrt{\frac{5}{54}}$	$-\sqrt{\frac{8}{27}}$
$0\ 1\ 1$	$-1\ \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	$\sqrt{\frac{8}{2835}}$	$\sqrt{\frac{8}{81}}$	$-\sqrt{\frac{49}{810}}$	$\sqrt{\frac{5}{84}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{5}{81}}$	$-\sqrt{\frac{1}{567}}$	$\sqrt{\frac{1}{162}}$	$-\sqrt{\frac{1}{21}}$	0	$\sqrt{\frac{5}{81}}$	$\sqrt{\frac{4}{81}}$
$0\ 1\ 1$	$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	0	0	$\sqrt{\frac{50}{567}}$	$\sqrt{\frac{5}{162}}$	$\sqrt{\frac{25}{162}}$	$\sqrt{\frac{1}{21}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{81}}$	$\sqrt{\frac{20}{567}}$	$\sqrt{\frac{125}{648}}$	$\sqrt{\frac{361}{1680}}$	$\sqrt{\frac{1}{16}}$	$\sqrt{\frac{49}{324}}$	$-\sqrt{\frac{4}{405}}$
$0\ 1\ 0$	$-1\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2835}}$	$-\sqrt{\frac{1}{81}}$	$\sqrt{\frac{49}{6480}}$	$-\sqrt{\frac{5}{672}}$	$-\sqrt{\frac{1}{32}}$	$-\sqrt{\frac{5}{648}}$	$\sqrt{\frac{2}{567}}$	$-\sqrt{\frac{1}{81}}$	$\sqrt{\frac{2}{21}}$	0	$-\sqrt{\frac{10}{81}}$	$-\sqrt{\frac{8}{81}}$
$0\ 1\ 0$	$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	0	0	$\sqrt{\frac{100}{567}}$	$\sqrt{\frac{5}{81}}$	$\sqrt{\frac{25}{81}}$	$\sqrt{\frac{2}{21}}$	0	$-\sqrt{\frac{2}{81}}$	$-\sqrt{\frac{10}{567}}$	$-\sqrt{\frac{125}{1296}}$	$-\sqrt{\frac{361}{3360}}$	$-\sqrt{\frac{1}{32}}$	$-\sqrt{\frac{49}{648}}$	$\sqrt{\frac{2}{405}}$
$0\ 1\ -1$	$-1\ \frac{3}{2}\ \frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{15}}$	$\sqrt{\frac{1}{30}}$	$-\sqrt{\frac{2}{945}}$	$-\sqrt{\frac{2}{27}}$	$\sqrt{\frac{49}{1080}}$	$-\sqrt{\frac{5}{112}}$	$-\sqrt{\frac{1}{16}}$	$-\sqrt{\frac{5}{108}}$	$-\sqrt{\frac{1}{189}}$	$\sqrt{\frac{1}{54}}$	$-\sqrt{\frac{1}{7}}$	0	$\sqrt{\frac{2}{27}}$	$\sqrt{\frac{4}{27}}$
$0\ 0\ 0$	$-1\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}$	0	0	$\sqrt{\frac{5}{21}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{5}{48}}$	$\sqrt{\frac{5}{224}}$	$\sqrt{\frac{3}{32}}$	$-\sqrt{\frac{5}{24}}$	0	0	0	0	0	0
$0\ 0\ 0$	$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{10}{21}}$	$-\sqrt{\frac{5}{48}}$	$-\sqrt{\frac{169}{1120}}$	$\sqrt{\frac{3}{32}}$	$\sqrt{\frac{1}{24}}$	$-\sqrt{\frac{2}{15}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$0\ 2\ 0$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{5}}$	$-\sqrt{\frac{2}{315}}$	$\sqrt{\frac{1}{18}}$	$\sqrt{\frac{1}{360}}$	$-\sqrt{\frac{15}{112}}$	$\sqrt{\frac{1}{16}}$	$-\sqrt{\frac{5}{36}}$	0	0	0	0	0	0
$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$0\ 1\ 0$	0	0	$\sqrt{\frac{50}{189}}$	$\sqrt{\frac{5}{54}}$	$-\sqrt{\frac{25}{216}}$	$-\sqrt{\frac{9}{112}}$	$-\sqrt{\frac{5}{48}}$	$\sqrt{\frac{1}{108}}$	$-\sqrt{\frac{5}{189}}$	$\sqrt{\frac{5}{54}}$	$-\sqrt{\frac{9}{140}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\sqrt{\frac{1}{27}}$	$-\sqrt{\frac{4}{135}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$0\ 0\ 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{20}{63}}$	$\sqrt{\frac{5}{18}}$	$-\sqrt{\frac{9}{140}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{9}}$	$\sqrt{\frac{1}{45}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$0\ 2\ 1$	$\sqrt{\frac{2}{15}}$	$-\sqrt{\frac{4}{15}}$	$\sqrt{\frac{1}{105}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\sqrt{\frac{1}{240}}$	$\sqrt{\frac{45}{224}}$	$-\sqrt{\frac{1}{32}}$	$\sqrt{\frac{5}{24}}$	0	0	0	0	0	0
$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$0\ 1\ 1$	0	0	$\sqrt{\frac{25}{189}}$	$\sqrt{\frac{5}{108}}$	$-\sqrt{\frac{25}{432}}$	$-\sqrt{\frac{9}{224}}$	$-\sqrt{\frac{3}{56}}$	$\sqrt{\frac{1}{216}}$	$\sqrt{\frac{10}{189}}$	$-\sqrt{\frac{5}{27}}$	$\sqrt{\frac{9}{70}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{2}{27}}$	$\sqrt{\frac{8}{135}}$

$\underline{8}\otimes\underline{27}$		$\underline{64}$ -1 $\frac{5}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$\overline{35}$ -1 $\frac{5}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$\underline{64}$ -1 $\frac{3}{2}$ $-\frac{1}{2}$	35 -1 $\frac{3}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$\overline{35}$ -1 $\frac{3}{2}$ $-\frac{1}{2}$	27 -1 $\frac{3}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$27'$ -1 $\frac{3}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$\overline{10}$ -1 $\frac{3}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$\underline{64}$ -1 $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	35 -1 $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	27 -1 $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$27'$ -1 $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	10 -1 $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$\underline{8}$ -1 $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$
$1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$-2\ 1\ -1$	0	0	$\sqrt{\frac{5}{189}}$	$-\sqrt{\frac{1}{27}}$	$\sqrt{\frac{5}{108}}$	$-\sqrt{\frac{5}{56}}$	$\sqrt{\frac{1}{24}}$	$\sqrt{\frac{5}{54}}$	$\sqrt{\frac{8}{189}}$	$-\sqrt{\frac{1}{108}}$	$\sqrt{\frac{1}{56}}$	$\sqrt{\frac{5}{24}}$	$-\sqrt{\frac{5}{54}}$	$\sqrt{\frac{8}{27}}$
$1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$-2\ 1\ 0$	0	0	$\sqrt{\frac{10}{189}}$	$-\sqrt{\frac{2}{27}}$	$\sqrt{\frac{5}{54}}$	$-\sqrt{\frac{5}{28}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$\sqrt{\frac{2}{27}}$	$-\sqrt{\frac{4}{189}}$	$\sqrt{\frac{1}{216}}$	$-\sqrt{\frac{1}{112}}$	$-\sqrt{\frac{5}{48}}$	$\sqrt{\frac{5}{108}}$	$-\sqrt{\frac{4}{27}}$
$0\ 1\ 1$	$-1\ \frac{3}{2}\ -\frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{15}}$	$\sqrt{\frac{1}{30}}$	$\sqrt{\frac{2}{945}}$	$\sqrt{\frac{2}{27}}$	$-\sqrt{\frac{49}{1080}}$	$\sqrt{\frac{5}{112}}$	$\sqrt{\frac{1}{16}}$	$\sqrt{\frac{5}{108}}$	$-\sqrt{\frac{1}{189}}$	$\sqrt{\frac{1}{54}}$	$-\sqrt{\frac{1}{7}}$	0	$\sqrt{\frac{2}{27}}$	$\sqrt{\frac{4}{27}}$
$0\ 1\ 0$	$-1\ \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{2835}}$	$\sqrt{\frac{1}{81}}$	$-\sqrt{\frac{49}{6480}}$	$\sqrt{\frac{5}{672}}$	$\sqrt{\frac{1}{32}}$	$\sqrt{\frac{5}{648}}$	$\sqrt{\frac{2}{567}}$	$-\sqrt{\frac{1}{81}}$	$\sqrt{\frac{2}{21}}$	0	$-\sqrt{\frac{10}{81}}$	$-\sqrt{\frac{8}{81}}$
$0\ 1\ 0$	$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	0	0	$\sqrt{\frac{100}{567}}$	$\sqrt{\frac{5}{81}}$	$\sqrt{\frac{25}{81}}$	$\sqrt{\frac{2}{21}}$	0	$-\sqrt{\frac{2}{81}}$	$\sqrt{\frac{10}{567}}$	$\sqrt{\frac{125}{1296}}$	$\sqrt{\frac{361}{3360}}$	$\sqrt{\frac{1}{32}}$	$\sqrt{\frac{49}{648}}$	$-\sqrt{\frac{2}{405}}$
$0\ 1\ -1$	$-1\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	$-\sqrt{\frac{8}{2835}}$	$-\sqrt{\frac{8}{81}}$	$\sqrt{\frac{49}{810}}$	$-\sqrt{\frac{5}{84}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{5}{81}}$	$-\sqrt{\frac{1}{567}}$	$\sqrt{\frac{1}{162}}$	$-\sqrt{\frac{1}{21}}$	0	$\sqrt{\frac{5}{81}}$	$\sqrt{\frac{4}{81}}$
$0\ 1\ -1$	$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	0	0	$\sqrt{\frac{50}{567}}$	$\sqrt{\frac{5}{162}}$	$\sqrt{\frac{25}{162}}$	$\sqrt{\frac{1}{21}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{81}}$	$-\sqrt{\frac{20}{567}}$	$-\sqrt{\frac{125}{648}}$	$-\sqrt{\frac{361}{1680}}$	$-\sqrt{\frac{1}{16}}$	$-\sqrt{\frac{49}{324}}$	$\sqrt{\frac{4}{405}}$
$0\ 0\ 0$	$-1\ \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}$	0	0	$\sqrt{\frac{5}{21}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{5}{48}}$	$\sqrt{\frac{5}{224}}$	$\sqrt{\frac{3}{32}}$	$-\sqrt{\frac{5}{24}}$	0	0	0	0	0	0
$0\ 0\ 0$	$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{10}{21}}$	$-\sqrt{\frac{5}{48}}$	$-\sqrt{\frac{169}{1120}}$	$\sqrt{\frac{3}{32}}$	$\sqrt{\frac{1}{24}}$	$-\sqrt{\frac{2}{15}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$0\ 2\ -1$	$\sqrt{\frac{2}{15}}$	$-\sqrt{\frac{4}{15}}$	$-\sqrt{\frac{1}{105}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$\sqrt{\frac{1}{240}}$	$-\sqrt{\frac{45}{224}}$	$\sqrt{\frac{1}{32}}$	$-\sqrt{\frac{5}{24}}$	0	0	0	0	0	0
$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$0\ 1\ -1$	0	0	$\sqrt{\frac{25}{189}}$	$\sqrt{\frac{5}{108}}$	$-\sqrt{\frac{25}{432}}$	$-\sqrt{\frac{9}{224}}$	$-\sqrt{\frac{3}{56}}$	$\sqrt{\frac{1}{216}}$	$-\sqrt{\frac{10}{189}}$	$\sqrt{\frac{5}{27}}$	$-\sqrt{\frac{9}{70}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{2}{27}}$	$-\sqrt{\frac{8}{135}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$0\ 2\ 0$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{2}{315}}$	$-\sqrt{\frac{1}{18}}$	$-\sqrt{\frac{1}{360}}$	$\sqrt{\frac{15}{112}}$	$-\sqrt{\frac{1}{16}}$	$\sqrt{\frac{5}{36}}$	0	0	0	0	0	0
$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$0\ 1\ 0$	0	0	$\sqrt{\frac{50}{189}}$	$\sqrt{\frac{5}{54}}$	$-\sqrt{\frac{25}{216}}$	$-\sqrt{\frac{9}{112}}$	$-\sqrt{\frac{5}{48}}$	$\sqrt{\frac{1}{108}}$	$\sqrt{\frac{5}{189}}$	$-\sqrt{\frac{5}{54}}$	$\sqrt{\frac{9}{140}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	$\sqrt{\frac{1}{27}}$	$\sqrt{\frac{4}{135}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$0\ 0\ 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{20}{63}}$	$\sqrt{\frac{5}{18}}$	$-\sqrt{\frac{3}{140}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{9}}$	$\sqrt{\frac{1}{45}}$

		$\underline{64}$ -1 $\frac{5}{2}$ $-\frac{3}{2}$	$\overline{35}$ -1 $\frac{5}{2}$ $-\frac{3}{2}$	$\underline{64}$ -1 $\frac{3}{2}$ $-\frac{3}{2}$	35 -1 $\frac{3}{2}$ $-\frac{3}{2}$	$\overline{35}$ -1 $\frac{3}{2}$ $-\frac{3}{2}$	27 -1 $\frac{3}{2}$ $-\frac{3}{2}$	$27'$ -1 $\frac{3}{2}$ $-\frac{3}{2}$	$\overline{10}$ -1 $\frac{3}{2}$ $-\frac{3}{2}$
$1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$-2\ 1\ -1$	0	0	$\sqrt{\frac{5}{63}}$	$-\sqrt{\frac{1}{9}}$	$\sqrt{\frac{5}{36}}$	$-\sqrt{\frac{15}{56}}$	$\sqrt{\frac{1}{8}}$	$\sqrt{\frac{5}{18}}$
$0\ 1\ 0$	$-1\ \frac{3}{2}\ -\frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{4}{15}}$	$\sqrt{\frac{2}{15}}$	$\sqrt{\frac{1}{315}}$	$\sqrt{\frac{1}{9}}$	$-\sqrt{\frac{49}{720}}$	$\sqrt{\frac{15}{224}}$	$\sqrt{\frac{9}{32}}$	$\sqrt{\frac{5}{72}}$
$0\ 1\ -1$	$-1\ \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{2}{945}}$	$-\sqrt{\frac{2}{27}}$	$\sqrt{\frac{49}{1080}}$	$-\sqrt{\frac{5}{112}}$	$-\sqrt{\frac{1}{16}}$	$-\sqrt{\frac{5}{108}}$
$0\ 1\ -1$	$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	0	0	$\sqrt{\frac{50}{189}}$	$\sqrt{\frac{5}{54}}$	$\sqrt{\frac{25}{54}}$	$\sqrt{\frac{1}{7}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{27}}$
$0\ 0\ 0$	$-1\ \frac{3}{2}\ -\frac{3}{2}$	0	0	$\sqrt{\frac{5}{21}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{5}{48}}$	$\sqrt{\frac{5}{224}}$	$\sqrt{\frac{3}{32}}$	$-\sqrt{\frac{5}{24}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$0\ 2\ -2$	$\sqrt{\frac{1}{15}}$	$-\sqrt{\frac{2}{15}}$	$-\sqrt{\frac{4}{315}}$	$\sqrt{\frac{1}{9}}$	$\sqrt{\frac{1}{180}}$	$-\sqrt{\frac{15}{56}}$	$\sqrt{\frac{1}{8}}$	$-\sqrt{\frac{5}{18}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$0\ 2\ -1$	$\sqrt{\frac{4}{15}}$	$-\sqrt{\frac{8}{15}}$	$\sqrt{\frac{1}{315}}$	$-\sqrt{\frac{1}{36}}$	$-\sqrt{\frac{1}{120}}$	$\sqrt{\frac{15}{224}}$	$-\sqrt{\frac{1}{32}}$	$\sqrt{\frac{5}{72}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$0\ 1\ -1$	0	0	$\sqrt{\frac{25}{63}}$	$\sqrt{\frac{5}{36}}$	$-\sqrt{\frac{25}{144}}$	$-\sqrt{\frac{27}{224}}$	$-\sqrt{\frac{5}{32}}$	$\sqrt{\frac{1}{72}}$

		$\underline{64}$ -1 $\frac{5}{2}$ $-\frac{5}{2}$	$\overline{35}$ -1 $\frac{5}{2}$ $-\frac{5}{2}$
$0\ 1\ -1$	$-1\ \frac{3}{2}\ -\frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
$-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$0\ 2\ -2$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$

$8 \otimes 27$

	$\overline{35}$	
	64 -2 2 2	35 -2 2 2
0 1 1 -2 1 1	$\sqrt{1/3}$	$\sqrt{2/3}$
-1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ -1 $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$	$\sqrt{2/3}$	$-\sqrt{1/3}$

	64 -2 2 1	$\overline{35}$ -2 2 1	64 -2 1 1	35 -2 1 1	27 -2 1 1	27′ -2 1 1
0 1 1 -2 1 0	$\sqrt{1/6}$	$\sqrt{1/3}$	$\sqrt{1/42}$	$\sqrt{1/12}$	$\sqrt{15/56}$	$\sqrt{1/8}$
0 1 0 -2 1 1	$\sqrt{1/6}$	$\sqrt{1/3}$	$-\sqrt{1/42}$	$-\sqrt{1/12}$	$-\sqrt{15/56}$	$-\sqrt{1/8}$
0 0 0 -2 1 1	0	0	$\sqrt{2/7}$	$-\sqrt{1/4}$	$-\sqrt{5/56}$	$\sqrt{1/8}$
-1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ -1 $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\sqrt{1/2}$	$-\sqrt{1/4}$	$-\sqrt{1/126}$	$\sqrt{1/9}$	$-\sqrt{5/56}$	$\sqrt{1/24}$
-1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ -1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	0	0	$\sqrt{40/63}$	$\sqrt{5/36}$	$-\sqrt{1/56}$	$-\sqrt{5/24}$
-1 $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ -1 $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$	$\sqrt{1/6}$	$-\sqrt{1/12}$	$\sqrt{1/42}$	$-\sqrt{1/3}$	$\sqrt{15/56}$	$-\sqrt{1/8}$

	64 -2 2 0	$\overline{35}$ -2 2 0	64 -2 1 0	35 -2 1 0	27 -2 1 0	27′ -2 1 0	35 -2 0 0	10 -2 0 0
0 1 1 -2 1 -1	$\sqrt{1/18}$	$\sqrt{1/9}$	$\sqrt{1/42}$	$\sqrt{1/12}$	$\sqrt{15/56}$	$\sqrt{1/8}$	$\sqrt{1/18}$	$\sqrt{5/18}$
0 1 0 -2 1 0	$\sqrt{2/9}$	$\sqrt{4/9}$	0	0	0	0	$-\sqrt{1/18}$	$-\sqrt{5/18}$
0 1 -1 -2 1 1	$\sqrt{1/18}$	$\sqrt{1/9}$	$-\sqrt{1/42}$	$-\sqrt{1/12}$	$-\sqrt{15/56}$	$-\sqrt{1/8}$	$\sqrt{1/18}$	$\sqrt{5/18}$
0 0 0 -2 1 0	0	0	$\sqrt{2/7}$	$-\sqrt{1/4}$	$-\sqrt{5/56}$	$\sqrt{1/8}$	0	0
-1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ -1 $\frac{3}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$\sqrt{1/3}$	$-\sqrt{1/6}$	$-\sqrt{1/63}$	$\sqrt{2/9}$	$-\sqrt{5/28}$	$\sqrt{1/12}$	0	0
-1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ -1 $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	0	0	$\sqrt{20/63}$	$\sqrt{5/72}$	$-\sqrt{1/112}$	$-\sqrt{5/48}$	$\sqrt{5/12}$	$-\sqrt{1/12}$
-1 $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ -1 $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\sqrt{1/3}$	$-\sqrt{1/6}$	$\sqrt{1/63}$	$-\sqrt{2/9}$	$\sqrt{5/28}$	$-\sqrt{1/12}$	0	0
-1 $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ -1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	0	0	$\sqrt{20/63}$	$\sqrt{5/72}$	$-\sqrt{1/112}$	$-\sqrt{5/48}$	$-\sqrt{5/12}$	$\sqrt{1/12}$

	64 -2 2 -1	$\overline{35}$ -2 2 -1	64 -2 1 -1	35 -2 1 -1	27 -2 1 -1	27′ -2 1 -1
0 1 0 -2 1 -1	$\sqrt{1/6}$	$\sqrt{1/3}$	$\sqrt{1/42}$	$\sqrt{1/12}$	$\sqrt{15/56}$	$\sqrt{1/8}$
0 1 -1 -2 1 0	$\sqrt{1/6}$	$\sqrt{1/3}$	$-\sqrt{1/42}$	$-\sqrt{1/12}$	$-\sqrt{15/56}$	$-\sqrt{1/8}$
0 0 0 -2 1 -1	0	0	$\sqrt{2/7}$	$-\sqrt{1/4}$	$-\sqrt{5/56}$	$\sqrt{1/8}$
-1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ -1 $\frac{3}{2}$ $-\frac{3}{2}$	$\sqrt{1/6}$	$-\sqrt{1/12}$	$-\sqrt{1/42}$	$\sqrt{1/3}$	$-\sqrt{15/56}$	$\sqrt{1/8}$
-1 $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ -1 $\frac{3}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$\sqrt{1/2}$	$-\sqrt{1/4}$	$\sqrt{1/126}$	$-\sqrt{1/9}$	$\sqrt{5/56}$	$-\sqrt{1/24}$
-1 $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ -1 $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	0	0	$\sqrt{40/63}$	$\sqrt{5/36}$	$-\sqrt{1/56}$	$-\sqrt{5/24}$

	64 -2 2 -2	$\overline{35}$ -2 2 -2
0 1 -1 -2 1 -1	$\sqrt{1/3}$	$\sqrt{2/3}$
-1 $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ -1 $\frac{3}{2}$ $-\frac{3}{2}$	$\sqrt{2/3}$	$-\sqrt{1/3}$

$8 \otimes 27$

	64 -3 $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$
-1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ -2 1 1	1

	64 -3 $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$	35 -3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
-1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ -2 1 0	$\sqrt{2/3}$	$\sqrt{1/3}$
-1 $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ -2 1 1	$\sqrt{1/3}$	$-\sqrt{2/3}$

	64 -3 $\frac{3}{2}$ $-\frac{1}{2}$	35 -3 $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$
-1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ -2 1 -1	$\sqrt{1/3}$	$\sqrt{2/3}$
-1 $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ -2 1 0	$\sqrt{2/3}$	$-\sqrt{1/3}$

	64 -3 $\frac{3}{2}$ $-\frac{3}{2}$
-1 $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ -2 1 -1	1