ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2123

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.Г. Кадышевский, И.Т. Тодоров

НЕОДНОРОДНАЯ ГРУППА SL(6) С РАСШИРЕННОЙ ПОДГРУППОЙ ТРАНСЛЯЦИЙ

1965

P-2123

В.Г. Кадышевский, И.Т. Тодоров

НЕОДНОРОДНАЯ ГРУППА SL(6) С РАСШИРЕННОЙ ПОДГРУППОЙ ТРАНСЛЯЦИЙ

Введение

В работах[1-3], посвященных $SU(6)$ -симметрии сильных взаимодействий, так же как и в работе Вигнера[4] по применению группы $U(4)$ в теории ядра, исходным пунктом является замечание, что некоторый класс лагранжианов взаимодействия инвариантен относительно группы преобразований, затрагивающих спиновые и изотопические индексы у операторов поля (или у волновых функций), но оставляющих неизменными пространственно-временные координаты (или сопряженные к ним 4-импульсы).

Ковариантное расширение группы $SU(6)$ до $\tilde{U}(12)$, рассматриваемое многими авторами[5-9] x), также отделяет релятивистскую группу спина (порождаемую γ -матрицами Дирака и их всевозможными произведениями) от пространственно-временных движений. Несмотря на определенный успех, достигнутый на этом пути при вычислении электромагнитных формфакторов частиц, в таком подходе можно усмотреть некоторую непоследовательность. Действительно, если интерпретировать спиновую группу лишь как часть группы внутренних симметрий, не связанную с пространственно-временными движениями, то изменение спина за счет движения системы может быть скомпенсировано посредством "внутреннего" унитарного преобразования и поэтому остается ненаблюдаемым. Чтобы не вступать в противоречие с опытом, необходимо рассматривать два типа спиновых преобразований. К первому из них относятся преобразования, являющиеся частью внутренних симметрий ($SU(6)$, $\tilde{U}(12)$ и т.п.), ко второму - обычные спиновые преобразования, возникающие как представление преобразования координат xx). Такое удвоение группы кажется эстетически неудовлетворительным.

Попытка объединения группы внутренних симметрий с группой Пуанкаре простран-

---

x) Группа $\tilde{U}(12)$ была предложена в[10] в несколько иной интепретации (связанной с редукцией по группе де Ситтера - см. также [31]).

xx) Точное математическое описание взаимоотношения группы пространственно-временных движений и группы $\tilde{U}(12)$ дано в [9] (для группы $\tilde{U}(12)$ в этой работе принято обозначение $U(6,6)$).

ственно-временных движений, предпринятая независимо рядом авторов[2,12-20/x)], связана с вынужденным увеличением числа измерений координатного (и импульсного) пространства, что, естественно, тоже приводит к серьезным трудностям и проблемам.

Настоящая работа относится ко второму направлению. Она посвящена анализу неоднородной группы $SL(6)$ (в дальнейшем обозначаемой $ISL(6)$) и изучению возможности ее применения. В § 1 напоминаются определение и основные свойства группы $ISL(6)$, Отмечается несимметричность простейших уравнений (для спина 1/2), инвариантных относительно этой группы: они распадаются на систему уравнений первого порядка и систему уравнений пятого порядка, причем вся система в целом не инвариантна относительно преобразования отражения. В § 3 предлагается выход из этого затруднения, отличный от пути, по которому идет Рюль[15]. При помощи трехрядных миноров матрицы операторов трансляций вводится 400-мерный "импульс", преобразующийся по представлению (20, 20) группы $SL(6)$ [xx)]. Полученные таким образом операторы вместе с инфинитезимальными операторами однородной группы $SL(6)$ объявляются генераторами некоторой новой 470-параметрической группы $\mathcal{G}_u$, которая рассматривается как исходное объединение группы Пуанкаре с группой внутренних симметрий $SU(3)$. Для скалярного (относительно группы $\mathcal{G}_u$) поля можно написать инвариантное уравнение второго порядка, аналогичное уравнению Клейна-Гордона в случае группы Пуанкаре. Для спинорного поля наименьшей размерности ((20,1)+(1,20)), описывающего частицы со спином 1/2 и 3/2, получается система уравнений первого порядка, инвариантная как относительно собственной группы $\mathcal{G}_u$, так и относительно отражения. В § 2 изучается алгебра Ли группы $ISL(6)$, рассматривается инфинитезимальное представление этой группы и находятся все операторы Казимира. Полученные результаты используются затем при изучении алгебры Ли группы $\mathcal{G}_u$. В дополнении А приведены некоторые тождества между структурными постоянными рассматриваемых алгебр. В дополнении В дана связь присоединенного представления группы $ISL(6)$ с инфинитезимальным и получены законы преобразования матрицы генераторов, используемой в § 3.

---

x) Впервые возможность релятивистского обобщения $SU(6)$ - симметрии, связанная с переходом к неоднородной группе $SL(6)$, отмечается в работе Сакита[2], в которой, однако, автор ставит под вопрос целесообразность рассмотрения 36-мерных трансляций. Работы[12-19], выполненные до выхода в свет статьи[2], исследуют эту возможность более серьезно, хотя в [12] сохраняется пессимистическое отношение к данному подходу. Любопытно отметить далеко идущее сходство работ[16,17], опубликованных практически одновременно в ЦЕРН'е и в Дубне.

xx) Возможность использования представления (20, 20) для определения импульса указана в примечании к работе[18] и в недавнем препринте[24].

§ 1. Определение и свойства группы ISL(6). Инвариантные уравнения

Универсальная накрывающая[x)] ISL(2) собственной группы Пуанкаре может быть определена как полупрямое произведение[xx)]

$$ISL(2) = SL(2) \cdot T_4 \tag{1.1}$$

группы комплексных унимодулярных матриц второго порядка (в математических работах для нее используется обычно обозначение SL(2,c)) на аддитивную 4-параметрическую группу двухрядных эрмитовых матриц T_4. Если любому 4-вектору x_μ поставить в соответствие двухрядную эрмитову матрицу

$$x = x_\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3, \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

то при преобразовании (A,a) из ISL(2)($\det A = 1, a = a^*$) эта матрица преобразуется по формуле (* означает эрмитово сопряжение):

$$x' = A\, x\, A^* + a\ . \tag{1.3}$$

Малая группа группы ISL(2), оставляющая инвариатной положительно определенную матрицу p (соответствующую времени-подобному 4-вектору p_μ), есть унитарная группа SU(2).

Естественным обобщением группы ISL(2) в случае, когда роль малой группы играет SU(6), является неоднородная группа ISL(6), определяемая как полупрямое произведение

$$ISL(6) = SL(6) \cdot T_{36} \tag{1.4}$$

группы унимодулярных матриц шестого порядка SL(6) на 36-параметрическую аддитивную группу шестирядных эрмитовых матриц T_{36}. Групповое умножение задается формулой

$$(A_1, a_1)(A_2, a_2) = (A_1 A_2, a_1 + A_1 a_2 A_1^*), \tag{1.5}$$

---

x) Универсальной накрывающей некоторой связной группы Ли называется односвязная группа, гомоморфная данной (см. /21/). Значение универсальной накрывающей заключается в том, что все ее представления однозначны.

xx) Говорят, что группа G равна произведению своих подгрупп G_1 и G_2, если любой элемент G представим в виде $g = g_1 g_2$, где $g_1 \in G_1$, а $g_2 \in G_2$. Произведение $G_1 G_2$ называется полупрямым, если группа G_2 является инвариантной подгруппой (нормальным делителем) группы G (т.е. если $g G_2 g^{-1} = G_2$). Если подгруппа G_1 тоже инвариантна в G, то произведение называется прямым и обозначается как $G_1 \times G_2$.

которая, в частности, получается, если отождествить элемент $g=(A,a)$ группы $ISL(6)$ с 12-рядной матрицей

$$g = \begin{pmatrix} A^{*-1} & 0 \\ aA^{*-1} & A \end{pmatrix}. \qquad (1.6)$$

Группа $ISL(6)$ действует в пространстве эрмитовых матриц 6×6 согласно (1.3). В /12/ замечено, что эта группа является наименьшей группой Ли, содержащей группы $ISL(2)$ и $SU(6)$ так, чтобы $ISL(2) \cap SU(6) = SU(2)$.

Теория спиноров группы $SL(6)$, т.е. теория конечномерных (неунитарных) представлений однородной группы, отличается от обычной теории спиноров группы $SL(2)$, главным образом, тем, что в $SL(6)$ имеется четыре неэквивалентных базисных представления низшей размерности (6), тогда как в случае группы $SL(2)$ их только два. Четыре типа шестирядных спиноров мы будем обозначать через ξ^{α}, $\xi^{\dot\alpha}$, ξ_{α}, $\xi_{\dot\alpha}$; они преобразуются с помощью матриц A, $\bar A$, A^{T-1} и A^{*-1} соответственно, где черта означает комплексное сопряжение, а индекс T – транспонирование.

Всякое неприводимое представление группы $SL(6)$ может быть поставлено во взаимно однозначное соответствие с парой схем Юнга (одной для непунктирных, другой – для пунктирных индексов тензора) и потому занумеровано двумя пятерками целых неотрицательных чисел. Следуя сложившейся традиции, мы, однако, будем нумеровать представления их размерностью (отдельно по пунктирным и непунктирным индексам), что для встречающихся представлений невысокой размерности не приведет к недоразумениям. Например, 4 указанных выше шестирядных представления будут обозначаться соответственно, как $D(6,1)$, $D(1,6)$, $D(\bar 6,1)$ и $D(1,\bar 6)$.

Пусть $t=t^{\alpha\dot\beta}$ – эрмитова матрица генераторов 36-мерных трансляций. При произвольном преобразовании $(A,a)\in ISL(6)$ матрица t трансформируется по формуле[x)]

$$t' = A\,tA^{*}. \qquad (1.7)$$

Поскольку $\det A = 1$, то

$$\det t \equiv \kappa^{6} \qquad (1.8)$$

является одним из операторов Казимира (инвариантов) группы $ISL(6)$.

Легко видеть, что матрица $\tilde t$, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы t, преобразуется как тензор с нижними индексами: $\tilde t_{\dot\alpha\beta}$. Это следует из того, что согласно (1.8)

---

x) Если положить $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$,

то закон преобразования (1.7) эквивалентен преобразованию T по "присоединенному" представлению: $T' = g\,T\,g^{-1}$.

$$t^{\alpha\dot{\gamma}}\ \tilde{t}_{\dot{\gamma}\beta} = \kappa^6\ \delta^{\alpha}_{\beta}. \tag{1.9}$$

По аналогии с теорией спиноров в пространстве Минковского введем операцию пространственного отражения Π для биспиноров по формуле

$$\Pi \begin{pmatrix} \phi^{\alpha} \\ \chi_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} \chi_{\dot{\alpha}} \\ \phi^{\alpha} \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

где η – фазовый множитель x). Простейший аналог уравнения Дирака в схеме $SL(6)$ – симметрии есть система (см. также /15/):

$$\begin{aligned} t^{\alpha\dot{\beta}}\chi_{\dot{\beta}} &= \kappa\ \phi^{\alpha}, \\ \tilde{t}_{\dot{\alpha}\beta}\ \phi^{\beta} &= \kappa^5\ \chi_{\dot{\alpha}}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Из (1.11) следует, что каждая компонента биспинора удовлетворяет скалярному инвариантному уравнению шестого порядка:

$$\det t\ \ \phi = \kappa^6 \phi\ . \tag{1.12}$$

Уравнения (1.11) и (1.12) обладают очевидными недостатками. Именно, при "снятии" унитарной симметрии они не переходят в обычные лоренц-инвариантные уравнения, так как содержат производные более высокого порядка. Кроме того, уравнения (1.11) не симметричны и не инвариантны относительно операции "отражения" (1.10): первая система содержит производные первого порядка, вторая – пятого. Чтобы выйти из этого затруднения, Рюль /15/ предложил расширить группу, рассматривая одновременно трансляции в двух дуальных 36-мерных пространствах.

Мы дадим (§ 3) другое определение многокомпонентного импульса, которое, на наш взгляд, приводит к более естественной формулировке теории. Предварительно нам понадобится более детальное исследование алгебры Ли группы $ISL(6)$, которому посвящен следующий параграф.

§ 2. Алгебра Ли группы ISL(6)

Инфинитезимальное представление и операторы Казимира

Группа $ISL(6)$ порождается 70 генераторами однородной группы M^{μ}_{s} и N^{μ}_{s}, где $s = 0,1,\dots,8$, $\mu = 0,1,2,3$ (M^{o}_{o} и N^{o}_{o} исключаются xx)), и 36 генераторами группы трансляций t^{μ}_{s}, причем последние связаны с матрицей $t^{\alpha\dot{\beta}}$ следующим образом:

x) Различные возможности определения операции пространственного отражения рассматриваются в /16/.

xx) В двенадцатимерном представлении алгебры генераторов, рассмотренном в /17/, $N^{o}_{o} = -\frac{1}{2}\gamma^{5}\times\lambda_{o}$. Нетрудно видеть, что однопараметрическая подгруппа, порождаемая этим генератором, сводится к равномерным растяжениям 36-мерного пространства эрмитовых матриц.

$$t^{\alpha\dot\beta} = (\Lambda^s_\mu)^{\alpha\dot\beta}\, t^\mu_s, \qquad t^\mu_s = \tfrac14\, \mathrm{Sp}\,(\Lambda^s_\mu\, t\,), \tag{2.1}$$

где

$$\Lambda^s_\mu = \sigma_\mu \times \lambda_s, \qquad \mathrm{Sp}\,\Lambda^s_\mu\,\Lambda^u_\nu = 4\delta_{\mu\nu}\,\delta_{su}, \tag{2.2}$$

σ_0 – двухрядная единичная матрица, σ_j (j=1,2,3) – спиновые матрицы Паули, λ_s –трехрядные матрицы Гелл–Манна (в (2.1) подразумевается суммирование по s от 0 до 8 и по μ от 0 до 3). Нетрудно выписать правила коммутации для генераторов M^μ_s, N^μ_s и t^μ_s:

$$[\, t^\mu_s, t^\nu_u] = 0 \;; \tag{2.3}$$

$$[M^\mu_s, t^\nu_u] = i\,(\delta_{\mu\nu\rho}\, f_{suv} + \epsilon_{0\mu\nu\rho}\, d_{suv})\, t^\rho_v\,, \tag{2.4}$$

$$[\, N^\mu_s, t^\nu_u] = i\,(\delta_{\mu\nu\rho}\, d_{suv} - \epsilon_{0\mu\nu\rho}\, f_{suv})\, t^\rho_v\,;$$

$$[\, M^\mu_s, M^\nu_u] = i\,(\delta_{\mu\nu\rho}\, f_{suv} + \epsilon_{0\mu\nu\rho}\, d_{suv})\, M^\rho_v\,, \tag{2.5}$$

$$[\, N^\mu_s, N^\nu_u] = -i\,(\delta_{\mu\nu\rho}\, f_{suv} + \epsilon_{0\mu\nu\rho}\, d_{suv})\, M^\rho_v \tag{2.6}$$

$$[\, M^\mu_s, N^\nu_u] = i\,(\delta_{\mu\nu\rho}\, f_{suv} + \epsilon_{0\mu\nu\rho}\, d_{suv})\, M^\rho_v\,. \tag{2.7}$$

Постоянные δ, ϵ, f и d определяются из соотношений:

$$[\sigma_\mu, \sigma_\nu] = 2i\,\epsilon_{0\mu\nu\rho}\,\sigma_\rho\,, \qquad \{\sigma_\mu, \sigma_\nu\} = 2\,\delta_{\mu\nu\rho}\,\sigma_\rho\,,$$
$$[\,\lambda_s, \lambda_u] = 2i\, f_{suv}\,\lambda_v\,, \qquad \{\lambda_s, \lambda_u\} = 2\,d_{suv}\,\lambda_v\,. \tag{2.8}$$

Другими словами, $\epsilon_{0\mu\nu\rho}$ сводится к трехмерной части полностью антисимметричного тензора четвертого ранга $\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}$ (причем $\epsilon_{0123}=1$);

$$\delta_{\mu\nu\rho} = \delta_{\mu\nu}\,\delta_{\rho 0} + \delta_{\nu\rho}\,\delta_{\mu 0} + \delta_{\rho\mu}\,\delta_{\nu 0} - 2\delta_{\mu 0}\,\delta_{\nu 0}\,\delta_{\rho 0}\,, \tag{2.9}$$
$$d_{0uv} = \sqrt{2/3}\;\delta_{uv}\,;$$

$f_{suv} = 0$, если хотя бы один из индексов равен нулю. Значения f_{suv} и d_{suv} при $s, u, v, > 0$ приведены в /22/ (см. также дополнение А, где выписаны некоторые соотношения между постоянными f и d).

Генераторы группы Лоренца M^j и N^j входят в число генераторов группы $SL(6)$:

$$M^j = \sqrt{3/2}\;M^j_0\,, \qquad N^j = \sqrt{3/2}\;N^j_0\,, \quad j = 1,2,3. \tag{2.10}$$

Генераторы F_s группы $SU(3)$ совпадают с генераторами M^0_s:

$$F_s = M^0_s\,, \quad s = 1,2,\ldots,8. \tag{2.11}$$

В частности, аддитивные квантовые числа–гиперзаряд и третья проекция изотопического спина, сохраняющиеся в сильных и электромагнитных взаимодействиях, задаются генераторами:

$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}} M^{\circ}_{8} , \qquad I_{3} = M^{\circ}_{3} . \tag{2.12}$$

Совокупность генераторов M^{μ}_{s} ($s = 0, 1, \ldots, 8$, $\mu = 0,1,2,3$, $M^{\circ}_{o} \equiv 0$) порождает нерелятивистскую группу SU(6).

Для унитарных (бесконечномерных) представлений группы ISL(6) операторы M^{μ}_{s} , N^{μ}_{s} и t^{μ}_{s}– эрмитовы. Однако вместо M и N часто удобнее использовать неэрмитовы операторы

$$K^{\mu}_{s} = ½ (M^{\mu}_{s} - i N^{\mu}_{s}) , \qquad K*^{\mu}_{s} = ½ (M^{\mu}_{s} + i N^{\mu}_{s}), \tag{2.13}$$

которые удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned} [K^{\mu}_{s} , K^{\nu}_{u}] &= i (\delta_{\mu\nu\rho} f_{suv} + \epsilon_{0\mu\nu\rho} d_{suv}) K^{\rho}_{v} , \\ [K*^{\mu}_{s} , K*^{\nu}_{u}] &= i (\delta_{\mu\nu\rho} f_{suv} + \epsilon_{0\mu\nu\rho} d_{suv}) K*^{\rho}_{v} ; \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$[K^{\mu}_{s} , K*^{\nu}_{u}] = 0 ; \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} [t^{\mu}_{s} , K*^{\nu}_{u}] &= ½ (d_{suv} + i f_{suv}) (\delta_{\mu\nu\rho} + i \epsilon_{0\mu\nu\rho}) t^{\rho}_{v} = \\ &= \overline{[\tilde{K}^{\nu}_{u} , t^{\mu}_{s}]} . \end{aligned} \tag{2.16}$$

Определим далее шестирядные матрицы с нулевым шпуром

$$\begin{aligned} K^{\dot{a}}_{\dot{\beta}} &= (\Lambda^{s}_{\mu})^{\dot{a}}_{\dot{\beta}} K^{\mu}_{s} , \\ \overset{*}{K}{}^{a}_{\beta} &= (\Lambda^{s}_{\mu})^{a}_{\beta} \overset{*}{K}{}^{\mu}_{s} \end{aligned} \tag{2.17}$$

(здесь, как и раньше, подразумевается суммирование по μ от 0 до 3 и по s от 0 до 8, причем, по определению, $K^{\circ}_{o} = \overset{*}{K}{}^{\circ}_{o} = 0$). Матрицы K , $\overset{*}{K}$ и t преобразуются по инфинитезимальному представлению группы ISL(6) :

$$K'^{\dot{a}}_{\dot{\beta}} = \overset{*}{A}{}^{-1}{}^{\dot{\sigma}}_{\dot{\beta}} [K^{\dot{r}}_{\dot{\sigma}} + i (a_{\dot{\sigma}\gamma} t^{\gamma\dot{r}} - \frac{1}{6} \delta^{\dot{r}}_{\dot{\sigma}} \, Sp \, at)] \overset{*}{A}{}^{\dot{a}}_{\dot{r}} , \tag{2.18}$$

$$\overset{*}{K}{}'^{a}_{\beta} = A^{a}_{r} [\overset{*}{K}{}^{r}_{\sigma} - i (t^{r\dot{\gamma}} a_{\dot{\gamma}\sigma} - \frac{1}{6} \delta^{r}_{\sigma} \, Sp \, ta)] A^{-1}{}^{\sigma}_{\beta} ;$$

$$t'^{a\dot{\beta}} = A^{a}_{\sigma} t^{\sigma\dot{r}} \overset{*}{A}{}^{\dot{\beta}}_{\dot{r}} . \tag{2.19}$$

Для полупростых групп инфинитезимальное представление совпадает с присоединенным. В нашем случае это не так. Связь между присоединенным и инфинитезимальным представлениями и вывод формул (2.18) даны в дополнении В.

Из (2.18) и (2.19) следует, что тензор[x)]

$$\omega^{a\dot{\beta}} = t^{a\dot{\sigma}} K^{\dot{\beta}}_{\dot{\sigma}} + t^{\sigma\dot{\beta}} \overset{*}{K}{}^{a}_{\sigma} = \omega^{\mu}_{s} (\overset{s}{\Lambda}_{\mu})^{a\dot{\beta}}, \tag{2.20}$$

где

$$\omega^{\mu}_{s} = t^{\nu}_{u} [(\delta_{\mu\nu\rho} d_{suv} - \epsilon_{0\mu\nu\rho} f_{suv}) M^{\rho}_{v} + \tag{2.21}$$

$$+ (\delta_{\mu\nu\rho} f_{suv} + \epsilon_{0\mu\nu\rho} d_{suv}) N^{\rho}_{v}] ,$$

трансляционно инвариантен и преобразуется по закону (2.19). Следовательно, его компоненты ω^{μ}_{s} коммутируют с t^{ν}_{u}. Кроме того, ω удовлетворяет условию ортогональности

$$Sp(\omega \tilde{t}) = \omega^{a\dot{\beta}} \tilde{t}_{\dot{\beta}a} = 0 , \tag{2.22}$$

где $\tilde{t}_{\dot{\beta}a}$ определяется равенством (1.9). Таким образом, 36-вектор ω^{ρ}_{s} может рассматриваться как аналог 4-вектора W_{μ} (вектора Паули-Любанского-Баргмана), позволяющего определить спин в группе Пуанкаре ковариантным образом. Тензор

$$V^{a}_{\dot{\beta}} = \omega^{a\dot{\sigma}} t_{\dot{\sigma}\beta} \quad (Sp\, V = 0) , \tag{2.23}$$

преобразующийся по представлению D (35,1) группы SL(6), порождает малую (стационарную) подгруппу группы ISL(6), оставляющую инвариантным 36-вектор t^{μ}_{s}.

Как уже отмечалось, из закона преобразования (2.19) следует, что det t является оператором Казимира группы ISL(6). Другие полиномиальные инварианты группы могут быть выражены через пять шпуров степеней матрицы V :

$$C_{\ell} = Sp\, V^{\ell} = V^{a_1}_{a_2} V^{a_2}_{a_3} \dots V^{a_\ell}_{a_1} , \quad \ell = 2,3,4,5,6 . \tag{2.24}$$

Это следует из трансляционной инвариантности ω (а, значит, и V) и из закона преобразования V при однородных преобразованиях SL(6) ($V' = A V A^{-1}$).

---

x) Определение, эквивалентное (2.20), дается также в препринте /23/, полученном авторами во время подготовки к печати настоящей работы.

Равенство (2.21) получается из (2.20) при помощи тождества:

$$\Lambda^{\nu}_{u} \Lambda^{\rho}_{v} = (\delta_{\mu\nu\rho} + i\, \epsilon_{0\mu\nu\rho}) (d_{suv} + i f_{suv}) \Lambda^{\mu}_{s} .$$

Представление (2.21) для 36-вектора ω было найдено независимо Ю.В. Новожиловым и И.А. Терентьевым.

Кроме шести операторов Казимира, существуют еще непараметрические инварианты, типа сигнатуры. Найдем эти инварианты в случае, когда $\det t \neq 0$. В силу эрмитовости матрицы t ее определитель вещественен и может быть записан в виде:

$$\det t = \epsilon \kappa^6 , \quad \epsilon = \pm 1 , \quad \kappa > 0 . \tag{2.25}$$

Нетрудно показать (см., например, /14/), что при помощи подходящего $SL(6)$ - преобразования можно привести матрицу t к следующей диагональной форме:

$$t^{a\dot{\beta}} = \kappa \epsilon^{a} \delta^{a\dot{\beta}} \tag{2.26}$$

(без суммирования по a !), где

$$\epsilon^{a} = \pm 1 , \quad \epsilon^1 \geq \epsilon^2 \geq \epsilon^3 \geq \epsilon^4 \geq \epsilon^5 \geq \epsilon^6 . \tag{2.27}$$

Поскольку порядок диагональных элементов матрицы (2.25) безразличен, то тип тензора $t^{a\beta}$ определяется лишь целым числом

$$n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{6} \epsilon_i . \tag{2.28}$$

Число n принимает значения от -3 до 3. Представления, отличающиеся лишь знаком n, являются комплексно сопряженными. Значение n определяет также тип малой группы, причем n и $-n$ соответствуют одной и той же малой группе. При $n=3$, т.е. когда все $\epsilon_i = 1$ и матрица t положительно определена, малая группа совпадает с группой $SU(6)$. Этот тип t мы будем именовать физическим (он соответствует времени-подобному 4-импульсу с положительной энергией). Систему, в которой физический импульс кратен единичному оператору

$$t^{a\dot{\beta}} = \kappa \, \delta^{a\dot{\beta}} , \tag{2.29}$$

назовем $SL(6)$ -системой покоя. В этой системе

$$V^{a}_{\beta} = \kappa^6 M^{a}_{\beta} = \kappa^6 M^{\nu}_{s} (\Lambda^{s}_{\nu})^{a}_{\beta} , \tag{2.30}$$

т.е. V^{a}_{β} с точностью до множителя κ^6, совпадает с матрицей эрмитовых генераторов (M^{ν}_{s}) группы $SU(6)$. При переходе к произвольной $SL(6)$ -системе матрица V приобретает вид:

$$V^{a}_{\beta} = V^{\mu}_{s} (\Lambda^{s}_{\mu})^{a}_{\beta} ,$$

где операторы

$$V^{\mu}_{s} = (\delta_{\mu\nu\rho} + i\epsilon_{0\mu\nu\rho}) (d_{suv} + i f_{suv}) \, \omega^{\nu}_{u} \, \tilde{t}^{\rho}_{v} , \tag{2.31}$$

вообще говоря, неэрмитовы[x]. Поскольку операторы Казимира не зависят от выбора

x) Таким образом, V является обобщением трехмерного комплексного лоренцвектора спина J_ℓ, преобразующегося по представлению $D(3,1)$ группы $SL(2,C)$ и связанного с импульсом p_μ и 4-вектором ω_μ следующим образом:

$$m^2 J_\ell = w_\ell p_0 - w_0 p_\ell - i\epsilon_{jk\ell} w_j p_k , \quad \ell = 1,2,3.$$

Операторы J_ℓ удовлетворяют каноническим перестановочным соотношениям для спина: $[J_k , J_\ell] = i\epsilon_{k\ell m} J_m$ и в системе покоя переходят в эрмитовы операторы M_ℓ.

системы, то в любом унитарном представлении группы ISL(6) они эрмитовы, и их собственные значения, характеризующие неприводимые представления, вещественны.

Мы пришли бы к тому же набору инвариантов, если бы в качестве генераторов малой группы рассматривали тензор

$$V^{\dot\beta}_{\dot a} = \tilde t_{\dot a\sigma} \quad \omega^{\sigma\dot\beta}$$

вместо тензора (2.23). Это видно, например, из того, что в системе покоя $V^{\dot\beta}_{\dot a} = V^a_\beta$.

Результат не изменился бы также, если бы мы ввели вместо $\omega^{a\dot\beta}$ тензор $\tilde\omega$ с нижними индексами:

$$\tilde\omega_{\dot a\beta} = \tilde t_{\dot a\sigma} \; \overset{*}{K}{}^{\sigma}_{\beta} + \tilde t_{\dot\sigma\beta} \; K^{\dot\sigma}_{\dot a} ,$$

и определяли бы V^a_β по формуле:

$$V^a_\beta = t^{a\dot\sigma} \quad \tilde\omega_{\dot\sigma\beta} .$$

Это определение эквивалентно (2.23), так как оба тензора имеют одинаковую природу и совпадают в SL(6) –системе покоя.

Во всех работах /12–20/, посвященных применению в теории симметрии элементарных частиц группы ISL(6), физический 4-импульс отождествляется с оператором t^μ_0, так что 36-вектор t^μ_s рассматривается как обобщенный импульс. Разумеется, сразу возникает вопрос об интерпретации "лишних" 32 компонент нового импульса. Рюль /15/ уходит от этого вопроса, предполагая, что для физических состояний все 32 компоненты $t^\mu_s\,(s\geq 1)$ равны нулю. Однако такой подход, по сути дела, означает отказ от рассмотрения неоднородной ISL(6) группы. Более привлекательна и более последовательна, на наш взгляд, точка зрения Фултона и Весса /14,20/, которые постулируют, что для физических состояний лишь

$$t^\mu_1 = t^\mu_2 = t^\mu_4 = t^\mu_5 = t^\mu_6 = t^\mu_7 = 0 , \qquad (2.32)$$

а 4-векторы t^μ_3 и t^μ_8 (наряду с t^μ_0) остаются произвольными. Основанием для такой гипотезы служит то обстоятельство, что среди t^μ_s лишь 4-векторы t^μ_0, t^μ_3 и t^μ_8 коммутируют с операторами гиперзаряда и третьей проекции изотопического спина (2.12).

В этой связи любопытно отметить, что операторы V^0_3 и V^0_8, пропорциональные в системе покоя операторам I_3 и Y, эрмитовы в любой SL(6) –системе, сохраняющей условие (2.32). Действительно, если t удовлетворяет (2.32), то $\tilde t$ тоже удовлетворяет этому условию, причем

$$
g^{\mu\mu}\tilde{t}_0^{\mu} = \frac{1}{3}(d_2 d_3 + d_1 d_3 + d_1 d_2)\, t_0^{\mu} +
$$

$$
+ \frac{1}{3\sqrt{2}}(d_2 d_3 + d_1 d_3 - 2 d_1 d_2)\, t_8^{\mu} + \frac{1}{\sqrt{6}}(d_2 - d_1)\, d_3 t_3^{\mu}
$$

$$
g^{\mu\mu}\tilde{t}_8^{\mu} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(d_2 d_3 + d_1 d_3 - 2 d_1 d_2)\, t_0^{\mu} +
$$

$$
+ \frac{1}{6}(d_2 d_3 + d_1 d_3 + 4 d_1 d_2)\, t_8^{\mu} + \frac{1}{2\sqrt{3}}(d_2 - d_1)\, d_3 t_3^{\mu}\,, \tag{2.33}
$$

$$
g^{\mu\mu}\tilde{t}_3^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{6}}(d_2 - d_1)\, d_3 t_0^{\mu} + \frac{1}{2\sqrt{3}}(d_2 - d_1)\, d_3 t_8^{\mu} +
$$

$$
+ \frac{d_3}{2}(d_1 + d_2)\, t_3^{\mu},
$$

где

$$
d_1 = \det\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\, t_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} t_8 + t_3\right) = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}}(t_0^0 + t_0^3) + \frac{t_8^0 + t_8^3}{\sqrt{3}} + t_3^0 + t_3^3 & \sqrt{\frac{2}{3}}(t_0^1 - i t_0^2) + \frac{t_8^1 - i t_8^2}{\sqrt{3}} + t_3^1 - i t_3^2 \\ \sqrt{\frac{2}{3}}(t_0^1 + i t_0^2) + \frac{t_8^1 + i t_8^2}{\sqrt{3}} + t_3^1 + i t_3^2 & \sqrt{\frac{2}{3}}(t_0^0 - t_0^3) + \frac{(t_8^0 - t_8^3)}{\sqrt{3}} + t_3^0 - t_3^3 \end{vmatrix}
$$

$$
d_2 = \det\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\, t_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} t_8 - t_3\right), \quad d_3 = \det\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\, t_0 - \frac{2}{\sqrt{3}} t_8\right), \tag{2.34}
$$

$$
d_1 d_2 d_3 = \kappa^6, \tag{2.35}
$$

$g^{\mu\nu}$ – метрический тензор в пространстве Минковского ($g^{00} = -g^{kk} = 1$). Поэтому

$$
V_3^0 = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left(\omega_3^{\nu}\tilde{t}_0^{\nu} + \omega_0^{\nu}\tilde{t}_3^{\nu}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\omega_8^{\nu}\tilde{t}_3^{\nu} + \omega_3^{\nu}\tilde{t}_8^{\nu}\right),
$$

$$
V_8^0 = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left(\omega_8^{\nu}\tilde{t}_0^{\nu} + \omega_0^{\nu}\tilde{t}_8^{\nu}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\omega_3^{\nu}\tilde{t}_3^{\nu} - \omega_8^{\nu}\tilde{t}_8^{\nu}\right). \tag{2.36}
$$

Подгруппа $SL(6)$, оставляющая инвариантным условие (2.32), представляет собой группу $S(L(2) \times L(2) \times L(2))$.

§ 3. Трансляции как миноры третьего порядка матрицы t

Известно, что Дирак получил свое уравнение, "извлекая квадратный корень" из даламбертиана – оператора Казимира группы Пуанкаре. Аналогичную операцию можно провести с оператором Казимира $\det t$ группы $ISL(6)$. Для этого необходимо ввести 400 антисимметричных трилинейных комбинаций из $t^{\alpha\dot\beta}$, преобразующихся по представлению $D(20,20)$ группы $SL(6)$, которые мы назовем унитарными импульсами. Мы увидим, что несмотря на увеличение числа компонент унитарного импульса (400 вместо 36) теория становится на самом деле более симметричной, удовлетворяет принципу соответствия с обычной релятивистской теорией и поэтому, в конечном счете, является более простой.

Определим импульсы $\varphi^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dot\beta_1\dot\beta_2\dot\beta_3}$ как миноры третьего порядка матрицы $t^{\alpha\dot\beta}$:

$$\varphi^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dot\beta_1\dot\beta_2\dot\beta_3} = \begin{vmatrix} t^{\alpha_1\dot\beta_1} & t^{\alpha_1\dot\beta_2} & t^{\alpha_1\dot\beta_3} \\ t^{\alpha_2\dot\beta_1} & t^{\alpha_2\dot\beta_2} & t^{\alpha_2\dot\beta_3} \\ t^{\alpha_3\dot\beta_1} & t^{\alpha_3\dot\beta_2} & t^{\alpha_3\dot\beta_3} \end{vmatrix} \tag{3.1}$$

Очевидно, тензор антисимметричен как при перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ так и при перестановке $\dot\beta_1$, $\dot\beta_2$, $\dot\beta_3$ и, следовательно, преобразуется по представлению $D(20,20)$ группы $SL(6)$. Кроме того, из эрмитовости матрицы t вытекает эрмитовость φ;

$$\bar\varphi^{\dot\beta_1\dot\beta_2\dot\beta_3\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \varphi^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dot\beta_1\dot\beta_2\dot\beta_3}. \tag{3.2}$$

Оператор Казимира $\det t$ выражается квадратично через импульсы (3.1) по формуле Лапласа:

$$\det t = \frac{1}{2}\frac{1}{6^4}\epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3'}\epsilon_{\dot\beta_1\dot\beta_2\dot\beta_3\dot\beta_1'\dot\beta_2'\dot\beta_3'}\cdot \varphi^{\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3'\dot\beta_1'\dot\beta_2'\dot\beta_3'}\varphi^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dot\beta_1\dot\beta_2\dot\beta_3} =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3 \\ \alpha_1'<\alpha_2'<\alpha_3' \\ \alpha_i \neq \alpha_j}} (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\varphi^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dot1\dot2\dot3}\varphi^{\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3'\dot4\dot5\dot6} = m^2 \tag{3.3}$$

(при новом определении импульсов естественно заменить κ^6 на m^2). Таким образом, если поставить в соответствие импульсам $\mathcal{P}$ операторы дифференцирования, то инвариант (3.3) будет дифференциальным оператором второго порядка, подобно оператору Даламбера в 4-мерном пространстве.

Определим дуальный импульс $\tilde{\mathcal{P}}$ по аналогии с 4-мерным случаем, по формуле:

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3\beta_1\beta_2\beta_3} = \frac{1}{36}\,\epsilon_{\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3\dot{\beta}'_1\dot{\beta}'_2\dot{\beta}'_3}\,\epsilon_{\beta_1\beta_2\beta_3\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3}\,\mathcal{P}^{\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3\dot{\beta}'_1\dot{\beta}'_2\dot{\beta}'_3} \tag{3.4}$$

Величина (3.4) равна алгебраическому дополнению минора (3.1) матрицы $t^{\alpha\beta}$ (в этом нетрудно убедиться, пользуясь (3.2)), причем, в отличие от связи между t и $\tilde{t}$, (3.4) дает линейную связь между $\mathcal{P}$ и $\tilde{\mathcal{P}}$. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{6}\,\mathcal{P}^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2\dot{\gamma}_3}\,\tilde{\mathcal{P}}_{\dot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2\dot{\gamma}_3\beta_1\beta_2\beta_3} = m^2 I\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\\ \beta_1\beta_2\beta_3\end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

где $I\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\\ \beta_1\beta_2\beta_3\end{pmatrix}$ – "антисимметричная единица":

$$I\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\\ \beta_1\beta_2\beta_3\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}\delta^{\alpha_1}_{\beta_1} & \delta^{\alpha_1}_{\beta_2} & \delta^{\alpha_1}_{\beta_3}\\ \delta^{\alpha_2}_{\beta_1} & \delta^{\alpha_2}_{\beta_2} & \delta^{\alpha_2}_{\beta_3}\\ \delta^{\alpha_3}_{\beta_1} & \delta^{\alpha_3}_{\beta_2} & \delta^{\alpha_3}_{\beta_3}\end{vmatrix}. \tag{3.6}$$

При $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$, $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$ очевидно,

$$I\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\\ \beta_1\beta_2\beta_3\end{pmatrix} = \delta^{\alpha_1}_{\beta_1}\,\delta^{\alpha_2}_{\beta_2}\,\delta^{\alpha_3}_{\beta_3}.$$

В справедливости (3.5) можно убедиться также при помощи перехода в $SL(6)$ – систему покоя. Действительно, если $t^{\alpha\beta}$ имеет вид (2.29), то

$$\mathcal{P}^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3} = m\,I\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\\ \beta_1\beta_2\beta_3\end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Справедливость (3.5) в данной системе устанавливается непосредственно. После этого легко убедиться, что при произвольных $SL(6)$ -преобразованиях правая часть (3.5) остается инвариантной. Заметим, что аналогичное рассуждение неприменимо к самому вектору $\mathcal{P}^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3}$, поскольку его преобразование не является преобразованием подобия.

Операторы $\mathcal{P}$ коммутируют между собой, а их перестановки с генераторами M и N однородной группы получаются из перестановок $t^{\alpha\beta}$ с M и N, причем нетрудно видеть, что коммутаторы $[M,\mathcal{P}]$ и $[N,\mathcal{P}]$ выражаются в виде линейных комбинаций $\mathcal{P}$. Таким образом, 470 генераторов $\mathcal{P}$, M и N порождают алгебру Ли $\mathfrak{U}$, содержащую 400-мерную инвариантную коммутативную подалгебру (идеал) импульсов. Алгебра $\mathfrak{U}$

имеет шесть операторов Казимира, т.е. столько же, сколько их имеет алгебра Ли 106-параметрической группы. Мы увидим далее, что эти операторы фактически совпадают.

Один из инвариантных операторов алгебры $\mathfrak{U}$ дается равенством (3.3). Чтобы найти остальные инварианты, построим, по аналогии с тензором ω (2.20), тензор $\mathbf{W}$ преобразующийся по представлению D (20,20):

$$
\begin{aligned}
\mathbf{W}^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dot\beta_1\dot\beta_2\dot\beta_3} = \frac{1}{6}\Big(& \varphi^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dot\beta_1\dot\beta_2\dot\sigma} K^{\dot\beta_3}_{\dot\sigma} + \\
+ & \varphi^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dot\beta_1\dot\sigma\dot\beta_3} K^{\dot\beta_2}_{\dot\sigma} + \varphi^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dot\sigma\dot\beta_2\dot\beta_3} K^{\dot\beta_1}_{\dot\sigma} + \\
+ & \varphi^{\alpha_1\alpha_2\sigma\dot\beta_1\dot\beta_2\dot\beta_3} \overset{*}{K}{}^{\alpha_3}_{\sigma} + \varphi^{\alpha_1\sigma\alpha_3\dot\beta_1\dot\beta_2\dot\beta_3} \overset{*}{K}{}^{\alpha_2}_{\sigma} + \\
+ & \varphi^{\sigma\alpha_2\alpha_3\dot\beta_1\dot\beta_2\dot\beta_3} \overset{*}{K}{}^{\alpha_1}_{\sigma} \Big) .
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Можно показать, что тензор $\mathbf{W}$ трансляционно инвариантен, т.е. коммутирует со всеми импульсами φ .

Переходя к $SL(6)$ –системе покоя, нетрудно установить, что тензор V^{α}_{β} (2.23) может быть также записан в виде:

$$
V^{\alpha}_{\beta} = \frac{1}{36} \mathbf{W}^{\alpha_1\alpha_2\alpha\dot\sigma_1\dot\sigma_2\dot\sigma_3} \bar\varphi_{\dot\sigma_1\dot\sigma_2\dot\sigma_3\alpha_1\alpha_2\beta} . \tag{3.9}
$$

Поэтому операторы C_ℓ (2.24) являются операторами Казимира и для алгебры $\mathfrak{U}$. Операторами (3.3) и (2.24) исчерпываются все полиномиальные инварианты алгебры $\mathfrak{U}$.

Разлагая представление D (20, 20) по неприводимым представлениям группы $SU(3) \times SL(2)$, получим[x)]

$$
\begin{aligned}
D(20,20) = & [1;\ 2,2] + 2\,[8;\ 2,2] + [10;\ 2,2] + [\overline{10};\ 2,2] + \\
& + [27;\ 2,2] + [8;\ 4,2] + [8;\ 2,4] + [1;\ 4,4] .
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

---

x) Первое число в каждой скобке в правой части (3.10) есть размерность представления группы $SU(3)$, следующие два числа определяют мультиплетность по группе $SL(2)$. Формула (3.10) легко получается из известного разложения представления $\underline{20}$ группы $SU(6)$ на неприводимые представления $SU(3) \times SU(2)$: $(20) = (8,2) + (1,4)$.

Таким образом, обычный 4–импульс, являющийся унитарным синглетом и лоренцовским 4–вектором, содержится только один раз среди компонент нашего 400–импульса – в первом слагаемом правой части (3.10). Оператор проектирования $D\,(20,20)$ на $[1;\,2,2]$ приведен в дополнении C .

Алгебру $\mathfrak{U}$ естественно рассматривать как алгебру Ли группы

$$\mathcal{P}_u = SL\,(6)/Z_3 \,.\, T_{400}\,, \tag{3.11}$$

где Z_3 – циклическая группа корней третьей степени из единицы, являющаяся нормальным делителем группы $SL(6)$, а T_{400} – аддитивная группа двадцатирядных эрмитовых матриц, преобразующихся по представлению $D\,(20,20)$ группы $SL(6)/Z_3$. Для группы $\mathcal{P}_u$ можно написать и реализацию типа (1.3). Если $X^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dot\beta_1\dot\beta_2\dot\beta_3}$ эрмитов тензор, антисимметричный как по первой, так и по второй тройке индексов, то

$$X'^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dot\beta_1\dot\beta_2\dot\beta_3} = A^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}_{\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3}\, X^{\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3\dot\beta'_1\dot\beta'_2\dot\beta'_3}\, A^{*\,\dot\beta_1\dot\beta_2\dot\beta_3}_{\dot\beta'_1\dot\beta'_2\dot\beta'_3} + a^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dot\beta_1\dot\beta_2\dot\beta_3}\,, \tag{3.12}$$

где

$$A^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}_{\beta_1\beta_2\beta_3} = \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} A^{\alpha_1}_{\beta_1} & A^{\alpha_1}_{\beta_2} & A^{\alpha_1}_{\beta_3} \\ A^{\alpha_2}_{\beta_1} & A^{\alpha_2}_{\beta_2} & A^{\alpha_2}_{\beta_3} \\ A^{\alpha_3}_{\beta_1} & A^{\alpha_3}_{\beta_2} & A^{\alpha_3}_{\beta_3} \end{vmatrix}. \tag{3.13}$$

Подчеркнем, что генераторы трансляций $\mathcal{P}$ теперь выступают как операторы дифференцирования первого (а не третьего!) порядка по переменным X .

Важно отметить, что однозначные конечномерные представления группы $SL(6)/Z_3$ соответствуют частицам с целочисленными электрическим и гипер–зарядом (кварки автоматически исключаются). Низшее нетривиальное представление этой группы, которое мы будем называть спинорным, имеет размерность 20. Так же, как и в теории Дирака, имеется только два неэквивалентных представления низшей размерности, базисы которых мы будем объединять в биспинор

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \\ \chi_{\dot\beta_1\dot\beta_2\dot\beta_3} \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

преобразующийся по представлению $D(20,1)+D(1,\overline{20})$ (это представление становится неприводимым, если рассматривать несобственную группу $\mathcal{P}_u$, включающую операцию отражения, которая меняет местами ϕ и χ).

Для биспинора (3.14) легко написать точный аналог уравнения Дирака:

$$\sum_{\beta_1<\beta_2<\beta_3} \mathcal{P}^{a_1a_2a_3\dot\beta_1\dot\beta_2\dot\beta_3}\chi_{\dot\beta_1\dot\beta_2\dot\beta_3} = m\,\phi^{a_1a_2a_3}$$

$$\sum_{a_1<a_2<a_3} \tilde{\mathcal{P}}_{\dot\beta_1\dot\beta_2\dot\beta_3a_1a_2a_3}\phi^{a_1a_2a_3} = m\,\chi_{\dot\beta_1\dot\beta_2\dot\beta_3}\,. \tag{3.15}$$

Системе из сорока уравнений (3.15) может быть придан более компактный (и более привычный в четырехмерном случае) вид

$$\hat{p}\,\psi = m\,\psi\,, \tag{3.16}$$

если положить

$$p = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{P} \\ \tilde{\mathcal{P}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

§ 4. Возможные применения нарушенной $\mathcal{P}_u$–симметрии

В теориях с высшими симметриями, начиная со схемы $SU(3)$, наибольший успех был связан с рассмотрением нарушенных симметрий. Поскольку группа $\mathcal{P}_u$ содержит $SU(3)$ как подгруппу, то $\mathcal{P}_u$–симметрия неизбежно должна нарушаться. Нарушение симметрии в группе $\mathcal{P}_u$, следуя /14/, разумно ввести как дополнительное условие на векторы состояния. Мы постулируем, что физические состояния являются собственными векторами с нулевыми собственными значениями всех тех компонент 400–импульса, которые не коммутируют с операторами гиперзаряда и изотопического спина (2.12). Пользуясь этим предположением, мы рассчитываем получить формулы для масс частиц и соотношения между формфакторами (ср. /14,20/). Можно надеяться, что в теории нарушенной $\mathcal{P}_u$–симметрии естественным образом получится зависимость массы от спина[x)], поскольку в разложении (3.10) 400–импульса по неприводимым представлениям $SU(3)\times SL(2)$ унитарный синглет встречается дважды с разными значениями спина.

Мы выражаем искреннюю благодарность Д.П. Желобенко за многочисленные полезные обсуждения и ценные консультации по теории представлений. Мы глубоко благодарны также Р.М. Мурадяну и А.Н. Тавхелидзе за плодотворные дискуссии.

x) Напомним, что в теории с 36–импульсом удается получить формулы расщепления масс внутри одного $SU(3)$–мультиплета, в то время как зависимость массы от спина фактически постулируется /14/.

ДОПОЛНЕНИЕ А

Соотношения между постоянными f и d

Структурные постоянные $F_{s\mu,u\nu,v\rho}$ группы SU(6), определяемые из соотношения

$$[\Lambda^s_\mu, \Lambda^u_\nu] = 2i F_{s\mu,u\nu,v\rho} \Lambda^v_\rho, \qquad (A.1)$$

выражаются следующим образом через постоянные δ, ϵ, d и f (см. (28)):

$$F_{s\mu,u\nu,v\rho} = \delta_{\mu\nu\rho} f_{suv} + \epsilon_{0\mu\nu\rho} d_{suv}. \qquad (A.2)$$

Из тождества Якоби для постоянных F вытекает ряд трехчленных квадратичных связей между f и d, которые мы здесь не будем выписывать.

Коммутативность ω^μ_s и t^ν_u приводит к следующим нетривиальным четырехчленным тождествам для рассматриваемых постоянных:

$$f_{usv} d_{swt} - d_{usv} f_{uwt} + f_{utv} d_{uws} - d_{utv} f_{uws} = 0 \qquad (A.3)$$

$$d_{stu} d_{svw} - d_{swu} d_{svt} + f_{stu} f_{svw} - f_{swu} d f_{svt} = 0. \qquad (A.4)$$

ДОПОЛНЕНИЕ В

Присоединенное и инфинитезимальное представления группы ISL (6) и трансляционная инвариантность W

Совокупность 106 генераторов группы ISL (6) может быть задана в виде матрицы 12 x 12:

$$L = \begin{pmatrix} K & 0 \\ it & K^* \end{pmatrix}, \qquad (B.1)$$

которая отвечает записи элементов группы ISL (6) в форме (1.6).

Пусть x – произвольная шестирядная матрица со шпуром, равным нулю, а y – эрмитова матрица 6 x 6. Образуем матрицу

$$X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ iy & x^* \end{pmatrix}, \qquad (B.2)$$

зависящую от 106 вещественных параметров.

Присоединенное представление группы ISL (6) определяется как совокупность преобразований над матрицами типа (B.2), задаваемых формулой:

$$X' = g\ X\ g^{-1}, \qquad (B.3)$$

где $g \subset ISL(6)$ и имеет вид (1.6). Шестирядные матрицы x , x^* и y при этом преобразуются по формулам:

$$x'{}_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta} = \overset{*}{A}{}^{-1}{}_{\dot\alpha}^{\dot\sigma}\ x_{\dot\sigma}^{\dot\tau}\ \overset{*}{A}{}_{\dot\tau}^{\dot\beta}$$

$$\overset{*}{x}{}'{}_{\beta}^{\alpha} = A_{\sigma}^{\alpha}\ \overset{*}{x}{}_{\tau}^{\sigma}\ A^{-1}{}_{\beta}^{\tau}\ ; \qquad (B.4)$$

$$y'^{\alpha\dot\beta} = A_{\sigma}^{\alpha}\ y^{\sigma\dot\tau}\ \overset{*}{A}{}_{\dot\tau}^{\dot\beta} + (A_{\sigma}^{\alpha}\ \overset{*}{x}{}_{\tau}^{\sigma}\ A^{\tau-1}{}_{\rho}\ a^{\rho\dot\beta} - a^{\alpha\dot\sigma}\ \overset{*}{A}{}^{-1}{}_{\dot\sigma}^{\dot\tau}\ x_{\dot\tau}^{\dot\rho}\ \overset{*}{A}{}_{\dot\rho}^{\dot\beta}). \qquad (B.5)$$

Пусть теперь дана двенадцатирядная матрица

$$\tilde X = \begin{pmatrix} x & -iy \\ 0 & x^* \end{pmatrix}, \qquad (B.6)$$

которая преобразуется по представлению, "дуальному" к (B.3):

$$\tilde X' = \tilde g\ \tilde X\ \tilde g^{-1}, \qquad (B.7)$$

где

$$\tilde g = \begin{pmatrix} \overset{*}{A}{}^{-1} & -\tilde a A \\ 0 & A \end{pmatrix}, \qquad \tilde g^{-1} = \begin{pmatrix} A^* & \overset{*}{A}\tilde a \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}, \qquad (B.8)$$

так что x' и $\overset{*}{x}{}'$ задаются прежними формулами (B.4), а

$$y'_{\dot\alpha\beta} = \overset{*}{A}{}^{-1}{}_{\dot\alpha}^{\dot\sigma}\ y_{\dot\sigma\tau}\ A^{-1}{}_{\beta}^{\tau} + i(\tilde a_{\dot\alpha\sigma}\ A_{\tau}^{\sigma}\ \overset{*}{x}{}_{\rho}^{\tau}\ A^{-1}{}_{\beta}^{\rho} - \overset{*}{A}{}^{-1}{}_{\dot\alpha}^{\dot\sigma}\ x_{\dot\sigma}^{\dot\tau}\ \overset{*}{A}{}_{\dot\tau}^{\dot\rho}\ a_{\dot\rho\beta}). \qquad (B.9)$$

Закон преобразования матрицы генераторов L находится из условия сохранения билинейной формы:

$$Sp(\tilde X L) = Sp(x K + yt + x^* K^*) \qquad (B.10)$$

при преобразованиях из ISL(6) и из сохранения свойств матрицы L: $Sp K = Sp K^* = 0$, $t = t^*$. Принимая во внимание (B.7) – (B.9), отсюда получаем закон преобразования (2.18–19) для инфинитезимального представления группы ISL (6) . Таким образом, при преобразованиях 36-мерной трансляции

$$t'^{\alpha\dot\beta} = t^{\alpha\dot\beta}, \quad K'{}_{\dot\beta}^{\dot\alpha} = K_{\dot\beta}^{\dot\alpha} + i(a_{\dot\beta\sigma}\ t^{\sigma\dot\alpha} - \frac{\delta_{\dot\beta}^{\dot\alpha}}{6}\ a_{\dot\tau\sigma}\ t^{\sigma\dot\tau})$$

$$\overset{*}{K}{}'{}_{\beta}^{\alpha} = \overset{*}{K}{}_{\beta}^{\alpha} - i(t^{\alpha\dot\sigma}\ a_{\dot\sigma\beta} - \frac{\delta_{\beta}^{\alpha}}{6}\ t^{\sigma\dot\tau}\ a_{\dot\tau\sigma}). \qquad (B.11)$$

Отсюда следует трансляционная инвариантность тензора W (3.8), в чем нетрудно убедиться, производя подстановку (B.11) в (3.8) и учитывая (3.1). Следовательно, W коммутирует с $t^{\alpha\dot\beta}$, а поэтому и с импульсами $\mathcal{P}$.

ДОПОЛНЕНИЕ С

Оператор проектирования 400-импульса на физический импульс

Запишем каждый из индексов α_i, $\dot\beta_i$ у $\mathcal{P}^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dot\beta_1\dot\beta_2\dot\beta_3}$ в виде двойного индекса $\alpha_i=(a_i,k_i)$, $\dot\beta_j=(b_j,\ell_j)$, где a_i, $b_i=1, 2, 3$ отвечают группе $SU(3)$, а k_i, $\ell_i=1, 2$ – группе $SL(2)$. Физический 4-мерный импульс имеет вид:

$$\hat{\Pi}\,\mathcal{P}, \tag{C.1}$$

где оператор проектирования $\hat{\Pi}$ дается равенством:

$$54\,\hat{\Pi}^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dot\beta_1\dot\beta_2\dot\beta_3}_{\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3\dot\beta'_1\dot\beta'_2\dot\beta'_3} = I\begin{pmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ a'_1 a'_2 a'_3\end{pmatrix} I\begin{pmatrix} b_1 b_2 b_3 \\ b'_1 b'_2 b'_3\end{pmatrix}\times$$

$$\times\{\delta^{b'_1}_{a'_1}\delta^{b'_2}_{a'_2}\delta^{b'_3}_{a'_3}[(\epsilon^{k_1k_2}\epsilon_{k'_1k'_2}\delta^{k_3}_{k'_3}+\epsilon^{k_2k_3}\epsilon_{k'_2k'_3}\delta^{k_1}_{k'_1}+$$

$$+\epsilon^{k_3k_1}\epsilon_{k'_3k'_1}\delta^{k_2}_{k'_2})(\epsilon^{\dot\ell_1\dot\ell_2}\epsilon_{\dot\ell'_1\dot\ell'_2}\delta^{\dot\ell_3}_{\dot\ell'_3}+\epsilon^{\dot\ell_2\dot\ell_3}\epsilon_{\dot\ell'_2\dot\ell'_3}\delta^{\dot\ell_1}_{\dot\ell'_1}+$$

$$+\epsilon^{\dot\ell_3\dot\ell_1}\epsilon_{\dot\ell'_3\dot\ell'_1}\delta^{\dot\ell_2}_{\dot\ell'_2})+$$

$$+\epsilon^{k_1k_2}\epsilon^{\dot\ell_1\dot\ell_2}\epsilon_{k'_1k'_2}\epsilon_{\dot\ell'_1\dot\ell'_2}\delta^{k_3}_{k'_3}\delta^{\dot\ell_3}_{\dot\ell'_3}+$$

$$+\epsilon^{k_2k_3}\epsilon^{\dot\ell_2\dot\ell_3}\epsilon_{k'_2k'_3}\epsilon_{\dot\ell'_2\dot\ell'_3}\delta^{k_1}_{k'_1}\delta^{\dot\ell_1}_{\dot\ell'_1}+$$

$$+\epsilon^{k_3k_1}\epsilon^{\dot\ell_3\dot\ell_1}\epsilon_{k'_3k'_1}\epsilon_{\dot\ell'_3\dot\ell'_1}\delta^{k_2}_{k'_2}\delta^{\dot\ell_2}_{\dot\ell'_2}]+$$

$$+2[\delta^{b'_1}_{a'_1}\delta^{b'_2}_{a'_2}\delta^{b'_3}_{a'_3}(\epsilon^{k_1k_2}\epsilon_{k'_1k'_2}\delta^{k_3}_{k'_3}+\epsilon^{k_2k_3}\epsilon_{k'_2k'_3}\delta^{k_1}_{k'_1}+$$

$$+\epsilon^{k_3k_1}\epsilon_{k'_3k'_1}\delta^{k_2}_{k'_2}) - \delta^{b'_1}_{a'_3}\delta^{b'_2}_{a'_2}\delta^{b'_3}_{a'_1}(\epsilon^{k_1k_2}\epsilon_{k'_1k'_2}\delta^{k_3}_{k'_3} +$$

$$+\epsilon^{k_2k_3}\epsilon_{k'_2k'_3}\delta^{k_1}_{k'_1}) - \delta^{b'_1}_{a'_1}\delta^{b'_2}_{a'_3}\delta^{b'_3}_{a'_2}(\epsilon^{k_1k_2}\epsilon_{k'_1k'_2}\delta^{k_3}_{k'_3} + \epsilon^{k_3k_1}\epsilon_{k'_3k'_1}\delta^{k_2}_{k'_2})]$$

$$-\delta^{b'_1}_{a'_2}\delta^{b'_2}_{a'_1}\delta^{b'_3}_{a'_3}(\epsilon^{k_2k_3}\epsilon_{k'_2k'_3}\delta^{k'_1}_{k'_1} + \epsilon^{k_3k_1}\epsilon_{k'_3k'_1}\delta^{k_2}_{k'_2})]\times$$

$$\times(\epsilon^{\dot l_1\dot l_2}\epsilon_{\dot l'_1\dot l'_2}\delta^{\dot l_3}_{\dot l'_3} + \epsilon^{\dot l_2\dot l_3}\epsilon_{\dot l'_2\dot l'_3}\delta^{\dot l_1}_{\dot l'_1} + \epsilon^{\dot l_3\dot l_1}\epsilon_{\dot l'_3\dot l'_1}\delta^{\dot l_2}_{\dot l'_2}) +$$

$$+2[\delta^{b'_1}_{a'_1}\delta^{b'_2}_{a'_2}\delta^{b'_3}_{a'_3}(\epsilon^{\dot l_1\dot l_2}\epsilon_{\dot l'_1\dot l'_2}\delta^{\dot l_3}_{\dot l'_3} + \epsilon^{\dot l_2\dot l_3}\epsilon_{\dot l'_2\dot l'_3}\delta^{\dot l_1}_{\dot l'_1} +$$

$$+\epsilon^{\dot l_3\dot l_1}\epsilon_{\dot l'_3\dot l'_1}\delta^{\dot l_2}_{\dot l'_2}) - \delta^{b'_1}_{a'_3}\delta^{b'_2}_{a'_2}\delta^{b'_3}_{a'_1}(\epsilon^{\dot l_1\dot l_2}\epsilon_{\dot l'_1\dot l'_2}\delta^{\dot l_3}_{\dot l'_3} +$$

$$+\epsilon^{\dot l_2\dot l_3}\epsilon_{\dot l'_2\dot l'_3}\delta^{\dot l_1}_{\dot l'_1}) - \delta^{b'_1}_{a'_1}\delta^{b'_2}_{a'_3}\delta^{b'_3}_{a'_2}(\epsilon^{\dot l_1\dot l_2}\epsilon_{\dot l'_1\dot l'_2}\delta^{\dot l_3}_{\dot l'_3} +$$

$$+\epsilon^{\dot l_3\dot l_1}\epsilon_{\dot l'_3\dot l'_1}\delta^{\dot l_2}_{\dot l'_2}) - \delta^{b'_1}_{a'_2}\delta^{b'_2}_{a'_1}\delta^{b'_3}_{a'_3}(\epsilon^{\dot l_2\dot l_3}\epsilon_{\dot l'_2\dot l'_3}\delta^{\dot l_1}_{\dot l'_1} +$$

$$+\epsilon^{\dot l_3\dot l_1}\epsilon_{\dot l'_3\dot l'_1}\delta^{\dot l_2}_{\dot l'_2})](\epsilon^{k_1k_2}\epsilon_{k'_1k'_2}\delta^{k_3}_{k'_3} + \epsilon^{k_2k_3}\epsilon_{k'_2k'_3}\delta^{k_1}_{k'_1} +$$

$$+\epsilon^{k_3k_1}\epsilon_{k'_3k'_1}\delta^{k_2}_{k'_2}) \quad .$$

Литература

1. F.Gürsey and L.A.Radicati. Phys. Rev. Lett., 13, 173 (1964).

   A.Pais. Phys. Rev. Lett., 13, 175 (1964) .

2. B.Sakita. Phys. Rev., 136, B 1, 756 (1964).

3. K.T.Mahanthappa and E.C.G.Sudarshan. Phys. Rev. Lett., 14, 163 (1965).
4. E.P.Wigner. Phys. Rev., 51, 106 (1937).

5. R.Delbourgo, A.Salam, J.Strathdee. Proceed. Roy. Soc. A284, 146 (1965).

   R.Delbourgo, M.A.Rashid, A.Salam, J.Strathdee. The Covariant Theory of strong Interaction Symmetries, II. Preprint IC (65/10, Trieste (1965).

6. J.M.Charap and P.T.Matthews. On the Covariant Extension of SU(6), Preprint IC/65/6, Trieste (1965).

7. M.A.B.Beg and A.Pais. Lorentz Invariance and the Interpretation of SU(6), Theory I and II. Preprints, New York (1964).

8. Н.Н. Боголюбов, Нгуен Ван Хьеу, Д.Стоянов, Б.В.Струминский, А.Н.Тавхелидзе, В.Шелест. Релятивистски-инвариантные уравнения для составных частиц и формфакторы. Препринт ОИЯИ, Д-2075, Дубна (1965).

9. L.Michel. Extensions of the Poincare Group and SU(6) Symmetry Preprint Bures-sur-Yvette (1965).

10. R.Roman and J.J.Aghassi, Phys. Lett, 14, 68 (1965).

11. C.Fronsdal. Some Unitary Representations of a Non-Compact Form of SU(6). Preprint IC/65/8. Trieste (1965).

12. L.Michel and Sakita. Group of Invariance of a Relativistic Supermultiplet Theory to appear in Annals de l'Inst. H. Poincaré, 2 (1965).

13 T.Fulton and J.Wess. Phys Lett., 14, 57 (1965).

14. T.Fulton and J.Wess. Phys. Letters. 14, 334 (1965).

15. W.Rühl, A Relativistic Generalization of the SU(6) Symmetry Group. Preprint CERN, 10058/TH 505, Geneva (1964).

W.Rühl. Baryons and Mesons in a Theory which Combines Relativistic Invariance with SU(3) Symmetry. Preprint CERN 65/ 7035 TH 514 Geneva (1965).

W.Rühl. Phys. Lett., 14, 346 (1965).

16. H.Bacry and J.Nuyts. Remarks on an Enlarged Poincaré Group: Inhomogeneous SL (6,C) Group. Preprint CERN, 10068/ TH 506 Geneva (1964).

17. V.G.Kadyshevsky, R.M.Muradyan, A.N.Tavkhelidze and I.T.Todorov. SU (6) Symmetry and Its Possible Generalizations. Preprint JINR D- 1929, Dubna (1964); Phys. Lett., 15, (1965), 180 and 182.

18. S.K.Bose and Yu.M.Shirokov, A.Relativistic Extension of SU(6). Preprint, Delhi (1965).

19. Yu.V.Novozhilov and I.A.Terentjev. Phys. Lett., 15, 86 (1965).

20. T.Fulton and J.Wess. Phys. Lett., 15, 177 (1965).

21. Л.С.Понтрягин. Непрерывные группы. ГИТТЛ 1954 г.

22. M.Gell-Mann. Phys. Rev., 125, 1067 (1962).

23. H.Bacry and A.Kihlberg, On a Class of Generalized Poincaré Groups. Inhomogeneous SL(n,c). Preprint CERN, 64/426/5, TH 532, Geneva (1964).

24. H.Bacry. On Some Classical Space-Time Groups and Their "SU(6) Generalizations" . Preprint CERN, 65/319/5 TH 526. Geneva (1965).

Рукопись поступила в издательский отдел
17 апреля 1965 г.