2118

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2118

Р.М. Мир-Касимов

ОБ ОСОБЕННОСТИ "ФОКУСИРОВКИ" В Р-ПРОСТРАНСТВЕ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1965

Р-2118

Р.М. Мир-Касимов

ОБ ОСОБЕННОСТИ "ФОКУСИРОВКИ" В Р-ПРОСТРАНСТВЕ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Направлено в ЖЭТФ

1. Введение

В последнее время в ряде работ /1,2,3/ развивалась теория поля, в которой вместо обычного "плоского" импульсного пространства вводилось p -пространство постоянной кривизны. В основе этого обобщения теории поля лежит понятие сдвига p -пространства постоянной кривизны. В отличие от обычного пространства Минковского, где сдвиги образуют коммутативную группу, здесь сдвиги некоммутативны и не образуют группы. Естественно, что такое сильное изменение геометрии, наряду с явным прогрессом (устранение расходимостей), приносит и значительные трудности. Одно из таких усложнений, так называемая особенность "фокусировки", рассматривалось Ю.А.Гольфандом в работе /1/, где был предложен способ регуляризации этой особенности (нормированный сдвиг).

Для разъяснения этого явления рассмотрим простейшую петлю второго порядка - поляризационный оператор (рис. 1).

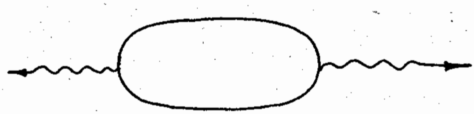

Рис. 1.

Заметим, что особенность "фокусировки" возникает только в диаграммах, содержащих замкнутые фермионные петли. Вместо δ -функции $\delta(\ell + t)$, выражающей закон сохранения энергии-импульса в обычной теории, здесь возникает так называемый матричный элемент операторов сдвига

$$\langle p \,|\, \hat{d}_0(\ell)\, \hat{d}_0(-t) \,|\, p \rangle \qquad (1.1)$$

(см. /2/), являющийся обобщением δ -функции на случай p -пространства постоянной кривизны. Используя явный вид оператора сдвига /1/, легко показать, что этот матричный элемент должен давать вклад не только в очевидном случае, когда $\ell = t$; но и при любых фиксированных ℓ и t, в точке p, удовлетворяющей условию

$$p\ell = pt = -1 . \qquad (1.2)$$

Последние два уравнения определяют в четырехмерном p -пространстве двумерную поверхность. Исходя из классического дираковского определения δ -функции, эту ситуацию можно было бы выразить словами: "аргумент δ -функции обращается в нуль на двумерной поверхности". Очевидно, что построение последовательной теории поля на основе такой величины будет весьма затруднительным.

В настоящей заметке мы покажем, что было бы более правильным не задавать δ -функцию свойствами, проявляющимися при интегрировании ее в произведении с другими функциями, а исходить из разложения по некоторым полным системам, тесно связанным с геометрией p -пространства постоянной кривизны. При таком построении особенность "фокусировки" не дает вклада в матричные элементы операторов сдвига.

2. Проективная двумерная модель теории поля

Мы будем для простоты пользоваться двумерной моделью рассматриваемого варианта обобщенной теории поля. А именно, все векторы импульсов будут считаться принадлежащими двумерному пространству постоянной кривизны. Собственно координаты в этом пространстве определяются проективным образом при помощи трехмерной сферы. Если обозначить через $p_\alpha (\alpha = 1,2)$ векторы двумерного пространства постоянной кривизны, а через $\mathcal{P}_i\ (i=1,2,3)$ векторы трехмерного евклидова пространства, то имеют место соотношения

$$p_\alpha = \frac{\mathcal{P}_\alpha}{\mathcal{P}_3},$$

$$\mathcal{P}_1^2 + \mathcal{P}_2^2 + \mathcal{P}_3^2 = 1 . \tag{2.1}$$

Формула для расстояния $s(p,q)$ в проективных координатах имеет чрезвычайно простой вид:

$$\cos s(p,q) = \mathcal{P}\, Q . \tag{2.2}$$

Здесь Q_i - проективные координаты, соответствующие вектору q. Таким образом, расстояние между точками p -пространства постоянной кривизны $s(p,q)$ есть просто угол, образованный двумя векторами трехмерного пространства. Следовательно, группа движений пространства постоянной кривизны изоморфна группе вращений трехмерной сферы.

Можно все построение теории поля вести в проективных координатах. Мы приведем здесь лишь необходимую нам формулу сдвига (ср. с формулой (2.1) работы [1])

$$\hat{D}_0(\mathfrak{L}) = \hat{T}_A \hat{T}_{\mathfrak{L}} . \tag{2.3}$$

Операция $\hat{T}_M$ есть трехмерное отражение в гиперплоскости, перпендикулярной единичному вектору M, и имеет вид

$$\hat{T}_M \mathcal{P} = \mathcal{P} - 2\mathcal{P}(\mathcal{P} M) . \tag{2.4}$$

A - вектор вакуума с координатами $\{0, 0, 1\}$.

3. Геометрический смысл особенности "фокусировки"

Покажем, что особенность "фокусировки" связана с существованием точек, неподвижных относительно движений p -пространства постоянной кривизны. Рассмотрим матричный элемент (1.1). Записывая в его в виде

$$\langle p | \hat{d}_0(\ell)\, \hat{d}_0(-t) | p \rangle = \langle \hat{d}_0(t)\, \hat{d}_0(-\ell)\, p | p \rangle \tag{3.1}$$

и раскрывая действие оператора $\hat{d}_0(t)\hat{d}_0(-\ell)$ на вектор p, удовлетворяющий условиям (1.2), видим, что вектор p неподвижен относительно этого преобразования

$$\hat{d}_0(t)\, \hat{d}_0(-\ell)\, p = p . \tag{3.2}$$

В проективной записи условие неподвижности (1.2) имеет вид

$$(\mathcal{P} \mathfrak{L}) = (\mathcal{P} \mathfrak{J}) = 0 . \tag{3.3a}$$

Случай диагонального матричного элемента (1.1) рассмотрен в работе [1]. Легко видеть, что аналогичная ситуация складывается в диагональных матричных элементах произведений произвольного числа операторов сдвига. В случае трех операторов сдвига $\langle p | \hat{d}_0(\ell)\hat{d}_0(s)\hat{d}_0(\ell) | p \rangle$ имеем соотношение

$$\hat{D}_0(\mathfrak{L})\, \hat{D}_0(S)\, \hat{D}_0^{-1}(\mathfrak{L})\, \mathcal{P} = \hat{T}_{\hat{T}_A \hat{T}_{\mathfrak{L}} A}\, \hat{T}_{\hat{T}_A \hat{T}_{\mathfrak{L}} S}\, \mathcal{P} = \mathcal{P} , \tag{3.4}$$

которое получается, если воспользоваться очевидными формулами

$$\hat{T}_M \hat{T}_M = 1 , \qquad \hat{T}_M \hat{T}_N \hat{T}_M = \hat{T}_{\hat{T}_M N} . \tag{3.5}$$

Условие неподвижности вектора $\mathcal{P}$ имеет здесь вид

$$(\hat{T}_A \hat{T}_{\mathfrak{L}} A, \mathcal{P}) = (\hat{T}_A \hat{T}_{\mathfrak{L}} S, \mathcal{P}) = 0 . \tag{3.3б}$$

В случае произведения произвольного числа операторов сдвига

$$\langle p | \hat{d}_0(\ell_1)\, \hat{d}_0(\ell_2) \ldots \hat{d}_0(\ell_n) | p \rangle \tag{3.6}$$

мы можем всегда представить сложный оператор, стоящий в обкладках, в виде произведения двух отражений:

$$\hat{D}_0(\mathfrak{L}_1)\, \hat{D}_0(\mathfrak{L}_2) \ldots \hat{D}_0(\mathfrak{L}_n)\, \mathcal{P} = \hat{T}_M \hat{T}_N \mathcal{P} , \tag{3.7}$$

где M и N зависят, вообще говоря, от всех параметров $\mathfrak{L}_1, \ldots \mathfrak{L}_n$

$$M = M(\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_n) ; \quad N = N(\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_n) .$$

Условия неподвижности в этом случае следующие:

$$(\mathcal{P} M) = (\mathcal{P} N) = 0. \tag{3.36}$$

Мы видим, что хотя сдвиг является однозначной операцией и разным значениям параметров соответствуют разные преобразования пространства, для каждого оператора, построенного из сдвигов, существуют точки, неподвижные относительно действия этого оператора. Зная результат действия оператора на такую точку, мы не можем восстановить параметры этого преобразования. Из-за этого и возникает особенность "фокусировки".

Отсюда ясен способ, которым можно устранить особенность "фокусировки". Нужно различать сдвиги не по результату их действия на некоторый вектор, а как преобразования пространства. Это достигается переходом к интегрированию по группе движений p -пространства в аппарате S -матрицы.

Полезно сравнить матричный элемент (3.6) с соответствующим выражением обычной теории x)

$$\langle p \,|\, \hat{d}_0(\ell_1) \ldots \hat{d}_0(\ell_n) \,|\, p \rangle = \delta(\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_n) \,. \tag{3.8}$$

Мы видим, что в обычной теории из-за коммутативности сдвигов зависимость от p отсутствует, вследствие чего особенность рассмотренного типа не может возникнуть.

4. Определение δ -функции в пространстве постоянной кривизны

Хорошо известно, что в случае евклидова пространства δ -функция со всеми своими свойствами задается разложением

$$\delta(p-q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{ix(p-q)} \, d\overset{2}{x} \,. \tag{4.1}$$

Величина e^{ipx} тесно связана с группой сдвигов евклидова пространства. А именно, всякому вектору двумерного евклидова x -пространства $X = (x_1 x_2)$ однозначно соответствует неприводимое одномерное представление группы сдвигов p -пространства. Экспонента e^{ipx} может быть взята в качестве базиса этого представления. Действие сдвига на экспоненту следующее:

$$\hat{d}(k)\, e^{ipx} = e^{i(p+k)x} \,. \tag{4.2}$$

---

x) В обычной теории действие оператора сдвига $d(\ell)$ сводится к сложению импульсов

$$\hat{d}_0(\ell)\,|p\rangle = |\ell + p\rangle \,.$$

Другими словами, $\hat{d}(k) = e^{ikx}$ в данном неприводимом представлении есть также и матрица, осуществляющая операцию сдвига. Поскольку группа сдвигов евклидова пространства абелева, все ее представления одномерны и действие матрицы есть попросту умножение на число.

Более того, ни в одном представлении невозможно отличить вектор в пространстве неприводимого представления от оператора сдвига, действующего в этом пространстве. Иначе говоря, невозможно отличить точки пространства от элементов группы.

В случае теории поля в p -пространстве постоянной кривизны симметрия между координатами точки и векторами, параметризующими сдвиги пространства постоянной кривизны видимым образом нарушается (см. разд. 2 работы /2/). Мы покажем сейчас, что эта асимметрия в развиваемой теории поля не является принципиальной и может быть устранена, если обобщение формулы (4.1) на случай пространства постоянной кривизны производить с учетом свойств группы движений этого пространства.

Как указано в работе /1/, мы можем ввести сферические координаты в пространстве постоянной кривизны, после чего элемент объема будет иметь вид

$$d\,\Omega = \sin d\theta \; d\phi \,. \tag{4.3}$$

Известно, что элемент объема пространства постоянной кривизны, или, что то же, элемент поверхности трехмерной сферы, может быть дополнен до инвариантного элемента объема группы трехмерных вращений, а именно,

$$dg = \frac{1}{(8\pi)^2} \sin\theta \; d\psi \; d\theta \; d\phi \,, \tag{4.4}$$

где ϕ, θ и ψ – углы Эйлера. Все интегралы по пространству постоянной кривизны могут быть тривиально превращены в интегралы по группе вращений следующим образом:

$$\int f(\theta,\phi) \sin\theta \; d\theta \; d\phi = 4\pi \int f(\theta,\phi)\, dg \,. \tag{4.5}$$

Пользуясь этим соотношением, мы можем в формулировке теории поля интегралы по пространству постоянной кривизны заменить интегралами по группе движений. Эта замена носит чисто формальный характер, пока не рассматриваются матричные элементы операторов сдвига.

При интегрировании по пространству постоянной кривизны естественно пользоваться сферическими функциями $Y^{\ell}_m(\theta,\phi)$, которые представляют собой полную систему. Произвольная функция на сфере $f(\theta,\phi)$ может быть разложена по ним в ряд Фурье

$$f(\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} c^{\ell}_m(f)\, Y^{\ell}_m(\theta,\phi) \,, \tag{4.6}$$

где

$$c^{\ell}_m(f) = \int \overset{*}{Y}{}^{\ell}_m(\theta',\phi')\, f(\theta',\phi') \sin\theta' \, d\theta' \, d\phi' \,. \tag{4.7}$$

Подставляя (4.7) в (4.6), имеем

$$f(\theta,\phi) = \int \sin\theta'\, d\theta'\, d\phi'\, f(\theta',\phi') \sum_{\ell,m} \overset{*}{Y}{}^{\ell}_{m}(\theta',\phi')\, Y^{\ell}_{m}(\theta,\phi), \tag{4.8}$$

т.е. при рассматриваемом интегрировании величина $\sum_{\ell,m} \overset{*}{Y}{}^{\ell}_{m}(\theta,\phi)\, Y^{\ell}_{m}(\theta'\phi')$ действует как δ -функция

$$\sum_{\ell,m} \overset{*}{Y}{}^{\ell}_{m}(\theta',\phi')\, Y^{\ell}_{m}(\theta,\phi) = \delta(\theta-\theta')\,\delta(\phi-\phi'). \tag{4.9}$$

(Мы в дальнейшем для краткости не выписываем пределов суммирования по ℓ и m). Поскольку величины углов θ и ϕ полностью задают векторы пространства постоянной кривизны, мы можем записать (4.9) в виде

$$\langle p|q\rangle = \delta(p,q) = \sum_{\ell,m} \overset{*}{Y}{}^{\ell}_{m}(p)\, Y^{\ell}_{m}(q), \tag{4.9a}$$

где p и q – векторы со сферическими координатами (ϕ,θ) и (ϕ',θ') соответственно. Равенство (3.9) может рассматриваться как определение матричного элемента $\langle p|q\rangle$.

Рассмотрим теперь матричный элемент $\langle p|\hat d_o(\ell)|q\rangle$, который может быть записан также в виде $\langle p|\hat d_o(\ell)q\rangle$. Используя разложение (4.9), имеем

$$\langle p|\hat d_o(\ell)\, q\rangle = \sum_{\ell,m} \overset{*}{Y}{}^{\ell}_{m}(p)\, Y^{\ell}_{m}(\hat d_o(\ell)\, q) = \sum_{\ell,m,n} \overset{*}{Y}{}^{\ell}_{m}(p)\, T^{\ell}_{mn}(\hat d_o(\ell))\, Y^{\ell}_{n}(q), \tag{4.10}$$

где $T^{\ell}_{mn}(\hat d_o(\ell))$ – матрица преобразования $\hat d_o(\ell)$, действующая в пространстве представления группы вращений с весом ℓ. Выражение $T^{\ell}_{mn}(\hat d_o(\ell))$ означает, что указанная матрица зависит от параметров преобразования $\hat d_o(\ell)$, например, соответствующих углов Эйлера.

В формуле (4.10) вновь проявляется асимметрия между векторами пространства и параметрами преобразований. Однако теперь ясен способ, которым мы можем видоизменить наши определения и сделать теорию полностью симметричной по отношению к импульсам всех частиц, независимо от того, каким образом строится из них лагранжиан (см. /2/). А именно, обобщим разложение (4.6) на случай интегрирования по группе. Ряд Фурье будет иметь вид:

$$f(\phi,\theta,\psi) = \sum_{\ell=0} \sum_{m,n=-\ell}^{\ell} c^{\ell}_{mn}\, T^{\ell}_{mn}(\phi,\theta,\psi). \tag{4.11}$$

Напомним, что матричные элементы $T^{\ell}_{mn}(\phi,\theta,\psi)$, зависящие от непрерывных параметров ϕ,θ,ψ, одновременно представляют собой полную систему функций на группе. Коэффициенты c^{e}_{mn} имеют вид[x)]

x) Для простоты мы опускаем здесь нормирующие множители, которые, вообще говоря, разные для различных ℓ.

$$c^{\ell}_{mn}(f) = \int \overset{*}{T}{}^{\ell}_{mn}(\phi',\theta',\psi')\, f(\varphi',\theta',\psi') \sin\theta'\, d\phi'\, d\theta'\, d\psi'. \tag{4.12}$$

Матричный элемент $\langle p|q\rangle$ разлагается по формуле

$$\langle p|q\rangle = \sum_{\ell,m,k} \overset{*}{T}{}^{\ell}_{mn}(g_p)\, T^{\ell}_{mn}(g_q) = \langle g_p|g_q\rangle. \tag{4.13}$$

Символ $T^{\ell}_{mn}(g_p)$ поясним следующим образом. Зададимся фиксированным вектором B (например, вектором вакуума $B = A = (0,0,1)$.), а все остальные векторы $\mathcal{P}$ будем получать, действуя на B соответствующим преобразованием сдвига

$$\mathcal{P} = \hat d_o(k_p)\, B. \tag{4.14}$$

Таким образом, мы каждому вектору $\mathcal{P}$ сопоставляем некоторый сдвиг $\hat d_o(k_p)$. Если оператор сдвига записывать в k -параметризации (см. формулу (1.1) работы /1/), то вектор k_p совпадает с p. Ясно, что это соответствие взаимно однозначно. Поэтому всегда справедлива формула

$$\langle p|q\rangle = \langle \hat d_o(k_p) B|\hat d_o(k_q) B\rangle = \langle B|\hat d_o^{-1}(k_p)\, \hat d_o(k_q)|B\rangle. \tag{4.15}$$

Поскольку существенен лишь сам факт совпадения преобразований $\hat d_o(k_p)$ и $\hat d_o(k_q)$, а вектор B – произвольный, то мы можем сделать еще один шаг и написать

$$\langle p|q\rangle = \langle \hat d_o(k_p)\, \hat d_o(k_q)\rangle. \tag{4.16}$$

Равенство (4.16) оправдывает замену (4.9a) на (4.13). Матричный элемент (4.10) запишется теперь в полностью симметричном виде:

$$\langle p|\hat d_o(\ell)|q\rangle = \sum_{\ell,m} \overset{*}{T}{}^{\ell}_{mn}(\hat d_o(k_p))\, T^{\ell}_{ms}(\hat d_o(\ell))\, T^{\ell}_{sn}(\hat d_o(k_q)). \tag{4.17}$$

Вернемся теперь к особенности фокусировки и рассмотрим матричный элемент (1.1)

$$\langle p|\hat d_o(\ell)\, \hat d_o^{-1}(t)|p\rangle =$$

$$= \sum_{\ell,m,n,r,s} \overset{*}{T}{}^{\ell}_{mn}(\hat d_o(k_p))\, T^{\ell}_{ms}(\hat d_0(\ell))\, T^{\ell}_{sr}(\hat d_0^{-1}(t))\, T^{\ell}_{rn}(\hat d_0(k_p)) =$$

$$= \sum_{\ell,m,n,r,s} T^{\ell}_{rn}(\hat d_o(k_p))\, T^{\ell}_{nm}(\hat d_o^{-1}(k_p))\, T^{\ell}_{ms}(\hat d_o(\ell))\, T^{\ell}_{sr}(\hat d_0^{-1}(t)) = \tag{4.18}$$

$$= \sum_{\ell,m,r,s} T^{\ell}_{rm}(\hat d_0(k_p)\, \hat d_0^{-1}(k_p)) \cdot T^{\ell}_{ms}(\hat d_0(\ell))\, T^{\ell}_{sr}(\hat d_0^{-1}(t)) =$$

$$= \sum \overset{*}{T}{}^{\ell}_{rs}(\hat d_0(t))\, T^{\ell}_{rs}(\hat d_0(\ell)) = \langle t|\ell\rangle = \delta(\ell,t).$$

Мы воспользовались здесь основным свойством представления

$$T(\hat d_o(\ell))\, T(\hat d_o(t)) = T(\hat d_o(\ell)\, \hat d_o(t)) \tag{4.19}$$

и свойством унитарности матриц T

$$T^{\ell}_{mn}(\hat{d}_0(\ell)) = \overset{*}{T}{}^{\ell}_{nm}(\hat{d}_0^{-1}(\ell)) . \tag{4.20}$$

Цепочка равенств (4.18) показывает, что зависимости от p на самом деле нет в полном соответствии с формулой (3.8). Этим доказано отсутствие особенности "фокусировки".

5. Уточнение аппарата теории поля

В этом разделе мы покажем, что весь аппарат теории поля в случае p -пространства постоянной кривизны можно видоизменить в соответствии с обобщенным законом сохранения энергии-импульса (4.13).

Прежде всего отметим, что при переходе от интегрирования по p - пространству к интегрированию по группе движений p -пространства постоянной кривизны как будто исчезает выделенная роль сдвигов p -пространства$^{x)}$ (см. формулу (2.16) работы /2/). Мы покажем, что в случае интегрирования по группе выделенную роль сдвигов можно сохранить.

Укажем прежде всего, что если вектор , параметризующий сдвиг, имеет следующие координаты:

$$K_1 = \sin\theta \sin\phi , \quad K_2 = \sin\theta \cos\phi , \quad K_3 = \cos\phi , \tag{5.1}$$

то матрица сдвига $\hat{D}_0(K)$ будет иметь вид

$$\hat{D}_0(K) = g(-\phi)\, g(\theta)\, g(\phi) = g^{-1}(\phi)\, g(\theta)\, g(\phi) , \tag{5.2}$$

где

$$g(\phi) = \begin{Vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}; \quad g(\theta) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{Vmatrix} \tag{5.3}$$

(см. /4/). Иными словами, сдвиги $\hat{D}_0(K) = \hat{d}_0(\theta,\phi)$ выделяются из произвольного вращения $g(\phi,\theta,\psi)$, зависящего от трех углов Эйлера ϕ,θ,ψ , условием $\psi = -\phi$.

Теперь мы можем перейти к обобщению аппарата квазиполей /2/. Ограничимся, как и в работах /1,2/, случаем псевдоскалярной мезодинамики. Мы будем считать, что

---

x) Переход к интегрированию по группе движений p -пространства можно считать обобщением понятия виртуального импульса. В настоящей работе это обобщение минимально, так как величины матричных элементов остаются прежними. Однако если полностью отказаться от выделенной роли сдвигов, то получается далеко идущие физические следствия.

квазиполя нуклонов ψ и мезонов ϕ являются функциями на группе движений p-пространства.

$$\psi = \psi(g_p) ; \qquad \phi = \phi(g_k) . \tag{5.4}$$

Единственное ограничение, накладываемое на операторы квазиполей ψ и ϕ – это вид спариваний

$$\langle \bar{\psi}(g_p)\psi(g_q)\rangle_0 = (m+\hat{p})^{-1}\,\delta(g_p, g_q) ,$$
$$\langle \phi(g_k)\phi(g_s)\rangle_0 = (\mu^2+k^2)^{-1}\delta(g_k, g_s)\,\delta(\phi_k+\psi_k) . \tag{5.5}$$

Остальные попарные произведения квазиполей при усреднении по вакууму дают нуль. Лагранжиан взаимодействия имеет вид

$$\hat{\Lambda} = g\langle\bar{\psi}\,|\hat{\phi}\,|\,\psi\rangle = g\int \bar{\psi}(g_p)\langle g_p|\,g_k\,|\,g_q\rangle\,\psi(g_q)\,\phi(g_k)\,dg_p\,dg_q\,dg_k . \tag{5.6}$$

Легко видеть, что при вычислении матричных элементов "лишние" интегрирования, добавленные при переходе от элемента пространственного объема к элементу группового объема, тривиально уничтожаются. Чтобы матричные элементы, получаемые при разложении S -матрицы

$$S = e^{i\hat{\Lambda}} , \tag{5.7}$$

полностью совпадали с приведенными, например, в работе /2/, необходимо поделить матричный элемент, соответствующий произвольной диаграмме, на $(2\pi)^a$, где a – число независимых петель (состоящих как из фермионных, так и бозонных линий).

6. Замечания

Сделаем ряд замечаний относительно ограниченности рассмотренной двумерной сферической модели теории поля.

Первое замечание связано с тем, что в настоящей работе рассмотрен случай сферической геометрии p -пространства. Эта геометрия не может быть использована для разумного обобщения теории поля, так как здесь не удовлетворяется принцип соответствия. Физический смысл можно придать лишь случаю эллиптической геометрии. При переходе от сферической геометрии к эллиптической формула для сдвига

$$Q = \hat{D}_0(\mathfrak{L})\,\mathfrak{P} , \tag{6.1}$$

если ее рассматривать как уравнение относительно $\mathfrak{L}$, имеет два решения (это так называемые "классические" и "неклассические" сдвиги , см. /1/). Легко видеть, что особенность "фокусировки" имеет место только для "классических" сдвигов. Включение же "неклассических" сдвигов, необходимое при переходе к эллиптической геометрии, не виосит в наши рассуждения никаких изменений.

Второе замечание касается усложнений, которые возникают при увеличении числа измерений пространства постоянной кривизны. В случае четырех измерений условия (3.3а, б, в), выделяющие особенность "фокусировки", задают нам двумерные поверхности. Однако это усложнение никак не сказывается на изложенных рассуждениях.

Третье замечание стоит сделать в связи с тем, что в некоторых вариантах рассматриваемой теории поля изучалось не эллиптическое, а псевдоэллиптическое p -пространство (см., например, /3/). Спектр представлений группы движений этого пространства гораздо сложнее, чем в случае эллиптического пространства. Из-за некомпактности группы движений здесь возникают бесконечномерные представления. Однако можно показать, что существует серия унитарных бесконечномерных представлений, образующая полную систему функций /5/. По этим функциям существует, следовательно, разложение Фурье, и наши рассуждения, использующие только разложимость и унитарность, могут быть полностью повторены и здесь.

Результат данной работы состоит в том, что выяснен геометрический смысл особенности "фокусировки" и доказано, что эта опасность в рассматриваемом обобщении теории поля является фиктивной и легко обходится, если построение аппарата матрицы рассеяния производить с учетом групповых свойств операции сдвига p -пространства постоянной кривизны.

Автор приносит свою благодарность Ю.А.Гольфанду и В.Г.Кадышевскому за обсуждение работы.

Литература

1. Ю.А.Гольфанд. ЖЭТФ, 44, 1248 (1963).
2. Ю.А.Гольфанд. ЖЭТФ, 43, 256 (1962).
3. В.Г.Кадышевский. ДАН СССР, 147, 1336 (1962).
4. И.М.Гельфанд, Р.А.Минлос, З.Я.Шапиро. Представления группы вращений и группы Лоренца. Физматгиз, 1958.
5. М.А.Наймарк. Линейные представления группы Лоренца. Физматгиз, 1958.
6. Н.Я.Виленкин. Специальные функции, связанные с представлениями класса 1 групп движений пространств постоянной кривизны. Труды Московского математического общества. Том 12, Москва, 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 апреля 1965 г.