2117

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2117

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р.М. Мир-Касимов

О ПЕРЕНОРМИРОВКЕ МАССЫ В ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1965

Р-2117

Р.М. Мир-Касимов

О ПЕРЕНОРМИРОВКЕ МАССЫ В ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Направлено в ЖЭТФ

1. Введение

В работах [1,2,3] изучалась квантовая теория поля, в которой вместо обычного p -пространства вводилось пространство постоянной кривизны. При вычислении матричных элементов S -матрицы в этой теории возникает ряд специфических особенностей, связанных с геометрическими свойствами p -пространства постоянной кривизны. В частности, процедура перенормировки здесь изменяется коренным образом. Во-первых, из-за конечности объема p -пространства все интегралы оказываются сходящимися. Поэтому перенормировки конечны. Во-вторых, перенормировки не сводятся к простому умножению затравочных величин на постоянные множители, как в обычной теории поля, а являются сложной процедурой, связанной с решением некоторых интегральных уравнений, что приводит в конечном счете к размазке массы. (О константе взаимодействия пока нельзя высказать аналогичное утверждение).

В настоящей заметке мы рассмотрим перенормировку массы мезона в псевдоскалярной мезонной теории и покажем, что из-за так называемого эффекта "недиагональности" масса мезона "размазывается".

Оператор "действия" псевдоскалярной мезонной теории естественно обобщается на случай p -пространства постоянной кривизны следующим образом

$$\hat{\Lambda} = g \int \bar{\psi}(p) \langle p \,|\, \hat{d}(k) \,|\, q \rangle \gamma^5 \psi(q)\, \phi(k)\, dO_p\, dO_q\, dO_k \,. \qquad (1.1)$$

Явление "недиагональности" связано со свойствами матричного элемента оператора сдвига $\langle p \,|\, \hat{d}(k) \,|\, q \rangle$ (см. [1]). Строго говоря, явлений "недиагональности" два. Одно из них является прямым следствием некоммутативности сдвигов p -пространства. Мы заниматься им здесь не будем. Приведем лишь для сравнения с обычной теорией матричный элемент операторов сдвига, возникающий в случае вершины

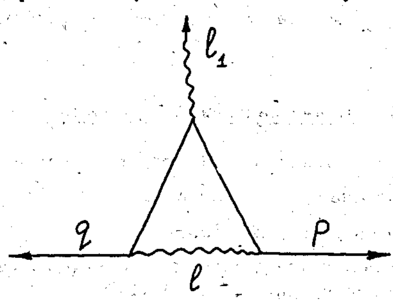

Рис. 1.

Он имеет вид

$$\langle p\,|\,\hat d_0(\ell)\,\hat d_0(\ell_1)\,\hat d_0^{-1}(\ell)\,|\,q\rangle . \qquad (1.2)$$

Поскольку сдвиги не коммутируют, мы не можем $\hat d_0(\ell)$ поменять местами с $\hat d_0(\ell_1)$ и сократить с $d_0^{-1}(\ell)$. Вследствие этого получается сложная зависимость от виртуального импульса ℓ, которая не позволяет снять все интегрирования и получить, как в обычной теории, δ-функцию, зависящую только от внешних импульсов. Матричный элемент (1.2) в обычной теории равен δ-функции

$$\langle p\,|\,\hat d_0(\ell)\,\hat d_0(\ell_1)\,\hat d_0^{-1}(\ell)\,|\,q\rangle=\delta(p-\ell_1-q). \qquad (1.3)$$

Рассмотрим теперь "недиагональность" второго типа. Поскольку координаты пространства постоянной кривизны могут быть построены при помощи проектирования из пятимерного пространства следующим образом

$$p_a=\frac{\mathcal{P}_a}{\mathcal{P}_0}\ (a=1,2,3,4), \qquad \text{причем} \qquad \mathcal{P}_1^2+\ldots+\mathcal{P}_4^2+\mathcal{P}_0^2=1, \qquad (1.4)$$

то легко все формулы записать в пятимерном виде. В частности, получаем следующее выражение для сдвига

$$Q=\hat D_0(\mathfrak{L})\,\mathcal{P}=\mathcal{P}-2\mathfrak{L}(\mathcal{P}\mathfrak{L})-2A(A\mathcal{P})+4A(A\mathfrak{L})(\mathcal{P}\mathfrak{L}). \qquad (1.5)$$

Рассматривая это выражение как уравнение относительно $\mathfrak{L}$, имеем два различных решения

$$\mathfrak{L}_{PQ}=\frac{\mathcal{P}-Q+2A(AQ)}{\sqrt{2(1-(\mathcal{P}Q)+2(A\mathcal{P})(AQ))}}\,; \qquad (1.6а)$$

$$\mathfrak{L}'_{PQ}=\frac{\mathcal{P}+Q-2A(AQ)}{\sqrt{2(1+(\mathcal{P}Q)-2(A\mathcal{P})(AQ))}}\,. \qquad (1.6б)$$

Отсюда следует, что для любых $\mathcal{P}$ и Q существуют два сдвига $\hat D_0(\mathfrak{L}_{\mathcal{P}Q})$ и $\hat D_0(\mathfrak{L}'_{\mathcal{P}Q})$, переводящих $\mathcal{P}$ в Q. Поэтому матричный элемент $\langle q|\hat d_0(\ell)|p\rangle$ разбивается в сумму двух членов x)

$$\langle q\,|\,\hat d_0(\ell)\,|\,p\rangle=\{\delta(\ell,\ell_{pq})+\delta(\ell,\ell'_{pq})\}. \qquad (1.7)$$

Второй член в формуле (1.5) и обуславливает эффект "недиагональности".

2. Поляризационный оператор

Хорошей иллюстрацией к сказанному является поляризационный оператор. Как указано в работе /2/, поляризационный оператор во втором порядке псевдоскалярной мезодинамики, соответствующий диаграмме (рис. 2)

x) Мы пишем в обкладках $\hat d_0(\ell)$ вместо $\hat d(\ell)$, то есть считаем выделенной спинорную часть $d_s(\ell)$ оператора сдвига (см. /2/).

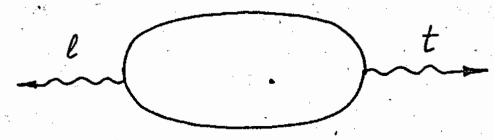

Рис. 2.

имеет вид x):

$$\Pi(\ell,t)=\mathrm{Tr}\{\hat G_0\gamma_5\hat d(\ell)\hat G_0\gamma_5\hat d(-t)\}. \qquad (2.1)$$

Здесь $\hat G_0$ обозначает функцию распространения фермиона которая с помощью пятимерного вектора-пропагатора

$$Q_i=(\delta_{ij}-(1-m)A_iA_j)\,\mathcal{P}_j/(\mathcal{P}A)\ (i,j=1,\ldots,5) \qquad (2.2)$$

записывается следующим образом

$$\hat G_0\gamma^5=(\Gamma^i Q_i)^{-1}. \qquad (2.3)$$

(Матрицы Γ^i введены Ю.А.Гольфандом для построения спиноров в p-пространстве постоянной кривизны). Укажем здесь заодно и вид спинорной части оператора сдвига

$$\hat D_s(\mathfrak{L})=\hat{\mathfrak{L}}\Gamma^5, \qquad (2.4)$$

где $\hat{\mathfrak{L}}=\mathfrak{L}_i\Gamma^i$.

Выражение под знаком Tr можно преобразовать следующим образом

$$\{\hat G_0\Gamma^5\hat D(\mathfrak{L})\hat G_0\Gamma^5\hat D^{-1}(\mathfrak{T})\}t=$$

$$=\{(\Gamma^i Q_i)^{-1}[\hat D(\mathfrak{L})(\Gamma^j Q_j)^{-1}\hat D^{-1}(\mathfrak{L})]\hat D(\mathfrak{L})\hat D^{-1}(\mathfrak{T})\}= \qquad (2.5)$$

$$=\{(\Gamma^i Q_i)^{-1}(\Gamma^j Q'_j)^{-1}\hat D(\mathfrak{L})\hat D^{-1}(\mathfrak{T})\}.$$

Здесь через Q'_i обозначен вектор-пропагатор

$$Q'_{ij}=(\delta_{ij}-(1-m)A'_iA'_j)\,\mathcal{P}'_j/(\mathcal{P}A'), \qquad (2.6)$$

x) Символ Tr обозначает здесь полный след оператора, стоящего в скобках (суммирование по спинорным индексам и интегрирование по p-пространству). Ниже суммирование по спинорным индексам обозначается через Sp.

где A' "сдвинутый" вектор вакуума ($A=(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)$)

$$A' = \hat{D}_o(\mathfrak{L})\,A\,. \tag{2.7}$$

Поляризационный оператор принимает вид

$$\Pi(\ell,t) = \int d\Omega p\ \mathrm{Sp}\left\{\frac{(\Gamma^i Q_i)(\Gamma^j Q_j)\hat{D}_s(\mathfrak{L})\hat{D}_s^{-1}(\mathfrak{T})}{Q^2\ Q'^2}\right\}\langle p|\hat{D}_0(\mathfrak{L})\hat{D}_0(\mathfrak{T})|p\rangle. \tag{2.8}$$

Величина матричного элемента $\langle p|\hat{D}_o(\mathfrak{L})\hat{D}^{-1}_o(\mathfrak{T})|p\rangle$ может быть получена из формулы (1.7). Подставляя туда вместо q величину $\hat{D}_0^{-1}(\mathfrak{T})\,p$, имеем

$$\langle p\,|\,\hat{D}_0(\mathfrak{L})\,\hat{D}_0^{-1}(\mathfrak{T})\,|p\rangle = \delta(\ell,t) + \delta(\ell,t'), \tag{2.9}$$

через t'_μ здесь обозначена величина $\dfrac{(\mathfrak{L}'\mathcal{P}_Q)_\mu}{(\mathfrak{L}'\mathcal{P}_Q)_5}$ при $Q = D_0^{-1}(\mathfrak{T})\mathcal{P}$ x). В пятимерной записи она имеет следующий вид

$$\mathfrak{T}' = \frac{\mathcal{P} - \mathfrak{T}(\mathcal{P}\mathfrak{T})}{\sqrt{1-(\mathcal{P}\mathfrak{T})^2}}\,. \tag{2.10}$$

Из формулы (2.3) следует, что выражение для поляризационного оператора (2.1) можно разбить на две части – диагональную $D(\ell,t)$ и недиагональную $D_n(\ell,t)$

$$\Pi(\ell,t) = D(\ell,t) + D_n(\ell,t)\,. \tag{2.11}$$

При устремлении радиуса кривизны p -пространства к бесконечности $D(\ell,t)$ переходит в поляризационный оператор обычной теории. Величина $D(\ell,t)$ была вычислена Ю.А.Гольфандом и приводится в работе [3]. В настоящей работе мы вычислим и исследуем недиагональную часть поляризационного оператора $D_n(\ell,t)$. Входящий в подынтегральное выражение (2.8) шпур легко вычислить, если учесть соотношения антикоммутации матриц Γ

$$\Gamma^i\Gamma^j + \Gamma^j\Gamma^i = 2\delta^{ij} \tag{2.12}$$

и соотношения

$$(\mathfrak{L}\mathfrak{T}) = (\mathfrak{T}\mathfrak{T}) = 0\,, \tag{2.13}$$

вытекающие из вида дельта-функции $\delta(\ell,t')$. Пренебрегая повсюду в числителе величиной m по сравнению с 1, получаем

---

x) Мы в нашем изложении пользуемся для векторов импульсов то четырехмерными обозначениями, то проективными пятимерными. Это не грозит никакими недоразумениями, если помнить, что все вычисления могут быть проделаны над пятимерными векторами, после чего надо совершить переход к четырехмерным величинам по формуле (1.4). Поскольку интегрирование по виртуальным импульсам четырехмерное, то δ -функции обязательно должны зависеть только от четырехмерных векторов.

$$\mathrm{Sp}\left\{\frac{QQ'\mathfrak{L}\mathfrak{T}}{Q^2\ Q'^2}\right\} = 8\,\frac{[(\mathcal{P}\mathfrak{L})^2(A\mathfrak{L})^2 - (\mathcal{P}\mathfrak{T})^2(A\mathfrak{T})^2](A\mathfrak{T})(A\mathfrak{L})}{[1-(1-m^2)(\mathcal{P}\mathfrak{L})(A\mathfrak{L})+(\mathcal{P}\mathfrak{T})(A\mathfrak{T}))^2]}\,\cdot$$

$$\frac{[-(\mathcal{P}\mathfrak{L})^2+(\mathcal{P}\mathfrak{T})^2+(\mathcal{P}\mathfrak{L})^2(A\mathfrak{L})^2-(\mathcal{P}\mathfrak{T})^2(A\mathfrak{T})^2]}{[1-(1-m^2)((\mathcal{P}\mathfrak{L})(A\mathfrak{L})-(\mathcal{P}\mathfrak{T})(A\mathfrak{T}))^2]}\,. \tag{2.14}$$

Для окончательного вычисления недиагональной части остается выяснить, как действует δ -функция $\delta(\ell,t')$. Функция $\delta(p,q)$ при интегрировании по эллиптическому пространству действует, как обычно, по формуле

$$\int\delta(p,q)\,f(p)\,d\Omega p = f(q)\,. \tag{2.15}$$

Для выяснения механизма действия $\delta(\ell,t')$ удобно перейти в такую систему координат в эллиптическом пространстве, в которых $\delta(\ell,t')$ распадается в произведение четырех одномерных дельта-функций, только часть из которых зависит от p. Оказывается, что таким свойством обладает некоторая полярная система. Прежде чем искать эту систему переменных, заметим, что подынтегральное выражение в формуле (2.8), как следует из (2.14), обладает свойством проективной инвариантности относительно вектора $\mathcal{P}$, то есть не меняется при переходе от вектора $\mathcal{P}$ $k-\mathcal{P}$. Поэтому в $D_n(\ell,t)$ мы можем перейти от интегрирования по эллиптическому пространству к интегрированию по сферическому пространству. При этом интегрирование будет инвариантно относительно пятимерных вращений вектора $\mathcal{P}$.

Совершим теперь вращение проективной пятимерной сферы так, чтобы 5-вектор T перешел в вектор с координатами $\{0,0,0,0,1\}$ и введем полярные координаты ϕ,θ,η,ρ (см.[1]), изменяющиеся в пределах $0\le\phi\le 2\pi$, $0\le\theta,\ \eta,\rho\le\pi$, причем ρ отсчитывается от направления единичного 5-вектора T, а углы ϕ,θ,η в плоскости, перпендикулярной к T, – от направления вектора $\mathfrak{L}$.

Рассмотрим теперь преобразование δ -функции при переходе в полярную систему координат. Интегрирование по сферическому p -пространству есть фактически интегрирование по пятимерной сферической поверхности единичного радиуса. Поэтому мы можем написать:

$$\begin{aligned}&\int f(p)\,\delta(p,q)\,d\Omega p =\\ &= \int f(\rho,\eta,\theta,\phi)\,A(\rho,\eta,\theta,\phi)\,\delta(\rho-\rho_q)\,\delta(\eta-\eta_q)\,\delta(\theta-\theta_q)\,\delta(\phi-\phi_q)\times\\ &\times \sin^3\rho\,\sin^2\eta\,\sin\theta\,d\rho\,d\eta\,d\theta\,d\phi =\\ &= f(\rho_q,\eta_q,\theta_q,\phi_q) = f(q)\,.\end{aligned} \tag{2.16}$$

Здесь $\rho_q, \eta_q, \theta_q, \phi_q$ – полярные координаты вектора q, а функция $A(\rho,\eta,\theta,\phi)$ определяется условием нормировки дельта-функции. Чтобы интеграл от дельта- функции равнялся 1, функцию A следует положить равной

$$A(\rho,\eta,\theta,\phi) = \frac{1}{\sin^3\rho \sin^2\eta \sin\theta}. \tag{2.17}$$

Тогда

$$\delta(p,q) = \delta(\rho-\rho_q)\,\delta(\eta-\eta_q)\,\delta(\theta-\theta_q)\,\delta(\phi-\phi_q)\,A(\rho,\eta,\theta,\phi). \tag{2.18}$$

Интересующий нас вектор $\mathcal{J}'$ имеет следующие координаты $\eta_{\mathcal{J}'}=\eta_p$, $\theta_{\mathcal{J}'}=\theta_p$, $\phi_{\mathcal{J}'}=\phi_p$; $\rho_{\mathcal{J}'}$ не зависит от вектора p. Это легко усмотреть из разложения $\mathcal{P}$ по $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}'=\mathfrak{L}$, которое получается из соотношения (2.10)

$$\mathcal{P} = \mathcal{J}'(\mathcal{P}\mathcal{J}') + \mathcal{J}(\mathcal{P}\mathcal{J}).$$

Поэтому $\delta(\ell,t')$ запишется в виде:

$$\delta(\ell,t') = \frac{\delta(\rho_{\mathcal{J}'}-\rho_{\mathfrak{L}})\,\delta(\eta_{\mathcal{P}}-\eta_{\mathfrak{L}})\,\delta(\theta_{\mathcal{P}}-\theta_{\mathfrak{L}})\,\delta(\phi_{\mathcal{P}}-\phi_{\mathfrak{L}})}{\sin^3\rho_{\mathcal{J}'}\,\sin^2\eta_{\mathcal{P}}\,\sin\theta_{\mathcal{P}}}. \tag{2.19}$$

Для того, чтобы придать формуле окончательный вид, заметим, что

$$\rho_{\mathcal{J}'} = \arccos(\mathcal{J}'\mathcal{J}) = \pi/2, \tag{2.20}$$

поэтому справедливо соотношение

$$\delta(\rho_{\mathcal{J}'}-\rho_{\mathfrak{L}}) = \delta(\rho_{\mathfrak{L}}-\pi/2) = \delta(\cos\rho_{\mathfrak{L}}) = \delta(\mathfrak{L}\mathcal{J}) = \frac{\delta(1+\ell t)}{(A\mathfrak{L})(A\mathcal{J})}. \tag{2.21}$$

Мы имеем теперь

$$\delta(\ell,t') = \frac{\delta(\eta_{\mathcal{P}})\,\delta(\theta_{\mathcal{P}})\,\delta(\phi_{\mathcal{P}})\,\delta(1+\ell t)}{\sin^2\eta_{\mathcal{J}'}\,\sin\theta_{\mathcal{J}'}\,(A\mathfrak{L})(A\mathcal{J})}. \tag{2.22}$$

Интегрирования по $\eta_{\mathcal{P}}, \theta_{\mathcal{P}}$ и $\phi_{\mathcal{P}}$ снимаются за счет дельта-функций, оставшийся интеграл по $\rho_{\mathcal{P}}$ можно вычислить. Окончательно для ядра недиагональной части получаем следующее выражение:

$$D_n(\ell,t) = \frac{2}{e(d_+-d_-)}\,[F(d_-)-F(d_+)]\,\delta(1+\ell t), \tag{2.23}$$

где

$$F(d) = (e_1 - d e_2 + (1+d)^2 e_3)\,T(d) - 2d\,e_3$$

$$T(d) = \frac{2(1-d)}{\sqrt{1-2d}}\,\ln\frac{\sqrt{1-2d}-1}{\sqrt{1-2d}+1} + \frac{2(1+d)}{\sqrt{1+2d}}\,\ln\frac{\sqrt{1+2d}+1}{\sqrt{1+2d}-1}, \tag{2.24}$$

причем введены следующие обозначения

$$d_\pm = \frac{(\nu^2-\mu^2)[-2+\beta(\mu^2+\nu^2)] \pm 4\mu\nu\sqrt{\beta^2(\mu^2+\nu^2)-1}}{2\beta(\mu^2+\nu^2)^2};$$

$$e_1 = (\nu^2-\mu^2)^2; \qquad e_2 = 4(\nu^2-\mu^2)(\nu^2+\mu^2-1);$$

$$e_3 = 4(\nu^2+\mu^2)(\nu^2+\mu^2-2); \qquad e = \beta^2(\nu^2+\mu^2)^2$$

$$\mu = (A\mathcal{J}); \qquad \nu = (A\mathfrak{L}); \qquad \beta = (1-m^2). \tag{2.25}$$

Замечание. Векторы $\mathcal{J}$ и $\mathfrak{L}$ имеют физический смысл пятимерных импульсов частиц лишь в специальной системе координат, где $A = \{0,0,0,0,1\}$. Поэтому в окончательном выражении нужно вернуться в эту систему координат.

3. Учет радиационных поправок второго порядка

Зная выражение для поляризационного оператора во втором порядке, мы можем вычислить оператор Грина мезона в g^2-приближении, суммируя следующую цепочку диаграмм

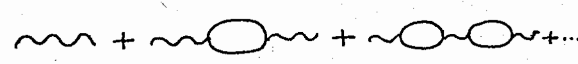

Рис. 3.

Вычисление сводится, как обычно, к суммированию геометрической прогрессии. В результате для оператора Грина получаем выражение

$$\hat{G}(\ell,t) = (\ell^2 + \mu^2/4 + \hat{\Pi})^{-1}. \tag{3.1}$$

Отметим здесь, что в отличие от обычной теории, перенормировка массы в теории поля в p-пространстве постоянной кривизны не есть просто сдвиг массы за счет "обрастания" виртуальными парами. Эффект перенормировки значительно усложняется из-за недиагональности поляризационного оператора.

Для исследования этого эффекта "нелокальной" перенормировки вспомним уравнение Клейна-Гордона, оператор которого в p-пространстве есть, как известно, просто релятивистская связь между квадратом энергии импульса и массой и может рассматриваться как определение массы. Решение этого уравнения

$$(p^2+m^2)\,\underset{=}{\phi}(p) = 0 \tag{3.2}$$

единственно и выражает собой релятивистскую связь импульса и массы

$$\underset{=}{\phi}(p) = \delta(p^2+m^2)\,\phi(\vec{p}). \tag{3.3}$$

Замечание. Как известно, переход от евклидовского к псевдоевклидовскому (физическому) квадрату 4-вектора совершается с помощью замены $p^2 \to -p^2$. Все реальные связи между величинами должны писаться для псевдоевклидовых векторов. Однако нам удобно мыслить до самого последнего момента в евклидовой форме и лишь в окончательных выражениях переходить к псевдоевклидовым векторам. Удобство такого способа вытекает из евклидовой формулировки теории поля.

В связи с этим отметим, что особенность решения уравнения лежит как раз в области отрицательных p^2 ($p^2 = -m^2$).

В случае теории поля в p-пространстве постоянной кривизны в качестве массы мезона, перенормированной в g^2-приближении, следует рассматривать величину

$$\frac{\mu_1^2}{4} = \frac{\mu^2}{4} + \hat{\Pi}, \tag{3.4}$$

которая является интегральным оператором. Обобщенное таким образом уравнение (3.2) описывает эффект размазки массы мезона. Вводя обозначения, смысл которых ясен из нижеследующего выражения

$$\Pi(\ell, t) = D(\ell, t) + D_n(\ell, t) = g^2\Psi(\ell^2)\,\delta(\ell, t) + g^2\Phi(\ell^2, t^2)\,\delta(1+\ell t), \tag{3.5}$$

мы можем записать наше уравнение в виде

$$\left(\ell^2 + \frac{\mu^2}{4} + g^2\Psi(\ell^2)\right)\phi(\ell) + g^2\int d\Omega_t\,\delta(1+\ell t)\,\Phi(\ell^2, t^2)\,\phi(t) = 0. \tag{3.6}$$

4. Исследование интегрального уравнения

Уравнение (3.6) весьма сложно. Поэтому для получения предварительных сведений о функции $\phi(\ell)$ рассмотрим некоторую модель, внеся ряд упрощений в уравнение (3.6).

Будем считать, что искомая функция ϕ зависит только от квадрата вектора импульса $\phi = \phi(\ell^2)$. Предположим также, что эффект диагональной части $\Psi(\ell^2)$ сведется к обычной аддитивной перенормировке массы. (Напомним, что в рассматриваемой теории все перенормировки конечны). Новую массу мезона будем обозначать тем же символом μ. Поскольку $\Phi(\ell^2, t^2)$ – медленно меняющаяся функция, предположим, что картина качественно не изменяется, если мы заменим ее постоянной.

Введем теперь сферическую систему координат t, η, θ, ϕ с полярной осью, направленной вдоль вектора ℓ и полярным углом η. Элемент объема будет иметь вид

$$d\Omega_t = ½\,\frac{t^2 \sin^2\eta\, \sin\theta\, d\eta\, d\theta\, d\phi\, dt^2}{(1+t^2)^{5/2}}. \tag{4.1}$$

Дельта-функции $\delta(1+\ell t)$ может быть использована для снятия интегрирования по η. Именно, интеграл по η, входящий в (3.6) можно записать в виде,

$$\int_0^\pi \delta(1+\ell t)\sin^2\eta\, d\eta = -\frac{\theta(t^2 - 1/\ell^2)}{\sqrt{e^2 t^2}}\int_1^{-1}\delta\left(\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{\ell^2 t^2}}\right)\times \tag{4.2}$$

$$\times\sqrt{1-\cos^2\eta}\; d\cos\eta = -\frac{\theta(t^2 - 1/\ell^2)}{\sqrt{\ell^2 t^2}}\left[\sqrt{1-\frac{1}{\ell^2 t^2}}\right.$$

Упростим выражение $\sqrt{1-\frac{1}{\ell^2 t^2}}$ Из-за наличия множителя $\theta(t^2 - 1/\ell$ эта функция интересует нас только в промежутке от $1/\ell^2$ до ∞. В точке $1/\ell^2$ производная ее равна бесконечности, а сама она обращается в нуль, при больших t^2 она довольно быстро стремится к 1, поэтому мы можем сделать замену

$$\sqrt{1 - 1/\ell^2 t^2} \to \theta(t^2 - 1/\ell^2). \tag{4.3}$$

После всех этих упрощений мы получим наше уравнение в виде

$$\frac{c}{\sqrt{s}}\int_{1/s}^{\infty}\frac{\phi(t)\sqrt{t}}{(1+t)^{5/2}}\,dt = \left(\frac{\mu^2}{4} + s\right)\phi(s). \tag{4.4}$$

Здесь введены следующие обозначения

$$4\pi g^2\Phi(\ell^2, t^2) = \text{const} = c, \quad \ell^2 = s, \quad t^2 = t. \tag{4.5}$$

Полученное интегральное уравнение можно свести к дифференциальному. Введем для этого функцию

$$F(s) = \int_s^\infty \frac{\phi(t)\sqrt{t}}{(1+t)^{5/2}}\,dt, \tag{4.6}$$

тогда

$$\phi(s) = -\frac{(1+s)^{5/2}}{\sqrt{s}}\frac{dF}{ds}, \tag{4.7}$$

интегральное уравнение (4.4) примет вид

$$\left(\frac{\mu^2}{4} + s\right)(1+s)^{5/2}\frac{dF(s)}{ds} = c\,F(1/s). \tag{4.8}$$

Произведем здесь замену $1 \to 1/s$ и подставим в получившееся выражение значение $F(1/s)$ из (4.8). В результате будем иметь

$$\left(\frac{\mu^2}{4} + \frac{1}{s}\right)s(1+1/s)^{5/2}\frac{d}{ds}\left(\left(\frac{\mu^2}{4}+s\right)(1+s)^{5/2}\frac{dF(s)}{ds}\right) + c^2F(s) = 0. \tag{4.9}$$

Исследуем поведение $\phi(s)$ вблизи точки $s = -\frac{\mu^2}{4}$, в которой "классическая" функция Грина имела полюс. В выбранной системе единиц справедлива оценка $\mu^2 \ll 1$. Поэтому вблизи точки $s = -\frac{\mu^2}{4}$ уравнение (4.6) принимает вид

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dF}{dx} + F(x) = 0, \tag{4.10}$$

где мы ввели новую переменную x , определенную из формулы

$$s+\frac{\mu^2}{4}=\frac{x^2}{4\left(\frac{\mu^2}{4}\right)^{3/2}c^2} \qquad (4.11)$$

Окончательно вблизи точки $s=-\frac{\mu^2}{4}$ получаем "распределение"

$$|\phi(s)|^2=\frac{1}{2}\,\frac{c^2\mu^3}{\left|s+\frac{\mu^2}{4}\right|} \qquad (4.12)$$

Таким образом, на упрощенной модели показано, что перенормировка в рассматриваемой теории приводит к размазке массы. Поскольку расчеты носят оценочный характер нет смысла пока говорить о физических последствиях обобщенной процедуры перенормировки, хотя представляется заманчивым связать размазывание массы со временем жизни частицы.

В заключение приношу свою благодарность Ю.А.Гольфанду за постоянное внимание к работе и замечания.

Литература

1. Ю.А.Гольфанд. ЖЭТФ, 44, 1248, 1963.
2. Ю.А.Гольфанд. ЖЭТФ, 43, 256, 1962.
3. В.Г.Кадышевский. ДАН СССР, 147, 1336, 1962.
4. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей, Физматгиз,1957.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 апреля 1965 г.