ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2107

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.И. Коломыцев, Д.Г. Факиров

ЗАМЕЧАНИЕ К ОДНОЙ ВОЗМОЖНОСТИ ОБЪЕДИНЕНИЯ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ И ГРУППЫ ВНУТРЕННИХ СИММЕТРИЙ

1965

Р-2107

В.И. Коломыцев, Д.Г. Факиров

ЗАМЕЧАНИЕ К ОДНОЙ ВОЗМОЖНОСТИ ОБЪЕДИНЕНИЯ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ И ГРУППЫ ВНУТРЕННИХ СИММЕТРИЙ

В последнее время появился ряд работ, в которых исследуется проблема объединения группы Пуанкаре и группы внутренних симметрий. Существует два подхода к этой проблеме. Один из них, по-видимому, берет начало от работы [1], в которой алгебра Ли объединенной группы состоит только из элементов алгебр Ли объединяемых групп. При этом предполагаются определенные коммутационные соотношения между некоторыми операторами из разных алгебр, а информация о коммутационных соотношениях между остальными операторами вытекает из тождества Якоби и известных коммутационных соотношений операторов объединяемых алгебр. Во втором подходе объединенная алгебра строится путем тензорного перемножения операторов объединяемых алгебр, дополненных единичными операторами [2].

Целью настоящей заметки является получением массовых соотношений с помощью метода, основанного на результатах работы Оттосона, Чилберга и Нильссона [3], принадлежащей первому направлению. Содержание этой работы формулируется в виде нескольких теорем и следствий. В дальнейшем существенно используется третья теорема, которую мы приводим в удобной для нас форме.

Теорема. Пусть группа G есть произведение группы Пуанкаре L с генераторами L_A и компактной простой группы S с генераторами H_i и E_a такое, что два генератора H_1 и H_2 коммутируют со всеми L_A. Тогда G есть прямое произведение группы S и группы $\tilde{L}$, локально изоморфной группе L, причем генераторы группы $\tilde{L}$ определяются следующим образом

$$\tilde{L}_A = L_A - \sum_i J^i_A H_i + \sum_\epsilon K_{A-\epsilon} E_\epsilon \ . \qquad (1)$$

Здесь числа J^i_A определяются из системы уравнений

$$J_{Aa} \equiv C^a_{Aa} = \sum_i r_i(a) J^i_A \ , \qquad (2)$$

а числа

$$K_{A-\epsilon} = \frac{C^i_{A\epsilon}}{r_i(\epsilon)} = \frac{C^{a\epsilon+a}_{Aa}}{N_{a\epsilon}} \ . \qquad (3)$$

Суммирование в формуле (1) проводится по таким ϵ, для которых первая и вторая компоненты у соответствующего корня равны нулю, т.е. $r_1(\epsilon) = r_2(\epsilon) = 0$.

Кроме того, в работе [3] показано, что смешанные структурные постоянные типа C^β_{Aa} образуют конечномерное представление алгебры Ли группы Пуанкаре, и они могут быть отличны от нуля в том и только в том случае, когда $r_1(\alpha) = r_1(\beta)$, $r_2(\alpha) = r_2(\beta)$ и $r(\alpha) - r(\beta)$ есть корень.

Представления группы G строятся путем тензорного произведения представлений групп $\tilde{L}$ и S. Массы частиц определяются как средние значения оператора $p^2 = p_\mu p^\mu$

$$m_a^2 = \langle a | p^2 | a \rangle ,$$

где $|a\rangle$ – вектор состояния частицы a и (4)

$$p_\mu = \tilde{p}_\mu + \sum_i J^i_\mu H_i - \sum_\epsilon K_{\mu-\epsilon} E_\epsilon . \qquad (1')$$

Из этих формул видно, что нетривиальные массовые соотношения могут возникнуть
в том случае, когда хотя бы одно из чисел J^i_μ, $K_{\mu-\epsilon}$ отлично от нуля. Послед-
нее же возможно тогда, когда в конечномерном представлении для генераторов группы
Пуанкаре трансляции представлены не тривиально, т.е. $C^\beta_{\mu\alpha} \neq 0$. Наименьшая размер-
ность известного конечномерного представления генераторов L_A, в котором трансля-
ции не тривиальны, равна четырем /4/. Следовательно, корневое пространство алгебры
Ли группы S должно иметь четыре корня таких, что их первые и вторые компо-
ненты отличны от нуля и равны между собой в отдельности и разности этих корней
должны быть разными корнями. Если в качестве группы S выбирается некоторая
группа $SU(n)$ такая, что корневое пространство ее алгебры Ли удовлетворяет описан-
ным выше требованиям, то ранг этой группы должен быть выше 5. Если дополнительно
потребовать, чтобы генераторы H_1 и H_2, коммутирующие с L_A, принадлежали
подалгебре $SU(3)$, содержащейся в рассматриваемой алгебре $SU(n)$, то ранг группы
становится больше 6. Возникает вопрос о физическом смысле коммутирующих между
собой операторов H_i. Два из них могут быть выбраны в качестве I_3 и Y. Физи-
ческий смысл остальных не ясен.

Поскольку вопрос о физической интерпретации генераторов H_i группы S не
решен, можно идти по другому пути. Именно: вместо представлений всей группы $SU(3)$
рассматривать только представление подгруппы $SU(3)$ и в соответствии с этими пред-
ставлениями известным образом классифицировать частицы. При таком подходе мы
должны включать генераторы H_1 и H_2, коммутирующие с генераторами L_A, в
$SU(3)$ и отождествлять их с I_3 и Y. Действие остальных генераторов на волно-
вые функции частиц из мультиплетов $SU(3)$ определяется из известных в группе
$SU(n)$ коммутационных соотношений. При этом, как уже было сказано выше,
в качестве группы $SU(n)$ следует выбирать группу $SU(7)$ или группу более высоко-
го ранга.

Корневое пространство алгебры Ли группы $SU(7)$ может быть записано в виде таблицы, которая приводится в тексте. Из этой таблицы видно, что элементы H_1, H_2, $E_{\pm(\gamma-\beta)}$, $E_{\pm(\gamma-a)}$ и $E_{\pm(\beta-a)}$ образуют подалгебру SU(3). Корни $r(\pi-a)$, $r(\kappa-a)$, $r(\sigma-a)$ и $r(\tau-a)$ имеют отличные от нуля и равные между собой в отдельности первые и вторые компоненты ($r_1(\pi-a)=\dots=r_1(\tau-a)\neq 0$, $r_2(\pi-a)=\dots=r_2(\tau-a)\neq 0$ и их разности являются разными корнями.

Существуют еще четыре корня $r(\pi-\beta)$, $r(\sigma-\beta)$, $r(\kappa-\beta)$, $r(\tau-\beta)$, обладающие перечисленными свойствами. Как увидим ниже, существование этих корней приводит к тому, что масса оказывается не зависящей от изотопического спина. Недиагональные генераторы типа E_ϵ, входящие в формулу (1'), $E_{\pm(\pi-\sigma)}$, $E_{\pm(\pi-\kappa)}$, $E_{\pm(\pi-\tau)}$, $E_{\pm(\sigma-\kappa)}$, $E_{\pm(\sigma-\tau)}$, $E_{\pm(\kappa-\tau)}$ и H_3, H_4, H_5, H_6 образуют, как легко видеть, подалгебру U(4), коммутирующую с подалгеброй SU(3). Следовательно, в силу леммы Шура, они кратные единичному оператору в неприводимом представлении SU(3), т.е.

$$H_j = h_j 1, \quad E_\epsilon = h_\epsilon 1, \tag{5}$$

где 1 – единичный оператор, h_j и h_ϵ числа, зависящие от того, какое представление SU(3) выбирается.

Более того, из соотношения

$$[H_j, E_\epsilon] = r_j(\epsilon) E_\epsilon \tag{6}$$

следует, что $h_\epsilon = 0$, т.е. $E_\epsilon = 0$.

Действительно, для любого ϵ существует такое $j \geq 3$, что $r_j(\epsilon) \neq 0$ (см. корнекое пространство или определение операторов E_ϵ). Левая сторона (6) равна нулю в силу равенства (5). Следовательно, $r_j(\epsilon)E_\epsilon = 0$ и в силу того, что $r_j(\epsilon)\neq 0$

$$E_\epsilon = 0. \tag{7}$$

(В приводимом представлении SU(3) E_ϵ не равно нулю и не эрмитов оператор).

Таким образом, правая часть (1) представляется в виде[x)]:

$$p_\mu = \tilde{p}_\mu + J_\mu^1 H_1 + J_\mu^2 H_2 + \sum_{j=3}^{6} J_\mu^j H_j . \tag{1''}$$

Из последней формулы видно, что в пространстве неприводимого представления подалгебры SU(3) оператор p_μ автоматически приводится к диагональному виду, хотя в пространстве представления всей SU(7) он не может быть приведен к диагональному виду[/5/].

Из соотношений

$$0 = [E_\epsilon, E_{-\epsilon}] = r_j(\epsilon) H_j \tag{8}$$

x) Отметим, что при J_μ^1 и J_μ^2, отличных от нуля, выражение (1'') приводит к массовой формуле Окубо–Гелл–Манна.

Таблица компонент положительных векторов $SU_{(7)}$

	H_I r_1	H_2 r_2	H_3 r_3	H_4 r_4	H_5 r_5	H_6 r_6
$\pi-\sigma$	0	0	0	0	$-5/6\sqrt{5}$	$7/6\sqrt{7}$
$\pi-\varkappa$	0	0	0	$-2/\sqrt{30}$	$1/6\sqrt{5}$	$7/6\sqrt{7}$
$\pi-\tau$	0	0	$-1/2\sqrt{2}$	$1/2\sqrt{30}$	$1/6\sqrt{5}$	$7/6\sqrt{7}$
$\pi-\gamma$	0	$-I/3$	$1/6\sqrt{2}$	$1/2\sqrt{30}$	$1/6\sqrt{5}$	$7/6\sqrt{7}$
$\pi-\beta$	$-1/2\sqrt{30}$	$I/6$	$1/6\sqrt{2}$	$1/2\sqrt{30}$	$1/6\sqrt{5}$	$7/6\sqrt{7}$
$\pi-\alpha$	$1/2\sqrt{30}$	$I/6$	$1/6\sqrt{2}$	$1/2\sqrt{30}$	$1/6\sqrt{5}$	$7/6\sqrt{7}$
$\sigma-\varkappa$	0	0	0	$-2/\sqrt{30}$	$1/\sqrt{5}$	0
$\sigma-\tau$	0	0	$-1/2\sqrt{2}$	$1/2\sqrt{30}$	$1/\sqrt{5}$	0
$\sigma-\gamma$	0	$-I/3$	$1/6\sqrt{2}$	$1/2\sqrt{30}$	$1/\sqrt{5}$	0
$\sigma-\beta$	$-1/2\sqrt{3}$	$I/6$	$1/6\sqrt{2}$	$1/2\sqrt{30}$	$1/\sqrt{5}$	0
$\sigma-\alpha$	$1/2\sqrt{3}$	$I/6$	$1/6\sqrt{2}$	$1/2\sqrt{30}$	$1/\sqrt{5}$	0
$\varkappa-\tau$	0	0	$-1/2\sqrt{2}$	$5/2\sqrt{30}$	0	0
$\varkappa-\gamma$	0	$-I/3$	$1/6\sqrt{2}$	$5/2\sqrt{30}$	0	0
$\varkappa-\beta$	$-1/2\sqrt{3}$	$I/6$	$1/6\sqrt{2}$	$5/2\sqrt{30}$	0	0
$\varkappa-\alpha$	$1/2\sqrt{3}$	$I/6$	$1/6\sqrt{2}$	$5/2\sqrt{30}$	0	0
$\tau-\gamma$	0	$-I/3$	$2/3\sqrt{2}$	0	0	0
$\tau-\beta$	$-1/2\sqrt{3}$	$I/6$	$2/3\sqrt{2}$	0	0	0
$\tau-\alpha$	$1/2\sqrt{3}$	$I/6$	$2/3\sqrt{2}$	0	0	0
$\gamma-\beta$	$-1/2\sqrt{3}$	$I/2$	0	0	0	0
$\gamma-\alpha$	$1/2\sqrt{3}$	$I/2$	0	0	0	0
$\beta-\alpha$	$1/\sqrt{3}$	0	0	0	0	0

вытекает при $\epsilon = \kappa - \tau$, $\sigma - \kappa$, $\pi - \sigma$, что

$$h_4 = \sqrt{\frac{3}{5}}\,h, \quad h_5 = \sqrt{\frac{2}{5}}\,h, \quad h_6 = \sqrt{\frac{2}{7}}\,h_8 . \qquad (9)$$

Числа J^1_μ определяются из системы уравнений (2), которая в данном случае принимает вид:

$$
\begin{aligned}
C^{\pi-a}_{\mu,\pi-a} &= J_{\mu,\pi-a} = \frac{1}{2\sqrt{3}} J^1_\mu + \frac{1}{6} J^2_\mu + \frac{1}{6\sqrt{2}} J^3_\mu + \frac{1}{6\sqrt{30}} J^4_\mu + \frac{1}{6\sqrt{5}} J^5_\mu + \frac{7}{6\sqrt{7}} J^6_\mu \\
C^{\sigma-a}_{\mu,\sigma-a} &= J_{\mu,\sigma-a} = \frac{1}{2\sqrt{3}} J^1_\mu + \frac{1}{6} J^2_\mu + \frac{1}{6\sqrt{2}} J^3_\mu + \frac{1}{2\sqrt{30}} J^4_\mu + \frac{1}{\sqrt{5}} J^5_\mu \\
C^{\kappa-a}_{\mu,\kappa-a} &= J_{\mu,\kappa-a} = \frac{1}{2\sqrt{3}} J^1_\mu + \frac{1}{6} J^2_\mu + \frac{1}{6\sqrt{2}} J^3_\mu + \frac{5}{2\sqrt{30}} J^4_\mu \\
C^{\tau-a}_{\mu,\tau-a} &= J_{\mu,\tau-a} = \frac{1}{2\sqrt{3}} J^2_\mu + \frac{1}{6} J^2_\mu + \frac{2}{3\sqrt{2}} J^3_\mu
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

для четверки векторов $r(\tau - a)$, $r(\kappa - a)$, $r(\sigma - a)$, $r(\pi - a)$ и аналогичной системы для четверки векторов $r(\tau - \beta)$, $r(\kappa - \beta)$, $r(\sigma - \beta)$, $r(\pi - \beta)$, в правой части которой меняется знак перед J^1_μ.

Левые части являются диагональными элементами четырехмерного представления генераторов трансляций, найденного в работе[4]:

$$
\begin{aligned}
(C_\mu) &\equiv p''_\mu = U^+ p'_\mu U \\
p' &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

U – унитарная матрица, $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, σ_1, σ_2, σ_3 – матрицы Паули. В силу того, что след матриц четырехрядного представления для генераторов трансляций равен нулю, системы имеют решение только при $J^1_\mu = 0$.

Таким образом, дополнительное требование о включении генераторов H_1 и H_2 в подалгебру SU(3) приводит, с одной стороны, к тому, что в неприводимых представлениях SU(3) оператор массы оказывается диагональным, с другой стороны, к невозможности получить массовую формулу Окубо–Гелл-Манна, так как $J^1_\mu = 0$.

Нетрудно доказать, что этот результат не зависит от того, какая группа SU(n) выбирается в качестве группы внутренних симметрий и какая размерность выбирается для L_A. Возможно, результат изменится при выборе какой-нибудь группы Sp(2n).

В системе покоя $p_j = 0$, $j = 1,2,3$ формула (1″) приводит к следующему выражению для массы:

$$p^2 = p_0^2 = (\tilde{p}_0 + \bar{p}_0)^2 + 2(\tilde{p}_0 + \bar{p}_0) J^2_0 Y + (J^2_0)^2 Y^2 ,$$

а оператор квадрата спина равен

$$w^2 - p_0^2 M^2 - p_0^2 (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2), \tag{12}$$

где

$$M_\ell = \tilde{M}_\ell + \sum_{i=1}^{8} J_\ell^i H - \Sigma K_{\ell-\epsilon} E_\epsilon =$$

$$= \tilde{M}_\ell + J_\ell^1 H_1 + J_\ell^2 H_2 + \sum_{j=3}^{8} J_\ell^j h_j 1.$$

Поскольку числа J_ℓ^i определяются из системы уравнений, аналогичной системе (10), то в качестве частного решения можно выбрать такое, в котором $J_\ell^1 = J_\ell^2 = 0$. При таком выборе J_ℓ^1 и J_ℓ^2 операторы углового момента коммутируют со всей алгеброй SU(3) и поэтому кратны единичному оператору в каждом неприводимом представлении SU(3). Следовательно, формула (12) может быть представлена в виде:

$$w^2 = p_0^2 j(j+1),$$

где значения j различны для разных неприводимых представлений SU(3).

В заключение авторы выражают благодарность И.Тодорову, указавшему на возможность изложенного выше метода получения массовых соотношений, за постоянный интерес к работе.

Литература

1. W.D.McGlinn. Phys.Rev.Lett. 12, 467 (1964).

2. В.Г.Кадышевский, Р.М.Мурадян, А.Н.Тавхелидзе, И.Т.Тодоров. SU(6) -симметрия и ее возможные обобщения. Препринт ОИЯИ Д-1929, 1964. Здесь имеются ссылки на большинство работ этого направления.

3. U.Ottoson, A.Kihlberg, J.Nilsson, Space-time and Internal Symmetry. Preprint, Gothenburg, 1964.

4. Ю.М.Широков. Теоретико-групповые методы в релятивистской квантовой теории поля. Диссертация. Физический факультет МГУ, стр. 75 , Москва, 1959.

5. A.Kihlberg. On the "Minimal Internal Coupling". Preprint CERN, 1964.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 апреля 1965 г.