ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2106

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов

ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЕ ПОЛЕ СО СПИНОМ 2 И УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

1965

P-2106

В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов

ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЕ ПОЛЕ СО СПИНОМ 2 И УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

I. ВВЕДЕНИЕ

I.I. В настоящей статье будут изучаться взаимодействия нейтрального симметричного тензорного поля $h_{\mu\nu}$ ($h_{\mu\nu}=h_{\nu\mu}$),описывающего спин 2. Хотя взаимодействия полей с высшими спинами обсуждались не один раз (см./2,3/ и цитируемую там литературу), здесь имеются неисследованные возможности, которые могут приводить к неожиданным результатам. Это показало, например, исследование взаимодействий векторных полей со спином I /4,5/. Оказалось,что использование понятия спина взаимодействующего поля/6/ ж) и принципа ограничения полей по спину ведет к сужению класса возможных взаимодействий и к вытекающим отсюда далеко идущим следствиям. Так, в случае одного безмассового векторного поля со спином I (без спина 0) мы однозначно пришли к электродинамике Максвелла, в случае трех векторных полей со спином I - к изотопической инвариантности и теории Янга-Миллса и т.д.

Естественно применить принцип ограничения по спину и к взаимодействиям полей с более высоким спином. Если теория нейтрального векторного поля со спином I оказалась такой фундаментальной теорией как электродинамика, то что будет представлять собой теория взаимодействующего тензорного поля со спином 2?

Исследуя этот вопрос, мы приходим к уравнениям, которые совпадают с уравнениями Эйнштейна /I/для гравитационного поля.жж)

ж) Понятие спина взаимодействующего поля было введено в /6/ как обобщение понятия спина одночастичных состояний и свободного поля. Поле $f(x)$ переносит спин s ,если отличен от нуля матричный элемент $\langle 0|f(x)|\Phi_s\rangle$, где Φ_s - вектор состояния с полным спином s .

жж) Краткое сообщение о результатах настоящей работы см.в /7/.

I.2. К теории тензорного поля обращались неоднократно в связи с теорией тяготения. Было известно (см.,например /8/), что для исключения отрицательных энергий уравнения движения для поля должны быть совместны с условием Лоренца (что как раз и означает ограничение на спин поля). Гупта /8,9/ в особенно четкой форме подчеркивал, что уравнения Эйнштейна, будучи рассматриваемы как полевые уравнения в плоском пространстве ж), как раз обладают нужной математической структурой. Он разъяснил, что уравнения Эйнштейна как полевые уравнения являются существенно нелинейными и что нелинейность связана с тем, что источником гравитационного поля служит тензор энергии-импульса всех полей, включая гравитационное. Однако оставалась неудовлетворенность в неумении вывести уравнения Эйнштейна в плоском пространстве. Так, обсуждая про и контра полевого подхода, Тирринг /I8/ указывал как на один из двух недостатков этого подхода, что теория поля не дает ключа к построению нелинейных уравнений Эйнштейна, что для этого обычно апеллируют к римановой геометрии.

ж) О совместимости условия Лоренца с уравнениями Эйнштейна см. /I0-I3/. Попытки плоской трактовки уравнений Эйнштейна восходят к Розену /I4/ и Папапетру /I2/. Существенный прогресс в этом направлении, особенно в связи с квантованием по теории возмущений, достигнут Гуптой /8,9/. Квантование в этом аспекте также рассматривали Фейнман /I5/ и Джаст /I6/. Анализируя диаграммы Фейнмана в приближении слабого поля, Захаров /I7/ и Джаст /I6/ показали, что виртуальные гравитоны переносят спины 2 и 0, но не I. Хорошее физическое обсуждение основных пунктов полевого подхода можно найти у Тирринга /I8/ и Бладмена /I9/.

В настоящей статье мы восполняем этот пробел и даем полный вывод уравнений Эйнштейна в плоском пространстве со всеми их нелинейностями ж), исходя из принципа ограничения тензорного поля по спину.

Приступая к исследованию, мы не ставили себе целью вывести именно уравнения Эйнштейна. Нас просто интересовали все возможные теории одного тензорного поля, не описывающего спин I. При этом для безмассового тензорного поля мы однозначно (в предположении минимальности взаимодействий) получаем уравнения Эйншейна. В статье найдены также уравнения для массивного тензорного поля.

I.3. Вообще говоря, симметричное тензорное поле $h_{\mu\nu}$ описывает спин 2, спин I и два спина 0 жж). Оно описывало бы только спин 2, если бы соблюдались дополнительные условия

$$m^2 \partial_\mu h_{\mu\nu} = 0 \tag{I}$$

$$m^2 h_{\mu\mu} = 0 \tag{2}$$

(m - масса поля $h_{\mu\nu}$) не только в свободном случае, но и при наличии взаимодействия /6/. Оба условия должны следовать из уравнений движения или не противоречить им. В случае безмассового поля $\partial_\mu h_{\mu\nu}$ и $h_{\mu\mu}$ должны быть совершенно произвольны, из уравнений движения на них не должно возникать никаких ограничений.

Мы ограничимся исследованием <u>минимальных</u> взаимодействий. В векторных теориях минимальность естественным образом означала безразмерность констант связи /4/. Во взаимодействиях тензорного

ж) Недавно теория безмассовых частиц со спинами I и 2 обсуждалась в рамках S - матричного формализма и теории возмущений Вайнбергом /20,2I/. Однако, пытаясь вывести уравнения Эйнштейна, он пока не продвинулся дальше приближения слабого поля.

жж) Разбиение $h_{\mu\nu}$ на части с определенным спином см. в Приложении I.

поля существенным образом участвуют константы связи размерности см^{I} ж). В этом случае мы будем называть взаимодействие минимальным, если оно содержит ненулевые константы связи размерности см^{I} и только те константы связи других размерностей, приравнивание нулю которых привело бы к обращению в ноль констант связи размерности см^{I} (т.е.к полному выключению взаимодействия).

Анализ теорий, в которых одновременно выполнены оба дополнительных условия (I) и (2) весьма затруднителен, так как они не полностью независимы. Под влиянием лобовых вычислений у нас сложилось впечатление, что в рамках минимальных взаимодействий таких теорий нет.

В этой связи мы поставили себе задачу исчерпать все теории тензорного поля, в которых соблюдается одно наиболее общее линейное условие - обобщенное условие Гильберта-Лоренца

$$m^2(\partial_\mu h_{\mu\nu} + q\partial_\nu h_{\mu\mu}) = 0, \qquad (3)$$

где q - произвольное число. Это условие исключает спин I и один из спинов 0, но оставляет другой спин 0, и в этом смысле оно не лучше и не хуже чистого условия Лоренца. Спин I обязательно должен быть исключен, так как знак энергии для спина I противоположен знаку энергии для спинов 2 и 0. Заметим, что условие,которое исключало бы только спин I, было бы нелокальным, и мы его не рассматриваем.

ж) Мы пользуемся системой единиц, в которой $\hbar = c = I$. В этой системе бозонные поля имеют размерность см$^{-I}$, а фермионные см$^{-3/2}$, так что, например, во взаимодействии $f\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi h_{\mu\nu}$ константа связи f имеет размерность см^{I}.

I.4. В разделе 2 развивается общий подход к решению поставленной задачи: требование, чтобы уравнения движения были совместны с условием Гильберта-Лоренца (3), выражается на языке вариационного принципа, и найдены тождества, которым должна удовлетворять лагранжева плотность. Из этих тождеств по второй теореме Э.Нетер /22/ следует, что весь лагранжиан, за исключением массового члена поля $h_{\mu\nu}$, должен быть инвариантен относительно некоторой группы калибровочных преобразований всех взаимодействующих полей. Перечисляя все возможные группы преобразований (раздел 3), мы заключаем (см.также раздел 6), что фактически существует только одна такая группа. Замечательно, что эта группа формально совпадает с группой общековариантных преобразований в римановой геометрии! Уже отсюда можно прийти к выводу, что уравнения теории безмассового тензорного поля должны совпадать с уравнениями Эйнштейна для гравитации.

Несмотря на это, в разделе 4 лагранжиан для безмассового тензорного поля, взаимодействующего с другими полями, восстановлен в явном виде путем решения соответствующих тождеств. Естественно, что при этом мы автоматически приходим к правилам римановой геометрии и к лагранжиану теории Эйнштейна.

Использование тождеств для получения лагранжиана применялось ранее Янгом и Миллсом /23/ и Утиямой /24/ в случае векторных полей. Однако подчеркнем, что идейно и технически наш подход существенно отличается от подхода Янга-Миллса, распространенного на теорию гравитации Утиямой /24/, Кибблом /25/ и Бродским, Иваненко и Соколиком /26/. Главные отличия в том, что I) у нас группа преобразований не постулируется, а выводится как средство обеспечивающее выполнение спинового условия для тензорного поля,

2) при нахождении лагранжиана у нас не возникает неоднозначностей, так как мы исследуем взаимодействие именно тензорного поля, 3) мы охватываем случаи тензорного поля как с нулевой, так и с ненулевой массами.

Вид возможных массовых членов для $h_{\mu\nu}$ определяется в разделе 5 при помощи тождеств, и таким образом, уравнения Эйнштейна обобщаются на случай массивного тензорного поля. При этом получается не один, а целое семейство возможных массовых членов. Все они нарушают "общековариантность" теории и принцип эквивалентности, но равенство инертной массы и массы, определяющей взаимодействие, остается.

Раздел 7 посвящен обсуждению полученных результатов и сравнению полево-теоретического и геометрического подходов к теории тяготения Эйнштейна.

2. Тождества, связанные с условием Гильберта-Лоренца

2.I. Как было сказано во Введении, мы будем искать теории, в которых для симметричного тензорного поля $h_{\mu\nu}$ выполняется только одно спиновое условие - обобщенное условие Гильберта-Лоренца (3). При этом тензорное поле будет описывать спин 2 и спин 0, а спин I и другой спин 0 будут исключены (см. Приложение I).

Мы будем работать в лагранжевом формализме. Поставленную задачу можно было бы решать тем же путем, что и в случае векторных полей в /4/ж). В данном случае этот подход становится настолько громоздким, что его практически невозможно реализовать. Поэтому мы применяем здесь более простой и адэкватный задаче метод, развитый в /5/ на примере векторных полей. Метод основан на использовании тождеств для лагранжиана, вытекающих из условия Гильберта-Лоренца, с привлечением второй теоремы Э.Нетер /22/.

ж) Т.е. непосредственно выписывая в лагранжиане все мыслимые взаимодействия с неопределенными константами связи и подбирая их так, чтобы удовлетворялось условие (3).

Рассмотрим взаимодействие тензорного поля с самим собой ("самодействие"), с векторным b_μ, спинорным ψ и скалярным φ полями:

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}(h_{\mu\nu}, \partial_\lambda h_{\mu\nu}, \partial_\lambda\partial_\rho h_{\mu\nu}, b_\mu, \partial_\nu b_\mu, \Psi, \partial_\nu\Psi, \varphi, \partial_\nu\varphi). \qquad (4)$$

В лагранжеву плотность $\mathcal{L}$ для удобства введены вторые производные тензорного поля. Чтобы не иметь дела порознь со спинорами ψ и $\bar\psi$, мы вводим спинор удвоенной размерности

$$\Psi=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\psi+\psi_c\\ i(\psi-\psi_c)\end{pmatrix}, \qquad \bar\Psi=-\Psi C^{-1}.$$

Подчеркнем, что всюду в настоящей статье термины "скалярное", "спинорное" и "тензорное" поля понимаются в смысле специальной теории относительности. Мы работаем в пространстве Минковского с мнимыми временными координатами и метрическим тензором $\delta_{\mu\nu}$.

2.2. Представим лагранжеву плотность в виде

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}'-\frac{1}{2}m^2\left(h_{\mu\nu}h_{\mu\nu}+q\,h_{\mu\mu}h_{\nu\nu}\right). \qquad (5)$$

2.3. Тождество (8) может быть выражено на языке вариационного принципа. Это нетрудно усмотреть из его структуры. Такая вариационная формулировка будет весьма важна в дальнейшем.

Будем варьировать $\mathcal{L}'$ на специальном классе вариаций *)

$$\delta^* h_{\mu\nu} = \partial_\mu \lambda^\nu + \partial_\nu \lambda^\mu + p\delta_{\mu\nu}\partial_\sigma \lambda^\sigma + \left(A^{\rho\varepsilon}_{\mu\nu,\sigma\tau}\partial_\varepsilon \lambda^\rho + \bar{\bar{A}}^{\rho\varepsilon}_{\mu\nu,\sigma\tau}\lambda^\rho \partial_\varepsilon\right) h_{\sigma\tau}, \tag{I3}$$

$$\delta^* b_\mu = \left(B^{\rho\varepsilon}_{\mu\nu}\partial_\varepsilon \lambda^\rho + \bar{\bar{B}}^{\rho\varepsilon}_{\mu\nu}\lambda^\rho \partial_\varepsilon\right) b_\nu, \tag{I4}$$

$$\delta^* \Psi = \left(C^{\rho\varepsilon}\partial_\varepsilon \lambda^\rho + \bar{\bar{C}}^{\rho\varepsilon}\lambda^\rho \partial_\varepsilon\right)\Psi, \tag{I5}$$

$$\delta^* \varphi = \left(D^{\rho\varepsilon}\partial_\varepsilon \lambda^\rho + \bar{\bar{D}}^{\rho\varepsilon}\lambda^\rho \partial_\varepsilon\right)\varphi, \tag{I6}$$

где λ^μ - совершенно произвольная безразмерная 4-векторная функция, а $\bar{\bar{A}} = A - \bar{A}$, $\bar{\bar{B}} = B - \bar{B}$, $\bar{\bar{C}} = C - \bar{C}$, $\bar{\bar{D}} = D - \bar{D}$. Тогда тождество (8) означает, что

$$\int d^4x\, \delta^* \mathcal{L}' \equiv -m^2 \int d^4x\, \lambda^\rho \mathcal{O\!L}^\rho_{\mu\nu}\left(h_{\mu\nu} + q\delta_{\mu\nu}h_{\alpha\alpha}\right). \tag{I7}$$

С учетом вида $\mathcal{O\!L}$ (9) тождество (I7) можно записать как

$$\int d^4x\, \delta^* \mathcal{L}' \equiv m^2 \int d^4x \left(h_{\mu\nu} + q\delta_{\mu\nu}h_{\alpha\alpha}\right)\left[p\delta_{\mu\nu}\partial_\sigma \lambda^\sigma + \left(A^{\rho\varepsilon}_{\mu\nu,\sigma\tau}\partial_\varepsilon \lambda^\rho + \bar{\bar{A}}^{\rho\varepsilon}_{\mu\nu,\sigma\tau}\lambda^\rho \partial_\varepsilon\right)h_{\sigma\tau}\right] \tag{I8}$$

Далее, принимая во внимание соотношение (5) и вид вариации $h_{\mu\nu}$ (I3), выражаем фундаментальное тождество (8) непосредственно через полный лагранжиан

$$\int d^4x\, \delta^* \mathcal{L} \equiv -2m^2 \int d^4x \left(h_{\mu\nu} + q\delta_{\mu\nu}h_{\rho\rho}\right)\partial_\mu \lambda^\nu. \tag{I9}$$

---

*) Мы пользуемся символом δ^* /27/, чтобы подчеркнуть, что вариации локальные, т.е. производятся в одной системе отсчета.

Таким образом, если мы хотим, чтобы выполнялось условие Гильберта-Лоренца (3) для $h_{\mu\nu}$, то тогда вариация полного лагранжиана должна тождественно равняться некоторому определенному выражению, а не нулю, как в случае, когда мы добиваемся инвариантности. Обратно, в любой теории с $m \neq 0$, в которой лагранжиан удовлетворяет тождеству (I9), обеспечено выполнение требуемого условия Гильберта-Лоренца (3). Действительно, когда все поля подчинены уравнениям Эйлера, то левая часть (I9) обращается в нуль из-за стационарности действия, а тогда, полагая в правой части $\lambda^\nu(x) = \delta_{\nu\rho}\delta^4(x-y)$, получаем (3).

Вместе с тем тождество (I9) есть условие инвариантности теории относительно преобразований (I3)-(I6) с λ^ν частного вида, удовлетворяющими уравнению $\partial_\mu \lambda^\nu + \partial_\nu \lambda^\mu + 2q\delta_{\mu\nu}\partial_\sigma \lambda^\sigma = 0$. При $q \neq -\frac{1}{4}$, решение является I0-параметрическим: $\lambda^\nu = c^\nu + \omega^\nu{}_\mu x^\mu$ $\left(c^\nu = \mathrm{const},\ \omega^\nu{}_\mu = -\omega^\mu{}_\nu = \mathrm{const}\right)$. При $q = -\frac{1}{4}$ решение оказывается более широким, I5-параметрическим: $\lambda^\nu = c^\nu + \omega^\nu{}_\mu x^\mu + b x^\nu - \frac{1}{2} d^\nu x^\mu x^\mu + d^\mu x^\mu x^\nu$ $\left(b = \mathrm{const},\ d^\mu = \mathrm{const}\right)$.

Далее, при $m = 0$ это тождество есть условие инвариантности при любых λ^ν. В этом случае (I3)-(I6) суть калибровочные преобразования, предназначенные для исключения спина I у безмассового тензорного поля, - аналог калибровочных преобразований в электродинамике и теории Янга-Миллса.

Подчеркнем большую общность тождеств (I7) и (I9): они не зависят от конкретного вида (9)-(I2) операторов $\mathcal{O\!L}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{L}$ и ϑ и не изменились бы при любом обобщении последних.

Укажем на сходство тождества (I9) с тождеством, гарантирующим выполнение условия Лоренца для векторных полей*) (/5/, формула (II)). Отметим, что тождество (I9) в принципе может служить исходным пунктом (вместо (8)) для построения теории тензорного поля с условием Гильберта-Лоренца.

2.4. Еще один тип тождеств понадобится нам, когда мы приступим к нахождению явного вида лагранжиана. Именно, мы будем разрешать тождество

$$\delta^* \mathcal{L} = -2m^2 (h_{\mu\nu} + q\delta_{\mu\nu} h_{\rho\rho}) \partial_\mu \lambda^\nu + \partial_\mu X^\mu \qquad (20)$$

с некоторым X^μ. Тождество (20) гарантирует выполнение тождества (I9),а, следовательно, и (8). Из (4) и вида вариаций (I3)-(I6) следует, что тождество (20) содержит произвольный вектор $\lambda^\mu(x)$ и его производные до 3-й включительно. Благодаря этому (20) эквивалентно системе 4-х тождеств, уже не содержащих λ^μ. Именно эти четыре тождества будут обсуждаться в разделе 4 ввиду того, что они существенно проще тождества (8): в них функциональные производные (типа $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\lambda h_{\mu\nu}}$) не дифференцируются по x^μ.

2.5. В дальнейшем мы существенно воспользуемся тем, что при $m = 0$ лагранжиан $\int d^4x \mathcal{L}'' \left(\mathcal{L}'' = \mathcal{L}_{|m=0}\right)$ инвариантен относительно калибровочных преобразований (I3)-(I6).

---

*) Можно высказать также общее утверждение: для выполнения условия Лоренца $\partial_{\mu_1} \varphi_{\mu_1 \dots \mu_s} = 0$, если $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_s}$ – симметричное тензорное поле, лагранжиан соответствующей теории должен удовлетворять тождеству $\int d^4x \, \delta^* \mathcal{L} = -sm^2 \int d^4x \, \varphi_{\mu_1 \dots \mu_s} \partial_{\mu_1} \lambda_{\mu_2 \dots \mu_s}$, где $\lambda_{\mu_2 \dots \mu_s}$ – произвольный симметричный тензор (s – I)-го ранга, а под вариацией поля $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_s}$ подразумевается

$$\delta^* \varphi_{\mu_1 \dots \mu_s} = \partial_{\mu_1} \lambda_{\mu_2 \dots \mu_s} + \dots + \partial_{\mu_s} \lambda_{\mu_1 \dots \mu_{s-1}} + \text{мультипликативные члены.}$$

Тождество очевидным образом модифицируется в случае спин-тензорных полей, необходимых для описания полуцелых спинов, а также в случае, когда нет симметрии по тензорным индексам. Переход к условиям типа Гильберта-Лоренца тривиален.

Тождество (8) состоит фактически из четырех тождеств (ρ = I,2,3,4), которых достаточно для исключения четырех степеней свободы (спинов I и 0). Поэтому мы предположим, что нет <u>никаких других тождеств,</u> ограничивающих степени свободы тензорного поля. Тождество (8) при m= 0 есть тождество того типа, который фигурирует во второй теореме Э.Нетер /22/. Тогда по теореме Нетер из существования тождеств можно снова прийти к выводу об инвариантности, а из того, что тождеств 4 (ρ = I,2,3,4) и только 4, следует, что вариации должны образовывать группу *). В такой постановке вопроса остается только выяснить ограничения на операторы A, $\bar{\bar{A}}$, B, $\bar{\bar{B}}$ ..., при которых вариации (I3)-(I6) будут образовывать группу, и сейчас мы к этому переходим.

3. Группы вариаций

Поиск возможных групп вариаций будет производиться в рамках принципа минимальности, который в применении к вариациям мы понимаем как требование, чтобы преобразования не содержали констант с размерностью выше, чем см^{I}.

Оказывается, что для каждого поля имеется только один вид возможных вариаций, если требовать соблюдения группового условия и Лоренц - инвариантности. Это важное утверждение доказывается путем алгебраических вычислений. Не интересующийся проверкой доказательства читатель может обратиться прямо к обсуждению в п.3.5.

3.I. Группы вариаций тензорного поля

3.I.I. Начнем с исследования условий, при которых вариации (I3) образуют группу. Наиболее общий вид матриц A и $\bar{\bar{A}}$, сос-

---

*) Если бы вариации не образовывали группу, то при помощи скобочной операции Ли можно было бы получить новые тождества вопреки предположению.

тоящих из констант размерности см^{I}, следующий

$$2A^{\rho\lambda}_{\mu\nu,\sigma\tau}=a\{(\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\tau}+\delta_{\mu\tau}\delta_{\nu\rho})\delta_{\sigma\lambda}+(\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho})\delta_{\tau\lambda}\}+$$

$$+b(\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\tau}+\delta_{\mu\tau}\delta_{\nu\sigma})\delta_{\lambda\rho}+c\{\delta_{\sigma\rho}(\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\tau}+\delta_{\mu\tau}\delta_{\nu\lambda})+$$

$$+\delta_{\tau\rho}(\delta_{\nu\sigma}\delta_{\mu\lambda}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda})\}+d\,\delta_{\mu\nu}(\delta_{\lambda\sigma}\delta_{\rho\tau}+\delta_{\lambda\tau}\delta_{\rho\sigma})+$$

$$+2e(\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho}+\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda})\delta_{\sigma\tau}+2f\,\delta_{\mu\nu}\delta_{\sigma\tau}\delta_{\lambda\rho}+$$

$$+g(\delta_{\tau\nu}\varepsilon_{\mu\lambda\rho\sigma}+\delta_{\tau\mu}\varepsilon_{\nu\lambda\rho\sigma}+\delta_{\sigma\nu}\varepsilon_{\mu\lambda\rho\tau}+\delta_{\sigma\mu}\varepsilon_{\nu\lambda\rho\tau})$$

(2I)

$\overline{\overline{A}}$ имеет ту же структуру. Не выписывая отдельную формулу, мы будем считать, что $2\overline{\overline{A}}$ записывается согласно (2I) с заменами $a\to a'$, $b\to b'$, $\ldots g\to g'$.

Иногда нам будет удобно пользоваться матричной записью, объединяя $h_{\alpha\beta}$ в столбец.

$$h=\|h_{\alpha\beta}\|$$

причем пара индексов $\alpha\beta$ понимается как один матричный индекс. Тогда (I3) запишется короче

$$\delta^{*}h=U^{\rho\varepsilon}\partial_{\varepsilon}\lambda^{\rho}+(A^{\rho\varepsilon}\partial_{\varepsilon}\lambda^{\rho}+\overline{\overline{A}}^{\rho\varepsilon}\lambda^{\rho}\partial_{\varepsilon})h, \qquad (22)$$

где

$$(U^{\rho\varepsilon})_{\mu\nu}=\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\varepsilon}+\delta_{\mu\varepsilon}\delta_{\nu\rho}+p\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\varepsilon}\,. \qquad (23)$$

Преобразования h будут образовывать группу, если выполняется соотношение структуры Софуса Ли

$$(\delta^{*}_{\lambda_2}\delta^{*}_{\lambda_1}-\delta^{*}_{\lambda_1}\delta^{*}_{\lambda_2})h=\delta^{*}_{\lambda_{ck}}h, \qquad (24)$$

где $\delta^{*}_{\lambda_1}h$, $\delta^{*}_{\lambda_2}h$ и $\delta^{*}_{\lambda_{ck}}h$ суть вариации (I3) или (22) с функцией λ^{ρ}_{1}, с некоторой другой функцией λ^{ρ}_{2} и со"скобочной" функцией λ^{ρ}_{ck}, построенной из λ^{ρ}_{1} и λ^{ρ}_{2}.

Подставим (22) в (24). В результате получим соотношение, которое содержит члены двух типов, с h и без h. Эти члены следует сравнивать отдельно, что дает два соотношения:

$$(A^{\rho\sigma}\partial_{\sigma}\lambda^{\rho}_{1}+\overline{\overline{A}}^{\rho\sigma}\lambda^{\rho}_{1}\partial_{\sigma})B^{\alpha\beta}\partial_{\beta}\lambda^{\alpha}_{2}-(A^{\rho\sigma}\partial_{\sigma}\lambda^{\rho}_{2}+\overline{\overline{A}}^{\rho\sigma}\lambda^{\rho}_{2}\partial_{\sigma})B^{\alpha\beta}\partial_{\beta}\lambda^{\alpha}_{1}=$$

$$=U^{\rho\sigma}\partial_{\sigma}\lambda^{\rho}_{ck} \qquad (25)$$

$$[A^{\rho\sigma}\partial_{\sigma}\lambda^{\rho}_{1}+\overline{\overline{A}}^{\rho\sigma}\lambda^{\rho}_{1}\partial_{\sigma}\,,\,A^{\alpha\beta}\partial_{\beta}\lambda^{\alpha}_{2}+\overline{\overline{A}}^{\alpha\beta}\lambda^{\beta}_{2}\partial_{\alpha}]h=$$

$$=(A^{\rho\sigma}\partial_{\sigma}\lambda^{\rho}_{ck}+\overline{\overline{A}}^{\rho\sigma}\lambda^{\rho}_{ck}\partial_{\sigma})h\,. \qquad (26)$$

Подстановка (2I) и (23) в (25) показывает, что λ^{μ}_{ck} должна иметь вид

$$\lambda^{\mu}_{ck}=C^{\nu\rho\lambda}_{\mu}(\lambda^{\nu}_{1}\partial_{\lambda}\lambda^{\rho}_{2}-\lambda^{\nu}_{2}\partial_{\lambda}\lambda^{\rho}_{1})= \qquad (27)$$

$$=(-a+c)(\lambda^{\rho}_{1}\partial_{\rho}\lambda^{\mu}_{2}-\lambda^{\rho}_{2}\partial_{\rho}\lambda^{\mu}_{1})+c'(\lambda^{\rho}_{1}\partial_{\mu}\lambda^{\rho}_{2}-\lambda^{\rho}_{2}\partial_{\mu}\lambda^{\rho}_{1})+$$

$$+[pc'+(2+4p)e'](\lambda^{\mu}_{1}\partial_{\rho}\lambda^{\rho}_{2}-\lambda^{\mu}_{2}\partial_{\rho}\lambda^{\rho}_{1}) \qquad (27^{I})$$

и устанавливает некоторые связи между константами a, b, $\ldots g$, a', b', $\ldots$ g', которые мы ниже объединим со следствиями из (26).

Аналогично, сравнивая в (26) независимые структуры (или подставляя λ_1 и λ_2 в виде константы, линейной и квадратичной функций x^{μ}), приходим к соотношениям

$$[A^{\alpha\beta}, A^{\gamma\delta}] = c^{\alpha,\gamma\delta}_{\rho} A^{\rho\beta} - c^{\gamma,\alpha\beta}_{\rho} A^{\rho\delta}, \tag{28}$$

$$\bar{\bar{A}}^{\alpha\beta} A^{\gamma\delta} = c^{\alpha,\gamma\delta}_{\rho} A^{\rho\beta}, \tag{29}$$

$$A^{\alpha\beta} \bar{\bar{A}}^{\gamma\delta} = \bar{\bar{A}}^{\gamma\beta} A^{\alpha\delta}, \tag{30}$$

$$[\bar{\bar{A}}^{\alpha\beta}, \bar{\bar{A}}^{\gamma\delta}] + [\bar{\bar{A}}^{\alpha\delta}, \bar{\bar{A}}^{\gamma\beta}] = 0. \tag{31}$$

Подставляя сюда A и $\bar{\bar{A}}$ в форме (2I), находим довольно много уравнений. Эти уравнения вместе с уравнениями, полученными из (25), можно свести к системе

$$a' = c' = d' = g = g' = 0,$$
$$ac = ae' = ce' = de' = 0,$$
$$b = (a+c)p + (2+4p)e, \qquad b' = -a + c,$$
$$(a+c)d + 2e(a+c+2d) = 0,$$
$$d^2 + 2f(a+c+2d) = 0,$$
$$(a+c)f + 2e(e+2f) = 0,$$
$$f' = -\frac{1}{2}e', \quad (2+4p)e' = 0, \quad e'(e+2f) = 0. \tag{32}$$

Система уравнений (32) имеет 7 решений, приведенных в таблице I.

Этим семи вариантам соответствуют λ^{μ}_{ck} :

Вариант

I $\qquad \lambda^{\mu}_{ck} = -a\left(\lambda^{\rho}_{1}\partial_{\rho}\lambda^{\mu}_{2} - \lambda^{\rho}_{2}\partial_{\rho}\lambda^{\mu}_{1}\right) \qquad (33)$

2 $\qquad \lambda^{\mu}_{ck} = c\left(\lambda^{\rho}_{1}\partial_{\rho}\lambda^{\mu}_{2} - \lambda^{\rho}_{2}\partial_{\rho}\lambda^{\mu}_{1}\right) \qquad (34)$

3,4,5,6,7 $\qquad \lambda^{\mu}_{ck} = 0 \qquad (35)$

Таблица I. Решения системы уравнений (32)

	a	b	b'	c	d	e	e'	f	f'	p
I	незав.	$\frac{a(pa-d)}{a+2d}$	$-a$	0	незав	$\frac{-ad}{2a+4d}$	0	$\frac{-d^2}{2a+4d}$	0	любое
2	0	$\frac{c(pc-d)}{c+2d}$	c	незав.	незав.	$\frac{-cd}{2c+4d}$	0	$\frac{-d^2}{2c+4d}$	0	любое
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	любое
4	0	0	0	0	$-4f$	0	0	незав.	0	любое
5	0	0	0	0	0	0	0	незав.	0	любое
6	0	$-4(1+2p)f$	0	0	0	$-2f$	0	незав.	0	любое
7	0	0	0	0	0	$-2f$	$-2f'$	незав.	незав.	$p=-\frac{I}{2}$

3.I.2. Найденные варианты групп могут быть упрощены и частично сведены друг к другу заменами переменных поля.

В вариантах I и 2 преобразования записываются

$$\text{I)}\ \delta^* h_{\mu\nu}=\partial_\mu\lambda^\nu+\partial_\nu\lambda^\mu+p\delta_{\mu\nu}\partial_\sigma\lambda^\sigma+\alpha\left(\partial_\sigma\lambda^\mu h_{\sigma\nu}+\partial_\sigma\lambda^\nu h_{\mu\sigma}-\lambda^\sigma\partial_\sigma h_{\mu\nu}\right)+$$

$$+\frac{\alpha(p\alpha-d)}{\alpha+2d}\partial_\sigma\lambda^\sigma h_{\mu\nu}+d\delta_{\mu\nu}\partial_\rho\lambda^\sigma h_{\sigma\rho}-\frac{\alpha d}{2\alpha+4d}\left(\partial_\mu\lambda^\nu+\partial_\nu\lambda^\mu\right)h_{\rho\rho}-\frac{d^2}{2\alpha+4d}\delta_{\mu\nu}\partial_\sigma\lambda^\sigma h_{\rho\rho} \qquad (36)$$

$$\text{2)}\ \delta^* h_{\mu\nu}=\partial_\mu\lambda^\nu+\partial_\nu\lambda^\mu+p\delta_{\mu\nu}\partial_\sigma\lambda^\sigma+c\left(\partial_\mu\lambda^\sigma h_{\sigma\nu}+\partial_\nu\lambda^\sigma h_{\mu\sigma}+\lambda^\sigma\partial_\sigma h_{\mu\nu}\right)+$$

$$+\frac{c(pc-d)}{c+2d}\partial_\sigma\lambda^\sigma h_{\mu\nu}+d\delta_{\mu\nu}\partial_\rho\lambda^\sigma h_{\sigma\rho}-\frac{cd}{2c+4d}\left(\partial_\mu\lambda^\nu+\partial_\nu\lambda^\mu\right)h_{\rho\rho}-\frac{d^2}{2c+4d}\delta_{\mu\nu}\partial_\sigma\lambda^\sigma h_{\rho\rho}. \qquad (37)$$

В (36) и (37) при помощи замен

$$h_{\mu\nu}=\varphi_{\mu\nu}+u\delta_{\mu\nu}\varphi_{\rho\rho}, \qquad \varphi_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}-\frac{u}{1+4u}\delta_{\mu\nu}h_{\rho\rho} \qquad (38)$$

с $u=\frac{d}{2\alpha}$ и $u=\frac{d}{2c}$, соответственно, можно исключить константу d. Приведенные варианты I и 2 запишутся

$$\delta^* h_p^{\mu\nu}=\partial_\mu\lambda^\nu+\partial_\nu\lambda^\mu+p\delta_{\mu\nu}\partial_\sigma\lambda^\sigma+$$
$$+\alpha\left(\partial_\sigma\lambda^\nu h_p^{\mu\sigma}+\partial_\sigma\lambda^\mu h_p^{\sigma\nu}+p\partial_\sigma\lambda^\sigma h_p^{\mu\nu}-\lambda^\sigma\partial_\sigma h_p^{\mu\nu}\right) \qquad (36^{I})$$

$$\delta^* h_{p\mu\nu}=\partial_\mu\lambda^\nu+\partial_\nu\lambda^\mu+p\delta_{\mu\nu}\partial_\sigma\lambda^\sigma+$$
$$+c\left(\partial_\mu\lambda^\sigma h_{p\sigma\nu}+\partial_\nu\lambda^\sigma h_{p\mu\sigma}+p\partial_\sigma\lambda^\sigma h_{p\mu\nu}+\lambda^\sigma\partial_\sigma h_{p\mu\nu}\right). \qquad (37^{I})$$

Чтобы различать тензорные поля, преобразующиеся по (36^I) и (37^I), мы в первом случае пишем индексы сверху. Кроме того, мы снабдили поля индексом p, который характеризует преобразование с константой p.

Если ввести величину

$$g_p^{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}+\alpha h_p^{\mu\nu}, \qquad (39)$$

то преобразование (36^I) запишется еще короче

$$\delta^* g_p^{\mu\nu}=\alpha\left(\partial_\sigma\lambda^\mu g_p^{\sigma\nu}+\partial_\sigma\lambda^\nu g_p^{\mu\sigma}+p\partial_\sigma\lambda^\sigma g_p^{\mu\nu}-\lambda^\sigma\partial_\sigma g_p^{\mu\nu}\right). \qquad (40)$$

Аналогично, для величины $g_{p\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}+ch_{p\mu\nu}$ из (37^I) следует

$$\delta^* g_{p\mu\nu}=c\left(\partial_\mu\lambda^\sigma g_{p\sigma\nu}+\partial_\nu\lambda^\sigma g_{p\mu\sigma}+p\partial_\sigma\lambda^\sigma g_{p\mu\nu}+\lambda^\sigma\partial_\sigma g_{p\mu\nu}\right). \qquad (41)$$

При $c=-\alpha$ закон (4I) есть закон преобразования элементов матрицы, обратной к матрице $\|g_p^{\mu\nu}\|$. Это значит, что вариант 2 сводится к варианту I (путем обращения матрицы) и поэтому не требует отдельного рассмотрения. Далее, при $p\neq-\frac{1}{2}$ без ограничения общности можно рассматривать только величины $g^{\mu\nu}\equiv g_0^{\mu\nu}$, преобразующиеся согласно

$$\delta^* g^{\mu\nu}=\alpha\left(\partial_\sigma\lambda^\nu g^{\mu\sigma}+\partial_\sigma\lambda^\mu g^{\sigma\nu}-\lambda^\sigma\partial_\sigma g^{\mu\nu}\right). \qquad (42)$$

В самом деле, от величины $g^{\mu\nu}$ можно всегда вернуться к $g_p^{\mu\nu}$ с помощью замены

$$g_p^{\mu\nu}=g_0^{\frac{p}{2}}g^{\mu\nu} \qquad \left(g_0=\mathrm{Det}\|g^{\mu\nu}\|\right). \qquad (43)$$

Это преобразование обратимо при всех p, кроме $p=-\frac{1}{2}$. Случай $p=-\frac{1}{2}$ будет рассмотрен отдельно.

Обращает на себя внимание, что (42) совпадает с законом инфинитезимального преобразования фундаментального тензора в римановой геометрии (в форме локальных вариаций, см. /27/ и /28/, стр.323). Величины $g_p^{\mu\nu}$ и $g_{p\mu\nu}$ преобразуются, как контра- и ковариантный тензоры второго ранга с весом в римановой геометрии.

3.I.3. Перейдем теперь к обсуждению других вариантов. Начнем с вариантов 3–6:

$$3)\ \delta^* h_{\mu\nu}=\partial_\mu\lambda^\nu+\partial_\nu\lambda^\mu+p\delta_{\mu\nu}\partial_\sigma\lambda^\sigma \tag{44}$$

$$4)\ \delta^* h_{\mu\nu}=\partial_\mu\lambda^\nu+\partial_\nu\lambda^\mu+p\delta_{\mu\nu}\partial_\sigma\lambda^\sigma-4f\delta_{\mu\nu}\partial_\rho\lambda^\sigma h_{\rho\sigma}+f\delta_{\mu\nu}\partial_\sigma\lambda^\sigma h_{\rho\rho} \tag{45}$$

$$5)\ \delta^* h_{\mu\nu}=\partial_\mu\lambda^\nu+\partial_\nu\lambda^\mu+p\delta_{\mu\nu}\partial_\sigma\lambda^\sigma+f\delta_{\mu\nu}\partial_\sigma\lambda^\sigma h_{\rho\rho} \tag{46}$$

$$6)\ \delta^* h_{\mu\nu}=\partial_\mu\lambda^\nu+\partial_\nu\lambda^\mu+p\delta_{\mu\nu}\partial_\sigma\lambda^\sigma-2f(2+4p)\partial_\sigma\lambda^\sigma h_{\mu\nu}-\\ -2f(\partial_\mu\lambda^\nu+\partial_\nu\lambda^\mu)h_{\rho\rho}+f\delta_{\mu\nu}\partial_\sigma\lambda^\sigma h_{\rho\rho} \tag{47}$$

В вариантах 4 – 6 можно перейти к новым переменным поля, которые будут преобразовываться также как $h_{\mu\nu}$ в варианте 3.

Вариант 4 сводится к 3 заменой

$$h_{\mu\nu}\to\varphi_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}+f\delta_{\mu\nu}\left(h_2-\frac{1}{4}h_1^2\right) \tag{48}$$

с обратным преобразованием вида

$$h_{\mu\nu}=\varphi_{\mu\nu}-f\delta_{\mu\nu}\left(\varphi_2-\frac{1}{4}\varphi_1^2\right) \tag{48^I}$$

где $h_1=h_{\mu\mu}$, $h_2=h_{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ и аналогично для φ .

Вариант 5 переходит в 3 после замены

$$h_{\mu\nu}\to\varphi_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}-\frac{1}{8f}\delta_{\mu\nu}\left[2fh_1-(1+2p)\ln\left(1+\frac{2fh_1}{1+2p}\right)\right]. \tag{49}$$

Обратное преобразование выглядит

$$h_{\mu\nu}=\varphi_{\mu\nu}-\frac{1}{8f}\delta_{\mu\nu}\left\{2f\varphi_1+(1+2p)\left[1-\exp\left(\frac{2f\varphi_1}{1+2p}\right)\right]\right\}. \tag{49^I}$$

Наконец, вариант 6 сводится к 3 с помощью преобразования

$$h_{\mu\nu}\to\varphi_{\mu\nu}=\frac{h_{\mu\nu}}{1-2fh_1}-\frac{1}{16f}\delta_{\mu\nu}\left[\frac{4fh_1}{1-2fh_1}-(1+2p)\ln\frac{1+2p(1-2fh_1)^2}{(1+2p)(1-2fh_1)^2}\right] \tag{50}$$

с обратным преобразованием

$$h_{\mu\nu}=\frac{1}{\sqrt{(1+2p)\exp\left(\frac{4f\varphi_1}{1+2p}\right)-2p}}\left\{\varphi_{\mu\nu}-\frac{1}{8f}\delta_{\mu\nu}\left[1+2f\varphi_1-\right.\right.\\ \left.\left.-\sqrt{(1+2p)\exp\left(\frac{4f\varphi_1}{1+2p}\right)-2p}\right]\right\}. \tag{50^I}$$

Эти замены не корректны только при исключительном значении $p=-\frac{1}{2}$.

Вариант 7

$$7)\ \delta^* h_{\mu\nu}=\partial_\mu\lambda^\nu+\partial_\nu\lambda^\mu-\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\partial_\sigma\lambda^\sigma-2f(\partial_\mu\lambda^\nu+\partial_\nu\lambda^\mu)h_1-\\ -2f'(\lambda^\nu\partial_\mu+\lambda^\mu\partial_\nu)h_1+f\delta_{\mu\nu}\partial_\sigma\lambda^\sigma h_1+f'\delta_{\mu\nu}\lambda^\sigma\partial_\sigma h_1 \tag{5I}$$

с самого начала соответствует $p=-\frac{I}{2}$. Все варианты при $p=-\frac{I}{2}$ не представляют интереса. Именно, как будет показано при обсуждении уравнений движения в разделе 6, при $p=-\frac{I}{2}$ нельзя построить даже свободного уравнения, которое бы описывало спин 2.

Вариант 3) есть частный случай варианта I при $\alpha=0$, и поэтому соответствующие вариации других полей, лагранжиан и т.п. могут быть получены путем предельного перехода $\alpha\to0$. Если не выходить за рамки минимальных взаимодействий, в этом варианте получается только теория свободного тензорного поля (разд.6).

3.I.4. Итак, мы видим, что остается исследовать только группу вариаций $h_p^{\mu\nu}$ (36^I) (вариант I). Для вариаций (36^I) характерно, что при частном выборе

$$\alpha\lambda^\mu=const \tag{52}$$

(36^{I}) есть просто преобразование лоренцова сдвига, а при

$$a\lambda^{\mu} = \omega^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \quad \left(\omega^{\mu}{}_{\nu} = -\omega^{\nu}{}_{\mu} = const\right) \tag{52^{I}}$$

(36^{I}) совпадает с лоренцовскими вращениями. Инвариантность относительно этих преобразований связана с сохранением энергии-импульса и момента количества движения. В системе взаимодействующих полей сохраняются только полные энергия-импульс и момент количества движения. Поэтому при исследовании вида вариаций для других полей мы должны будем в каждом случае требовать, чтобы при $a\lambda^{\mu} = const$ и $a\lambda^{\mu} = \omega^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$ эти вариации совпадали по виду с лоренцовыми сдвигами и вращениями, соответственно.

3.2. Группы вариаций скалярного поля

Группа преобразований (I3) - (I6) есть единая группа, которая дает тождество (8) и только его. Другими словами, все поля должны преобразовываться по представлению одной и той же группы, т.е. результат скобочной операции Ли для любого поля должен быть представим в виде преобразования с одной и той же λ^{μ}_{ck} (уже найденной для тензорного поля).

Наиболее общее преобразование скалярного поля с константами размерности см записывается

$$\delta^{*}\varphi = s\,\partial_{\rho}\lambda^{\rho}\varphi + s'\lambda^{\rho}\partial_{\rho}\varphi. \tag{53}$$

Анализируя соотношение структуры

$$\left(\delta^{*}_{\lambda_2}\delta^{*}_{\lambda_1} - \delta^{*}_{\lambda_1}\delta^{*}_{\lambda_2}\right)\varphi = \delta^{*}_{\lambda_{ck}}\varphi \tag{54}$$

в подлежащем рассмотрению варианте I с λ^{μ}_{ck} (33) находим две возможности

$$\delta^{*}\varphi_{s} = -a\lambda^{\rho}\partial_{\rho}\varphi_{s} + s\,\partial_{\rho}\lambda^{\rho}\varphi_{s}, \tag{55}$$

$$\delta^{*}\varphi = 0. \tag{56}$$

Решение (56) отбрасываем, как несовпадающее при λ^{μ} (52) с преобразованиями сдвига и вращений скалярного поля (см. п.3.I.4.).

В оставшемся решении (55) можно ограничиться значением $s = 0$ и рассматривать только $\varphi \equiv \varphi_0$ с законом преобразования

$$\delta^{*}\varphi = -a\lambda^{\rho}\partial_{\rho}\varphi. \tag{57}$$

Переход от φ к φ_s можно осуществить с помощью замены

$$\varphi_s = g_0^{\frac{s}{2a}}\varphi. \tag{58}$$

3.3. Группы вариаций векторного поля.

Общая форма вариаций векторного поля, содержащих константы размерности см, есть

$$\delta^{*}b_{\mu} = k\,\partial_{\sigma}\lambda^{\sigma}b_{\mu} + k'\lambda^{\sigma}\partial_{\sigma}b_{\mu} + l\,\partial_{\sigma}\lambda^{\mu}b_{\sigma} + l'\lambda^{\mu}\partial_{\sigma}b_{\sigma} +$$

$$+ m\,\partial_{\mu}\lambda^{\sigma}b_{\sigma} + m'\lambda^{\sigma}\partial_{\mu}b_{\sigma} + \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\left(n\,\partial_{\lambda}\lambda^{\nu}b_{\rho} + n'\lambda^{\nu}\partial_{\lambda}b_{\rho}\right). \tag{59}$$

Снова разрешая соответствующее соотношение структуры с λ^{μ}_{ck} (33), находим, что интересующие нас вариации могут иметь вид

$$\delta^{*}b_{k\mu} = k\,\partial_{\sigma}\lambda^{\sigma}b_{k\mu} - a\lambda^{\sigma}\partial_{\sigma}b_{k\mu} - a\,\partial_{\mu}\lambda^{\sigma}b_{k\sigma} \tag{60}$$

$$\delta^{*}b^{\mu}_{k} = k\,\partial_{\sigma}\lambda^{\sigma}b^{\mu}_{k} - a\lambda^{\sigma}\partial_{\sigma}b^{\mu}_{k} + a\,\partial_{\sigma}\lambda^{\mu}b^{\sigma}_{k} \tag{61}$$

$$\delta^{*}b_{\mu} = k\,\partial_{\sigma}\lambda^{\sigma}b_{\mu} - a\lambda^{\sigma}\partial_{\sigma}b_{\mu} \tag{62}$$

$$\delta^{*}b_{\mu} = 0. \tag{63}$$

Решения (62) и (63) следует исключить, так как они не переходят в лоренцовские сдвиги и вращения векторного поля при частном выборе λ^{ν} в виде (52).

В дальнейшем существенную роль будут играть только преобразования (60) и (6I). Чтобы различать их, мы во втором случае пишем у векторного поля индекс сверху. Так записанные (60) и (6I) обнаруживают непосредственное сходство с законами преобразования в римановой геометрии для ко- и контравариантных векторов с весом.

Во всех преобразованиях k можно считать равным нулю, т.к. можно произвести замену переменных вида

$$b_{k\mu} = g_0^{\frac{k}{2a}} b_\mu \qquad (64)$$

$(b_\mu \equiv b_{0\mu})$. Вариации вида (6I) не требуют отдельного анализа, так как замена переменных поля $b^\mu = g^{\mu\nu} b_\nu$ переводит (6I) в (60).

3.4. Группа вариаций спинорного поля

Вывод групп вариаций для спинорного поля является существенно более трудной задачей. Он был дан нами в /29/. Не повторяя, кратко сформулируем результаты. Разрешая соотношение структуры

$$\left(\delta^*_{\lambda_2}\delta^*_{\lambda_1} - \delta^*_{\lambda_1}\delta^*_{\lambda_2}\right)\psi = \delta^*_{\lambda_{ck}}\psi \qquad (65)$$

(с λ^μ_{ck} (33)) при условии, что $\delta^*_\lambda \psi$ переходит в лоренцовское преобразование спинора при λ^μ (52), мы доказали в /29/, что группа вариаций спинорного поля записывается *)

$$\delta^*\psi = -a\lambda^\rho \partial_\rho \psi + \frac{ia}{4}\left(\partial_\mu \lambda^\nu + \Delta^{\mu\nu}\right)\sigma_{\nu\mu}\psi \qquad (66)$$

*) Очевидно, что используемый нами спинор удвоенной размерности Ψ преобразуется по этому же закону.

В (66) $\sigma_{\nu\mu} = -i(\gamma_\nu\gamma_\mu - \delta_{\mu\nu})$ $(\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu})$,

$$\Delta^{\mu\nu} = \sum_{m,n=0}^{\infty} a^{m+n} c_{mn} (h^m)^{\mu\sigma}\left(\partial_\sigma\lambda^\rho + \partial_\rho\lambda^\sigma\right)(h^n)^{\rho\nu}, \qquad (67)$$

где $(h^m)^{\mu\sigma} = h^{\mu\sigma_1} h^{\sigma_1\sigma_2} \dots h^{\sigma_{m-1}\sigma}$, а $h^{\mu\nu} = h^{\mu\nu}_{p=0}$.

Коэффициенты c_{mn} задаются производящей функцией

$$G(x,y) = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+y}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+y}} = \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn} x^m y^n . \qquad (68)$$

Вариации спинора (66) существенно отличаются от вариаций уже рассмотренных полей с целым спином (тензора (36[I]), скаляра (55) и вектора (60)). Для спинора характерна нелинейность закона преобразования по полю $h^{\mu\nu}$. На языке римановой геометрии это означает, что спиноры преобразуются <u>по нелинейному представлению группы общековариантных преобразований</u>.

Приведем еще также некоторые полезные формулы. С помощью (68) можно представить матрицу $\Delta = \|\Delta^{\mu\nu}\|$ в удобной параметрической форме

$$\Delta = \frac{1}{2}\int_0^\infty dz\, e^{-z\tau}\left[\tau, \Lambda + \tilde{\Lambda}\right]_- e^{-z\tau}, \qquad (69)$$

где $\Lambda = \|\partial_\alpha\lambda^\beta\|$, а $\tau = \|\tau^{\mu\nu}\|$ есть матрица с элементами

$$\tau^{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}ah^{\mu\nu} + \dots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}a^n (h^n)^{\mu\nu} + \dots =$$

$$= \left(\sqrt{1+ah}\right)^{\mu\nu} = \left(\sqrt{g}\right)^{\mu\nu}, \quad \left(g = \|g^{\mu\nu}\|\right). \qquad (70)$$

Еще одно представление для $\Delta^{\mu\lambda}$ *)

$$\Delta^{\mu\lambda} = \partial_\alpha\lambda^\beta\left(\tau^{\mu\nu}\frac{\delta\tau^{\nu\lambda}}{\delta g^{\alpha\beta}} - \frac{\delta\tau^{\mu\nu}}{\delta g^{\alpha\beta}}\tau^{\nu\lambda}\right) \qquad (71)$$

*) При вычислении производной $\frac{\delta\tau^{\nu\lambda}}{\delta g^{\alpha\beta}}$ удобно использовать формулу

$$\delta\tau = a\int_0^\infty dz\, e^{-z\tau}\,\delta h\, e^{-z\tau}$$

Укажем закон преобразования величины τ

$$\delta^*\tau = -\alpha\lambda^\rho\partial_\rho\tau + \frac{\alpha}{4}\tau(3\Lambda-\tilde\Lambda+2\Delta) - \frac{\alpha}{4}(\Lambda-3\tilde\Lambda+2\Delta)\tau \qquad (72)$$

(тильда означает транспонирование).

В /29/ дается также закон преобразования спиноров с весом.

3.5. Обсуждение найденных групп

Итак, доказано, что единственно возможными (в рамках принципа минимальности и с точностью до замен полевых переменных) преобразованиями, обеспечивающими исключение спина I у тензорного поля, являются преобразования тензорного поля (36^I)(сводимые к (42)), скалярного поля (55), векторного поля (60) и спинорного поля (66). Когда тензорное поле не имеет массы, теория инвариантна относительно этих преобразований, и они являются калибровочными преобразованиями, подобными калибровочным преобразованиям в электродинамике. Как и в электродинамике, они производятся в одной и той же системе отсчета и имеют то же назначение /30/. Замечательно, что вместе с тем эти калибровочные преобразования формально совпадают с преобразованиями тензора, скаляра, вектора и спинора римановой геометрии. Поэтому мы можем сразу использовать правила римановой геометрии и прийти к выводу, что уравнения для безмассового тензорного поля совпадают с уравнениями теории гравитации Эйнштейна.

На этом можно было бы окончить обсуждение теории безмассового тензорного поля. Однако будет поучительно, закрыв глаза на существование римановой геометрии, непосредственно восстановить лагранжиан с помощью тождества (20). Что же касается массивного тензорного поля, то восстановление массовых членов только и может быть осуществлено на основе тождества (20).

4. Восстановление лагранжиана в теории безмассового тензорного поля

4.I. Используя тождество (20) и полученные вариации полей, можно найти лагранжиан и попутно прийти к правилам типа тех, которые применяются в римановой геометрии при построении инвариантов и.т.п. Окончательный результат ясен (см. конец предыдущего раздела). Однако получение лагранжиана из тождеств особенно ясно показывает, что уравнения Эйнштейна, действительно , могут быть выведены в рамках плоского пространства без какого бы то ни было привлечения понятий римановой геометрии.

При разрешении тождества мы пользуемся способом, аналогичным тому, который применяли Янг и Миллс /23/ и Утияма /24/ для нахождения лагранжиана векторных полей при заданных трансформационных свойствах.

4.2. Для безмассовой части лагранжиана $\mathcal{L}'' = \mathcal{L}|_{m=0}$ тождество (20) принимает вид

$$\delta^*\mathcal{L}'' \equiv \partial_\mu X''^\mu \qquad (73)$$

или в развернутой форме

$$\delta^*\mathcal{L}'' = \frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\mu\nu}}\delta^* g^{\mu\nu} + \frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\mu\nu}_{,\lambda}}\delta^* g^{\mu\nu}_{,\lambda} + \frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\mu\nu}_{,\lambda\rho}}\delta^* g^{\mu\nu}_{,\lambda\rho} + \frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta b_\mu}\delta^* b_\mu + \frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta b_{\mu,\nu}}\delta^* b_{\mu,\nu} + \frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta\Psi}\delta^*\Psi + \frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta\Psi_{,\lambda}}\delta^*\Psi_{,\lambda} + \frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta\varphi}\delta^*\varphi + \frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta\varphi_{,\lambda}}\delta^*\varphi_{,\lambda} \equiv \partial_\mu X''^\mu, \qquad (73^I)$$

где индексы после запятой обозначают производные, например,

$B_{\mu,\nu}=\partial_\nu B_\mu$, а вариации полей должны быть взяты в виде (42), (57), (60),(с $k=0$) и (66). В (73^I) входит неизвестная векторная функция X''^μ . Она должна быть построена из полей и λ^μ , и при ее определении мы будем опираться на требование непротиворечивости с инвариантностью относительно неоднородной группы Лоренца.

Трансляционная инвариантность означает, что $\mathcal{L}''$ не зависит явно от x , т.е. что

$$\left(\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\alpha\beta}}+\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\alpha\beta}_{,\tau}}\partial_\tau+\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\alpha\beta}_{,\sigma\tau}}\partial_\sigma\partial_\tau\right)\partial_\rho g^{\alpha\beta}+\left(\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta B_\alpha}+\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta B_{\alpha,\tau}}\partial_\tau\right)\partial_\rho B_\alpha+$$

$$+\left(\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta\Psi}+\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta\Psi_{,\tau}}\partial_\tau\right)\partial_\rho\Psi+\left(\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\varphi}+\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta\varphi_{,\tau}}\partial_\tau\right)\partial_\rho\varphi\equiv\partial_\rho\mathcal{L}''. \tag{74}$$

Из инвариантности относительно преобразований однородной группы Лоренца следует

$$2\left(\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\alpha\rho}}+\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\alpha\rho}_{,\tau}}\partial_\tau+\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\alpha\rho}_{,\sigma\tau}}\partial_\sigma\partial_\tau\right)g^{\alpha\mu}+\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\alpha\beta}_{,\rho}}\partial_\mu g^{\alpha\beta}+$$

$$+2\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\alpha\beta}_{,\rho\sigma}}\partial_\mu\partial_\sigma g^{\alpha\beta}+\left(\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta B_\rho}+\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta B_{\rho,\tau}}\partial_\tau\right)B_\mu+\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta B_{\alpha,\rho}}\partial_\mu B_\alpha+$$

$$+\left(\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta\Psi}+\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta\Psi_{,\tau}}\partial_\tau\right)\frac{i}{4}\sigma_{\rho\mu}\Psi+\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta\Psi_{,\rho}}\partial_\mu\Psi+$$

$$+\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta\varphi_{,\rho}}\partial_\mu\varphi-(\mu\leftrightarrow\rho)\equiv 0. \tag{75}$$

4.3. Приступим теперь к исследованию тождества (73^I). Поскольку мы предполагаем, что в лагранжиан не входят производные полей выше второй, а вариации содержат производные λ^μ не выше первой, то тождество (73^I) содержит производные λ^μ не выше 3-го порядка. Поэтому следствия из тождества (73^I) будут исчерпаны подстановкой в (73^I) $\lambda^\alpha(x)$ в виде

$$\lambda^\alpha(x)=\delta^\alpha_\rho \tag{76}$$

$$\lambda^\alpha(x)=\delta^\alpha_\rho x^\mu \tag{77}$$

$$\lambda^\alpha(x)=\delta^\alpha_\rho x^\mu x^\nu \tag{78}$$

$$\lambda^\alpha(x)=\delta^\alpha_\rho x^\mu x^\nu x^\lambda \tag{79}$$

с фиксированными индексами ρ , μ , ν , λ . Таким образом, тождество (73^I) эквивалентно четырем тождествам, получаемым подстановкой (76) - (79) и уже не содержащим λ^α . Рассмотрим их по очереди.

I) Левая часть тождества, соответствующего выбору (76), с точностью до множителя совпадает с левой частью тождества (74) , выражающего трансляционную инвариантность. Отсюда следует, что $X''^\mu\neq 0$, так как иначе $\partial_\mu\mathcal{L}''=0$ и лагранжиан не мог бы быть функцией полей. Противоречия не будет, если выбрать

$$X''^\mu=-a\lambda^\mu\mathcal{L}''. \tag{80}$$

2) Тогда тождество, соответствующее (77), запишется

$$2\left(\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\rho\alpha}}+\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\rho\alpha}_{,\tau}}\partial_\tau+\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\rho\alpha}_{,\sigma\tau}}\partial_\sigma\partial_\tau\right)g^{\alpha\mu}-\left(\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\alpha\beta}_{,\mu}}+2\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\alpha\beta}_{,\mu\sigma}}\partial_\sigma\right)g^{\alpha\beta}_{,\rho}-$$

$$-\left(\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta B_\mu}+\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta B_{\mu,\tau}}\partial_\tau\right)B_\rho-\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta B_{\alpha,\mu}}B_{\alpha,\rho}-\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta\varphi_{,\mu}}\varphi_{,\rho}-\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta\Psi_{,\mu}}\Psi_{,\rho}+$$

$$+\frac{i}{4}\left(\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta\Psi}+\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta\Psi_{,\tau}}\partial_\tau\right)\left(\sigma_{\rho\mu}+2\tau^{\alpha\beta}\frac{\delta\tau^{\beta\gamma}}{\delta g^{\rho\mu}}\sigma_{\gamma\alpha}\right)\Psi\equiv-\delta^\mu_\rho\mathcal{L}''. \tag{81}$$

Антисимметричная часть (8I) совпадает с тождеством (75), выражающим инвариантность относительно однородной группы Лоренца, и мы видим, что дополнительных модификаций X''^{μ} (80) не требуется.*)

Симметричная часть тождества (8I) служит первым новым ограничением на лагранжиан. В целом тождество (8I) означает инвариантность относительно преобразований полей с

$$\lambda^{\mu} = \omega^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \quad \left(\omega^{\mu}{}_{\nu} = const\right), \qquad (82)$$

т.е. <u>инвариантность относительно полной линейной группы $GL(4)$,</u> содержащей в качестве подгруппы однородную группу Лоренца $\left(\omega^{\mu}{}_{\nu} = -\omega^{\nu}{}_{\mu}\right)$. Заметим, что уже в рамках $GL(4)$ возникают тензоры с верхними и нижними индексами и при умножении тензоров только свертывание верхних индексов с нижними снова дает тензор. Например, скаляр в $GL(4)$ преобразуется по закону

$$\delta^{*}\varphi = - \omega^{\rho}{}_{\sigma} x^{\sigma} \partial_{\rho}\varphi , \qquad (83)$$

а векторы b_{μ} и b^{μ} – согласно

$$\delta^{*} b_{\mu} = -\omega^{\rho}{}_{\sigma} x^{\sigma} \partial_{\rho} b_{\mu} - \omega^{\rho}_{\mu} b_{\rho}$$
$$\delta^{*} b^{\mu} = -\omega^{\rho}{}_{\sigma} x^{\sigma} \partial_{\rho} b^{\mu} + \omega^{\mu}{}_{\rho} b^{\rho},$$

*) При обсуждении вариаций в разделе 3 были отвергнуты законы вида $\delta^{*} b_{\mu} = -a\lambda^{\rho}\partial_{\rho} b_{\mu}$, $\delta^{*}\Psi = -a\lambda^{\rho}\partial_{\rho}\Psi$ и вида $\delta^{*} b_{\mu} = 0$, $\delta^{*}\Psi = 0$, $\delta^{*}\varphi = 0$. Они противоречивы: в первом случае должен был бы сохраняться спиновый момент отдельного поля, во втором – энергия и импульс и полный момент количества движения, что невозможно при взаимодействии. На языке тождеств использование таких "неправильных" законов означало бы, например, отсутствие в антисимметричной части (8I) членов вида

$$\left(\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta b_{\alpha}} + \frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta b_{\alpha,\tau}}\partial_{\tau}\right)\left(\delta_{\alpha\rho} b_{\mu} - \delta_{\alpha\mu} b_{\rho}\right) \text{ или } \left(\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta\Psi} + \frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta\Psi_{,\tau}}\partial_{\tau}\right)\frac{i}{2}\sigma_{\rho\mu}\Psi,$$

которые сами по себе нулю не равны и не могут быть скомпенсированы каким-либо выбором X''^{μ}. Тогда возникло бы явное противоречие с тождеством (75).

так что свертка $b_{\mu} b^{\mu}$ есть скаляр. Используя закон преобразования $g^{\mu\nu}$

$$\delta^{*} g^{\mu\nu} = -\omega^{\rho}{}_{\sigma} x^{\sigma} \partial_{\rho} g^{\mu\nu} + \omega^{\mu}{}_{\rho} g^{\rho\nu} + \omega^{\nu}{}_{\rho} g^{\mu\rho},$$

нетрудно видеть, что $g^{\mu\nu} b_{\nu}$ преобразуется как b^{μ}, т.е. с помощью $g^{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ можно поднимать и опускать индексы.

Подчеркнем еще раз, что мы все время рассматриваем тензоры специальной теории относительности, а верхние и нижние индексы характеризуют их трансформационные свойства относительно калибровочных преобразований $GL(4)$ (а отсюда и относительно общих калибровочных преобразований, найденных в разделе 3 и формально совпадающих с общековариантными преобразованиями).

Далее, при преобразованиях $GL(4)$, согласно (73) и (80),

$$\delta^{*}\mathcal{L}'' = -\omega^{\rho}{}_{\sigma} x^{\sigma} \partial_{\rho}\mathcal{L}'' + \omega^{\rho}{}_{\rho}\mathcal{L}'',$$

т.е. лагранжева плотность преобразуется не как скаляр (83). Удобно перейти к плотности $\mathcal{L}'''$

$$\mathcal{L}''' = \mathcal{L}'' g_{0}^{\frac{1}{2}}, \qquad (84)$$

которая имеет закон преобразования скаляра.

Наконец, интересно отметить, что уже полная линейная группа требует нелинейного закона преобразования спинора (66).

Перейдем к третьему и четвертому тождествам.

3) Подставляя (78) в (73^{I}), находим третье тождество

$$2\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\rho\alpha}_{,\mu}}g^{\alpha\nu}+4\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\rho\alpha}_{,\mu\sigma}}g^{\alpha\nu}_{,\sigma}-\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\alpha\beta}_{,\mu\nu}}g^{\alpha\beta}_{,\rho}-\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta b_{\mu,\nu}}b_\rho+$$

$$+\frac{i}{4}\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta\Psi_{,\mu}}\left(\sigma_{\rho\nu}+2\tau^{\alpha\beta}\frac{\delta\tau^{\beta\gamma}}{\delta g^{\rho\nu}}\sigma_{\gamma\alpha}\right)\Psi+(\mu\leftrightarrow\nu)\equiv 0. \qquad (85)$$

4) Четвертое тождество, отвечающее (79), записывается

$$\sum\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\rho\alpha}_{,\nu\lambda}}g^{\mu\alpha}\equiv 0, \qquad (86)$$

где сумма берется по всем перестановкам индексов μ,ν,λ .

4.4. Для извлечения следствий из третьего и четвертого тождеств удобно перейти к переменным, вид которых подсказывается теорией тяготения Эйнштейна,

$$g^{\mu\nu}\to g^{\mu\nu},\ \partial_\lambda g^{\mu\nu}\to\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=\tfrac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\sigma\nu}+\partial_\nu g_{\mu\sigma}-\partial_\sigma g_{\mu\nu}),$$

$$\partial_\sigma\partial_\tau g^{\mu\nu}\to\begin{cases}A^\rho_{\mu\nu\lambda}=Y^\rho_{\{\mu\nu\lambda\}}{}^{*)},\\ B^\rho_{\mu\nu\lambda}=Y^\rho_{\mu\nu\lambda}-Y^\rho_{\mu\lambda\nu},\end{cases}\quad Y^\rho_{\mu\nu\lambda}=\partial_\lambda\Gamma^\rho_{\mu\nu}+\Gamma^\tau_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\tau\lambda},$$

$$b_\nu\to b_\nu,\ \partial_\mu b_\nu\to\nabla_\mu b_\nu=\partial_\mu b_\nu-\Gamma^\lambda_{\mu\nu}b_\lambda,$$

$$\psi\to\psi,\ \partial_\mu\psi\to\nabla_\mu\psi=(\partial_\mu-\Gamma_\mu)\psi,$$

$$\Gamma_\mu=\frac{1}{4i}\tau^{\alpha\beta}\left[\partial_\beta g_{\mu\gamma}+\tau^{-1}_{\beta\varepsilon}\partial_\mu\tau^{-1}_{\varepsilon\gamma}\right]\tau^{\gamma\delta}\sigma_{\delta\alpha}\,{}^{**)},$$

$$\varphi\to\varphi,\ \partial_\mu\varphi\to\partial_\mu\varphi. \qquad (87)$$

ж) $\{\mu\nu\lambda\}$ означает сумму по всем перестановкам $\mu\nu\lambda$.

жж) См. /29/. $\tau^{-1}_{\beta\varepsilon}$ – элементы матрицы, обратной к $\|\tau^{\mu\nu}\|$

Однако прямой переход к этим переменным в тождествах (85) и (86) сложен. Выгоднее прямо взять лагранжиан как функцию этих новых переменных

$$\mathcal{L}''=\mathcal{L}''(g^{\mu\nu},\Gamma^\lambda_{\mu\nu},A^\rho_{\mu\nu\lambda},B^\rho_{\mu\nu\lambda},b_\nu,\nabla_\mu b_\nu,\psi,\nabla_\mu\psi,\varphi,\partial_\mu\varphi) \qquad (88)$$

и в этих терминах заново получить третье и четвертое тождества. Используем теперь вариации полей (42), (57), (60) (с К=0) и (66) и вытекающие из них вариации новых величин

$$\delta^*\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=-\alpha(\lambda^\rho\partial_\rho\Gamma^\lambda_{\mu\nu}+\lambda^\rho_{,\mu}\Gamma^\lambda_{\rho\nu}+\lambda^\rho_{,\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\rho}-\lambda^\lambda_{,\rho}\Gamma^\rho_{\mu\nu}+\lambda^\lambda_{,\mu\nu})$$

$$\delta^*Y^\lambda_{\mu\nu\sigma}=-\alpha(\lambda^\rho\partial_\rho Y^\lambda_{\mu\nu\sigma}+\lambda^\rho_{,\mu}Y^\lambda_{\rho\nu\sigma}+\lambda^\rho_{,\nu}Y^\lambda_{\mu\rho\sigma}+\lambda^\rho_{,\sigma}Y^\lambda_{\mu\nu\rho}-$$

$$-\lambda^\lambda_{,\rho}Y^\rho_{\mu\nu\sigma}+\lambda^\rho_{,\mu\sigma}\Gamma^\lambda_{\rho\nu}+\lambda^\rho_{,\nu\sigma}\Gamma^\lambda_{\mu\rho}+\lambda^\rho_{,\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\rho\sigma}+\lambda^\lambda_{,\mu\nu\sigma})$$

$$\delta^*\nabla_\mu b_\nu=-\alpha(\lambda^\rho\partial_\rho\nabla_\mu b_\nu+\lambda^\rho_{,\mu}\nabla_\rho b_\nu+\lambda^\rho_{,\nu}\nabla_\mu b_\rho)$$

$$\delta^*\nabla_\mu\Psi=-\alpha\left[\lambda^\rho\partial_\rho\nabla_\mu\Psi+\lambda^\rho_{,\mu}\nabla_\rho\Psi-\frac{i}{4}(\lambda^\tau_{,\rho}+\Delta^{\tau\rho})\sigma_{\rho\tau}\nabla_\mu\Psi\right]$$

$$\delta^*\partial_\mu\varphi=-\alpha(\lambda^\rho\partial_\rho\partial_\mu\varphi+\lambda^\rho_{,\mu}\partial_\rho\varphi). \qquad (89)$$

Тогда четвертое тождество запишется

$$\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta A^\lambda_{\mu\nu\sigma}}\equiv 0 \qquad (90)$$

и, следовательно, лагранжиан $\mathcal{L}''$ зависит от вторых производных $g^{\mu\nu}$ только через $B^\lambda_{\mu\nu\sigma}$. С учетом этого тождества, взамен третьего тождества, находим

$$\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}\equiv 0, \qquad (91)$$

т.е. $\mathcal{L}''$ не зависит также и от $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$.

4.5. Итак, мы пришли к следующим выводам:

а) При калибровочных преобразованиях лагранжева плотность приобретает 4- дивергенцию

$$\delta^* \mathcal{L}'' = -\alpha \partial_\sigma (\lambda^\sigma \mathcal{L}'') . \qquad (92)$$

Она представима в виде (84), где $\mathcal{L}'''$ преобразуется как скаляр (57).

б) При построении $\mathcal{L}'''$ должно соблюдаться правило о свертывании верхних и нижних индексов.

в) Если обычные производные заменить "ковариантными" (см. (87)), то лагранжева плотность не будет явно зависеть от $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ и $A^\rho_{\mu\nu\lambda}$:

$$\mathcal{L}'' = \mathcal{L}''\left(g^{\mu\nu}, B^\rho_{\mu\nu\lambda}, b_\nu, \nabla_\mu b_\nu, \Psi, \nabla_\mu \Psi, \varphi, \partial_\mu \varphi\right). \qquad (93)$$

Хотя эти ограничения очень жесткие, но они еще не закрепляют окончательно лагранжиана. Привлечем дополнительно соображения простоты: потребуем, чтобы уравнения движения были не выше второго порядка и чтобы в пределе $\alpha \to 0$ лагранжиан переходил в сумму свободных лагранжианов для полей $h^{\mu\nu}$, b_ν , Ψ и φ . Тогда для $\mathcal{L}''$ получается вполне определенное выражение

$$\mathcal{L}'' = \Big\{ -\frac{2}{\alpha^2} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{\lambda\rho} g^{\sigma\tau} F_{\lambda\sigma} F_{\rho\tau} - \frac{m^2}{2} g^{\lambda\rho} b_\lambda b_\rho -$$
$$- \frac{1}{2} \tau^{\lambda\rho} \left[\overline{\Psi} \gamma_\lambda \nabla_\rho \Psi - \overline{\Psi} \overleftarrow{\nabla}_\rho \gamma_\lambda \Psi \right] - M \overline{\Psi} \Psi -$$
$$- \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \partial_\lambda \varphi \partial_\rho \varphi - \frac{M^2}{2} \varphi \varphi \Big\} g_0^{-\frac{1}{2}} , \qquad (94)$$

где $R_{\mu\nu} = B^\lambda_{\mu\lambda\nu}$ -"тензор Риччи" , а $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu b_\nu - \nabla_\nu b_\mu = \partial_\mu b_\nu - \partial_\nu b_\mu$. Мы здесь не выписывали негравитационные взаимодействия. Их легко подключить.

Важно отметить, что построенный лагранжиан соответствует принципу минимальности, сформулированному во Введении. Хотя он фактически представляет собою бесконечный ряд по степеням $h^{\mu\nu}$ и содержит константы размерности $см^n$ с любым неотрицательным n , но все эти константы имеют вид α^n и приравнивание нулю любой из них приводит к полному выключению взаимодействия.

4.6. Перейдем теперь к уравнениям движения. Обратим внимание, что в (94) входит тензорное поле с законом преобразования (42), соответствующим "весу" p=0. При обсуждении массовых членов в разделе 5 нас будут интересовать ненулевые значения веса p. Использование ненулевого веса p может быть удобно и при $m=0$. Например, часто применяют величину $\mathfrak{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}_{-1}$ с весом p=-I, для которой без противоречия с уравнениями Эйнштейна можно наложить линейное дополнительное условие $\partial_\mu \mathfrak{g}^{\mu\nu} = \alpha \partial_\mu h^{\mu\nu}_{-1} = 0$ /8-I3/.

Чтобы перейти к любому p достаточно в $\mathcal{L}''$ произвести замену

$$g^{\mu\nu} = g_p^{-\frac{p}{2(1+2p)}} g_p^{\mu\nu} \qquad \left(g_p = \mathrm{Det} \| g_p^{\mu\nu} \| \right), \qquad (95)$$

обратную к (43). Символы Кристоффеля через $g_p^{\mu\nu}$ запишутся

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_p^{\lambda\sigma} \left(\partial_\mu g_{p\sigma\nu} + \partial_\nu g_{p\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{p\mu\nu} \right) +$$
$$+ \frac{p}{4(1+2p)} \left(\delta^\lambda_\nu \partial_\mu + \delta^\lambda_\mu \partial_\nu - g_p^{\lambda\sigma} g_{p\mu\nu} \partial_\sigma \right) \ln g_p , \qquad (96)$$

а $R_{\mu\nu}$ строится из $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ обычным образом.

Из вариационного принципа следует, что уравнения движения для тензорного поля $g_p^{\mu\nu}$ $\left(p \neq -\frac{1}{2}\right)$ записываются*)

$$
\begin{aligned}
& g_0^{-\frac{p+1}{2}}\Big\{-\frac{2}{a^2}\Big(R_{\mu\nu}-\frac{p+1}{2(1+2p)}g_{\mu\nu}R\Big)- \\
& -\frac{1}{2}\Big(g^{\sigma\tau}F_{\mu\sigma}F_{\nu\tau}-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}g^{\lambda\rho}g^{\sigma\tau}F_{\lambda\sigma}F_{\rho\tau}\Big)-\frac{m^2}{2}\Big(b_\mu b_\nu-\frac{p+1}{2(1+2p)}g_{\mu\nu}g^{\lambda\rho}b_\lambda b_\rho\Big)+ \\
& -\Big(\frac{p+2}{8(1+2p)}g_{\mu\nu}\tau^{\lambda\rho}-\frac{1}{2}\frac{\delta\tau^{\lambda\rho}}{\delta g^{\mu\nu}}\Big)(\bar\psi\gamma_\lambda\nabla_\rho\psi-\bar\psi\overleftarrow{\nabla}_\rho\gamma_\lambda\psi)- \\
& -\frac{1}{4}\tau^{-1}_{\alpha\beta}\frac{\delta\tau^{\beta\gamma}}{\delta g^{\mu\nu}}\varepsilon_{\alpha\gamma\delta\sigma}\tau^{\delta\rho}\tau^{-1}_{\sigma\tau}\nabla_\rho(\tau^{\tau\lambda}\bar\psi\gamma_5\gamma_\lambda\psi)-\frac{M}{2(1+2p)}g_{\mu\nu}\bar\psi\psi- \\
& -\frac{1}{2}\Big(\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi-\frac{p+1}{2(1+2p)}g_{\mu\nu}g^{\lambda\rho}\partial_\lambda\varphi\partial_\rho\varphi\Big)+\frac{\mu^2}{4(1+2p)}g_{\mu\nu}\varphi\varphi\Big\}=0, \qquad (97)
\end{aligned}
$$

где $\nabla_\rho(\tau^{\tau\lambda}\bar\psi\gamma_5\gamma_\lambda\psi)=\partial_\rho(\tau^{\tau\lambda}\bar\psi\gamma_5\gamma_\lambda\psi)+\Gamma^\tau_{\rho\sigma}\tau^{\sigma\lambda}\bar\psi\gamma_5\gamma_\lambda\psi=$ $=\tau^{\tau\lambda}(\nabla_\rho\bar\psi\cdot\gamma_5\gamma_\lambda\psi+\bar\psi\gamma_5\gamma_\lambda\nabla_\rho\psi)$. Для краткости уравнение (97) записано через $g^{\mu\nu}\equiv g_0^{\mu\nu}$, а к $g_p^{\mu\nu}$ можно вернуться с помощью (95). Разумеется, уравнение (97) можно привести к эйнштейновскому виду/I/:

---

*) При варьировании удобно использовать вычисления Эддингтона (/31/, § 58), согласно которым для поля $g^{\mu\nu}\equiv g^{\mu\nu}_{p=-1}$ в **отсутствие** других полей $\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\mu\nu}}-\partial_\lambda\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\mu\nu}_{,\lambda}}+\partial_\lambda\partial_\rho\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\mu\nu}_{,\lambda\rho}}=-\frac{2}{a^2}R_{\mu\nu}$. Переход к произвольному р осуществляется с помощью соотношения

$$\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g_p^{\mu\nu}}-\partial_\lambda\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\mu\nu}_{p,\lambda}}+\partial_\lambda\partial_\rho\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\mu\nu}_{p,\lambda\rho}}=\Big(\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\alpha\beta}}-\partial_\lambda\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\alpha\beta}_{,\lambda}}+\partial_\lambda\partial_\rho\frac{\delta\mathcal{L}''}{\delta g^{\alpha\beta}_{,\lambda\rho}}\Big)\frac{\delta g^{\alpha\beta}}{\delta g_p^{\mu\nu}},$$

которое легко доказать, используя формулы $\partial_\lambda\frac{\delta g^{\alpha\beta}_{,\sigma}}{\delta g^{\mu\nu}_{p,\lambda}}=\frac{\delta g^{\alpha\beta}_{,\sigma}}{\delta g^{\mu\nu}_{,p}}$, $\frac{\delta g^{\alpha\beta}_{,\sigma}}{\delta g^{\mu\nu}_{p,\lambda}}=$ $=\delta^\lambda_\sigma\frac{\delta g^{\alpha\beta}}{\delta g_p^{\mu\nu}}$, справедливые всегда, когда новые переменные не зависят от производных старых.

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=-\frac{a^2}{4}T_{\mu\nu}\,, \qquad (98)$$

где

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= g^{\sigma\tau}F_{\mu\sigma}F_{\nu\tau}+m^2b_\mu b_\nu-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Big(\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}g^{\sigma\tau}F_{\lambda\sigma}F_{\rho\tau}+m^2g^{\lambda\rho}b_\lambda b_\rho\Big)+ \\
&+\frac{1}{2}\Big(g_{\mu\nu}\tau^{\lambda\rho}-2\frac{\delta\tau^{\lambda\rho}}{\delta g^{\mu\nu}}\Big)(\bar\psi\gamma_\lambda\nabla_\rho\psi-\bar\psi\overleftarrow{\nabla}_\rho\gamma_\lambda\psi)+ \\
&+\frac{1}{2}\tau^{-1}_{\alpha\beta}\frac{\delta\tau^{\beta\gamma}}{\delta g^{\mu\nu}}\varepsilon_{\alpha\gamma\delta\sigma}\tau^{\delta\rho}\tau^{-1}_{\sigma\tau}\nabla_\rho(\tau^{\tau\lambda}\bar\psi\gamma_5\gamma_\lambda\psi)+Mg_{\mu\nu}\bar\psi\psi+ \\
&+\partial_\mu\varphi\cdot\partial_\nu\varphi-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\big(g^{\lambda\rho}\partial_\lambda\varphi\cdot\partial_\rho\varphi+\mu^2\varphi\varphi\big). \qquad (99)
\end{aligned}
$$

Из уравнения (98) видно, что используемая нами константа связи a связана с константой Эйнштейна $\varkappa$ соотношением $a^2=4\varkappa$, и, следовательно, с гравитационной постоянной k в законе Ньютона соотношением $a^2=32\pi k$. Здесь проявляется одно из достоинств полевого подхода: знак гравитационной константы k (или $\varkappa$) автоматически оказывается положительным,и, следовательно,силы тяготения должны быть силами притяжения /18/.

Интересная запись уравнения для тензорного поля $g^{\mu\nu}\equiv g^{\mu\nu}_{p=-1}$, подчеркивающая аналогию с уравнениями Максвелла, была предложена Папапетру/12/

$$\Box g^{\mu\rho}-\partial_\mu\partial_\sigma g^{\sigma\rho}-\partial_\rho\partial_\sigma g^{\mu\sigma}+\delta_{\mu\rho}\partial_\sigma\partial_\lambda g^{\lambda\sigma}=\frac{a^2}{2}\Theta_{\mu\rho}\,, \qquad (100)$$

где Θ – симметричный сохраняющийся ($\partial_\mu\Theta_{\mu\rho}=0$) тензор энергии – импульса всех полей, включая гравитационное. Эта форма уравнения является следствием тождества

$$
\begin{aligned}
& g_0^{-\frac{1}{2}}\Big(R^\mu_\rho-\frac{1}{2}\delta^\mu_\rho R+\frac{a^2}{4}T^\mu_\rho\Big)\equiv\frac{1}{2}[\Box g^{\mu\rho}-\partial_\mu\partial_\sigma g^{\sigma\rho}-\partial_\rho\partial_\sigma g^{\mu\sigma}+\delta_{\mu\rho}\partial_\sigma\partial_\lambda g^{\lambda\sigma}]+ \\
& +\frac{a^2}{4}\Theta_{\mu\rho}+\frac{a^2}{8}\partial_\sigma M_{\mu\rho|\sigma}+\frac{a^2}{8}(x^\mu\partial_\sigma t^\sigma_\rho-x^\rho\partial_\sigma t^\sigma_\mu)-\frac{a^2}{4}\Big(\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta b_\mu}-\partial_\sigma\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta b_{\mu,\sigma}}\Big)b_\rho \\
& +\frac{ia^2}{16}\Big(\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta\Psi}-\partial_\sigma\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta\Psi_{,\sigma}}\Big)\Big(\sigma_{\rho\mu}+2\tau^{\alpha\beta}\frac{\delta\tau^{\beta\gamma}}{\delta g^{\rho\mu}}\sigma_{\gamma\alpha}\Big)\Psi, \qquad (101)
\end{aligned}
$$

где $M_{\mu\rho|\sigma} = -x^{\mu}\Theta_{\rho\sigma} + x^{\rho}\Theta_{\mu\sigma}$ - тензор момента количества движения, а t^{σ}_{ρ} - канонический тензор энергии-импульса. Тождество (I0I) есть следствие тождеств для лагранжиана (см.Приложение 3).

4.7. Еще раз подчеркнем, что лагранжиан и уравнения движения, о которых шла речь в этом разделе, фактически представляют собой бесконечные ряды по степеням $ah^{\mu\nu}$ /8,9/. Эти ряды не обрываются в отличие от других известных полевых теорий. Чтобы получить явную запись лагранжиана и уравнений движения через поле $h^{\mu\nu}_{p}$, следует подставить в них

$$g^{\mu\nu}_{p} = \delta_{\mu\nu} + ah^{\mu\nu}_{p}, \tag{I02}$$

$$g_{p\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - ah^{\mu\nu}_{p} + a^2 h^{\mu\lambda}_{p} h^{\lambda\nu}_{p} - \cdots \quad \text{(геометрическая прогрессия)}, \tag{I03}$$

$$g_p = 1 + ah_1 + \frac{a^2}{2}(h_1^2 - h_2) + \frac{a^3}{6}(h_1^3 - 3h_1h_2 + 2h_3) + \frac{a^4}{24}(h_1^4 - 6h_1^2h_2 + 8h_1h_3 + 3h_2^2 - 6h_4), \tag{I04}$$

где $h_1 = h^{\alpha\alpha}_{p}$, $h_2 = h^{\alpha\beta}_{p} h^{\beta\alpha}_{p}$ и т.д.

5. Массивное тензорное поле

5.I. Теперь обратимся к построению теорий массивного тензорного поля. Чтобы не вступить в противоречие с лоренц-инвариантностью, в тождестве (20) следует положить

$$X^{\mu} = -a\lambda^{\mu}\mathcal{L}, \tag{I05}$$

так что оно запишется

$$\delta^*\mathcal{L} = -2m^2(h^{\mu\nu}_{p} + q\delta_{\mu\nu}h^{\alpha\alpha}_{p})\partial_{\mu}\lambda^{\nu} - a\partial_{\mu}(\lambda^{\mu}\mathcal{L}). \tag{I06}$$

Здесь возможно существенное обобщение, а именно в рамках спинового принципа можно взять в качестве исходного тождества

$$\delta^*\mathcal{L} \equiv -2m^2\left[f^{\mu\nu}(h^{\alpha\beta}_{p}) + q\delta_{\mu\nu}f^{\rho\rho}(h^{\alpha\beta}_{p})\right]\partial_{\mu}\lambda^{\nu} - a\partial_{\mu}(\lambda^{\mu}\mathcal{L}), \tag{I07}$$

где $f^{\mu\nu}$ - произвольная функция от $h^{\alpha\beta}_{p}$, допускающая обращение. В самом деле, мы можем принять $f^{\mu\nu}$ за новую полевую переменную, и для $f^{\mu\nu}$ из тождества (I07) (сравни раздел 2) следует линейное дополнительное условие, ограничивающее спин,

$$m^2(\partial_{\mu}f^{\mu\nu} + q\partial_{\nu}f^{\mu\mu}) = 0, \tag{I08}$$

которое в терминах $h^{\mu\nu}_{p}$ имело бы весьма нелинейную структуру. Под $h^{\mu\nu}_{p}$ в (I06) мы подразумевали полевую переменную, которая варьируется по линейному закону (36) (или (37)). Понятно, что поле $f^{\mu\nu}$, будет варьироваться, вообще говоря, по нелинейному закону. Тем самым, переходя к тождеству (I07), мы охватываем широкий класс нелинейных вариаций.

Разобьем лагранжеву плотность на две части

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}'' + m^2\mathcal{L}_m, \tag{I09}$$

где $\mathcal{L}''$ -"безмассовая"часть, не содержащая параметра m и поэтому, как показано в разделе 4, удовлетворяющая тождеству (92), а $m^2\mathcal{L}_m$ -"массовый" член тензорного поля. В силу (92),(I07) и (I09) $\mathcal{L}_m$ удовлетворяет тождеству

$$\delta^*\mathcal{L}_m \equiv -2(f^{\mu\nu} + q\delta_{\mu\nu}f^{\rho\rho})\partial_{\mu}\lambda^{\nu} - a\partial_{\mu}(\lambda^{\mu}\mathcal{L}_m). \tag{II0}$$

Массовый член $\mathcal{L}_m$ может иметь сложную конструкцию и, кроме члена, выделенного в (5), может включать в себя и другие выражения. Однако мы предположим, что $\mathcal{L}_m$ зависит только от $g_p^{\mu\nu}$ (или, что то же самое от $h_p^{\mu\nu}$ или $f^{\mu\nu}$), но не зависит от других полей и от производных тензорного поля

$$\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m(g_p^{\mu\nu}).$$

Тогда тождество (IIO) будет эквивалентно двум тождествам. Первое из них (соответствующее $X^\alpha = \mathrm{const}$) просто выражает трансляционную инвариантность. Второе, получающееся при $X^\alpha = \delta_{\alpha\rho} x^\mu$, имеет вид

$$2a \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g_p^{\rho\alpha}} g_p^{\mu\alpha} + ap\delta_{\mu\rho} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g_p^{\alpha\beta}} g_p^{\alpha\beta} \equiv -2\left(f^{\mu\rho} + q\delta_{\mu\rho} f^{\nu\nu}\right) - \\ - a\delta_{\mu\rho}\mathcal{L}_m. \tag{III}$$

Сворачивая в (III) индексы μ и ρ и используя полученный результат, исключаем в (III) $\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g_p^{\alpha\beta}} g_p^{\alpha\beta}$. После этого тождество (III) сводится к

$$2a \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g_p^{\mu\nu}} + \frac{a}{1+2p} g_{p\mu\nu} \mathcal{L}_m \equiv -2 g_{p\mu\alpha}\left[f^{\alpha\nu} + \frac{2q-p}{2(1+2p)} \delta_{\alpha\nu} f^{\beta\beta}\right] \tag{II2}$$

и далее к

$$\delta\left(\mathcal{L}_m g_p^{\frac{1}{2(1+2p)}}\right) \equiv -\frac{1}{a} g_p^{\frac{1}{2(1+2p)}} \delta g_p^{\alpha\beta} g_{p\beta\gamma}\left[f^{\gamma\alpha} + \frac{2q-p}{2(1+2p)} \delta_{\gamma\alpha} f^{\rho\rho}\right]. \tag{II2^{I}}$$

Это тождество определяет $\mathcal{L}_m$ в любой теории тензорного поля, в которой выполнено дополнительное условие (IO8). Функцию $f^{\mu\nu}(g_p^{\alpha\beta})$ можно выбрать многими способами. Мы остановимся на специальной

форме $f^{\mu\nu}$

$$f_p^{\mu\nu} = \frac{1}{na}\left(g_p^{n\mu\nu} - \delta_{\mu\nu}\right), \tag{II3}$$

где $g_p^{n\mu\nu}$ - элементы матрицы $\|g_p^{\mu\nu}\|^n$, причем $g_p^{0\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Эта форма охватывает ранее встречавшиеся полевые переменные: $f_p^{\mu\nu} = h_p^{\mu\nu}$ при $n=1$, $f_p^{\mu\nu} = h_{p\mu\nu}$ при $n=-I$ и $f_p^{\mu\nu} = \frac{2}{a}\left(\tau_p^{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu}\right)$ при $n = \frac{I}{2}$, где $\tau_p^{\mu\nu}$ есть элементы матрицы $\|g_p^{\mu\nu}\|^{1/2}$ "Корень" из $g^{\mu\nu} = g_0^{\mu\nu}$, как мы видели в разделе 3.4, играл важную роль при изучении спиноров. Подставляя (II3) в (II2^I), получаем

$$\delta\left(\mathcal{L}_m g_p^{\frac{1}{2(1+2p)}}\right) \equiv -\frac{1}{na} g_p^{\frac{1}{2(1+2p)}} \left[\delta g_p^{\mu\nu} g_p^{(n-1)\mu\nu} + \right. \\ \left. + \frac{2q-p}{2(1+2p)} \delta g_p^{\mu\nu} g_{p\mu\nu} g_p^{n\alpha\alpha} - \frac{1+4q}{1+2p} \delta g_p^{\mu\nu} g_{p\mu\nu}\right]. \tag{II4}$$

Это уравнение легко интегрируется, когда $\frac{2q-p}{2(1+2p)} = \frac{1}{2n(1+2p)}$, т.е. когда

$$q = \frac{np+1}{2n}. \tag{II5}$$

В этом случае находим

$$\mathcal{L}_m = C g_p^{-\frac{1}{2(1+2p)}} - \frac{1}{n^2 a^2}\left\{g_p^{n\gamma\gamma} - 2\left[(1+2p)n + 2\right]\right\}.$$

Константу C можно определить из требования, чтобы при $a = 0$ массовый член был квадратичен по $f_p^{\mu\nu}$. Это дает *) $C = -\frac{2(1+2p)}{na^2}$. Таким образом, мы получаем семейство массовых членов

---

*) С использованием разложения

$$g_p^{-\frac{1}{2(1+2p)}} = 1 - \frac{a}{2(1+2p)} f_1 + \frac{a^2}{8(1+2p)^2}\left[f_1^2 + 2n(1+2p) f_2\right] - \\ - \frac{a^3}{48(1+2p)^3}\left[f_1^3 + 6n(1+2p) f_1 f_2 + 8n^2(1+2p)^2 f_3\right] + O(a^4)$$

$$m^2\mathcal{L}_m=\frac{m^2}{na^2}\left\{-2(1+2p)g_p^{-\frac{1}{2(1+2p)}}-\frac{1}{n}g_p^{n\gamma\gamma}+\frac{2}{n}\left[(1+2p)n+2\right]\right\}=$$

$$=-\frac{m^2}{4n(1+2p)}\left[f_1^2+2n(1+2p)f_2\right]+\frac{am^2}{24n(1+2p)^2}\left[f_1^3+6n(1+2p)f_1f_2+8n^2(1+2p)^2f_3\right]+O(a^2), \qquad (II6)$$

где $f_1=f_p^{\alpha\alpha}$, $f_2=f_p^{\alpha\beta}f_p^{\beta\alpha}$, $f_3=f_p^{\alpha\beta}f_p^{\beta\gamma}f_p^{\gamma\alpha}$. Уравнение движения для массового тензорного поля запишется

$$\text{ЛЧУ (97)} + \frac{m^2}{na^2}\left[g_p^{-\frac{1}{2(1+2p)}}g_{p\mu\nu}-g_p^{(n-1)\mu\nu}\right]=0. \qquad (II7)$$

где ЛЧУ (97) означает "левая часть уравнения (97)".

Условие Гильберта-Лоренца, вытекающее из уравнения (II7), с учетом (II5) принимает вид

$$m^2\left(\partial_\mu f_p^{\mu\nu}+\frac{np+1}{2n}\partial_\nu f_p^{\mu\mu}\right)=0, \text{ или } m^2\left(\partial_\mu g_p^{n\mu\nu}+\frac{np+1}{2n}\partial_\nu g_p^{n\mu\mu}\right)=0. \qquad (II8)$$

При $p\neq-\frac{n+2}{2n}$ $\left(q\neq-\frac{1}{4}\right)$ это условие может быть сведено к условию Лоренца

$$m^2\partial_\mu f_{p'}^{\prime\mu\nu}=0 \qquad (II8^I)$$

Для этого следует произвести замену переменных поля

$$f_{p'}^{\prime\mu\nu}=f_p^{\mu\nu}+\frac{np+1}{2n}\delta_{\mu\nu}f_p^{\rho\rho} \qquad (II9)$$

Согласно определению $f_p^{\mu\nu}$ и $f_{p'}^{\prime\mu\nu}$, (II3) и (II9), имеем

$$\delta^* f_p^{\mu\nu}=\partial_\mu\lambda^\nu+\partial_\nu\lambda^\mu+p\delta_{\mu\nu}\partial_\sigma\lambda^\sigma + \text{мультипликативные члены}$$

$$\delta^* f_{p'}^{\prime\mu\nu}=\partial_\mu\lambda^\nu+\partial_\nu\lambda^\mu+p'\delta_{\mu\nu}\partial_\sigma\lambda^\sigma + \text{мультипликативные члены}$$

(разумеется, другие).

где

$$p'=2\left(p+\frac{n+1}{2n}\right)^2-\frac{n^2+1}{2n^2} \qquad (I20)$$

В этих новых переменных лагранжеву плотность и уравнения движения можно оставить в форме (94),(II6) и (II7), полагая там

$$g_p^{n\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}+naf_p^{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}+na\left\{f_{p'}^{\prime\mu\nu}-\frac{np+1}{2\left[(1+2p)n+2\right]}\delta_{\mu\nu}f_{p'}^{\prime\rho\rho}\right\},$$

$$g_p^{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}+af_p^{\mu\nu}+\frac{1-n}{2}a^2f_p^{\mu\lambda}f_p^{\lambda\nu}+\frac{(1-n)(1-2n)}{6}a^3f_p^{\mu\lambda}f_p^{\lambda\rho}f_p^{\rho\nu}+\dots \qquad (II9^I)$$

Таким образом, мы нашли для массивного тензорного поля двухпараметрическое семейство неэквивалентных теорий, характеризуемых значением параметров p' и n. В каждой такой теории поле $f_{p'}^{\prime\mu\nu}$ есть суперпозиция спина 2 с массой m и спина 0 с массой $m_0=$ $=m\sqrt{-\frac{1+2p'}{2+p'}}$. Это видно из свободного уравнения для составляющей поля со спином 0

$$\frac{2+p'}{1+2p'}\Box f_{p'(0)}^{\prime\mu\nu}+m^2f_{p'(0)}^{\prime\mu\nu}=0$$

(см.Приложение 2). Отсюда следует, что значения p' заключены в пределах $-2\leqslant p'<-\frac{I}{2}$ (иначе масса скалярной составляющей поля $f_{p'}^{\prime\mu\nu}$ была бы мнимой). В случае взаимодействия при $n^2>\frac{I}{3}$ пределы становятся более узкими, так как из (I20) следует, что $p'\geqslant-\frac{n^2+1}{2n^2}$. При $p'=-I$ массы составляющих со спином 0 и 2 совпадают, а при увеличении p' до $-\frac{I}{2}$ масса скалярной составляющей монотонно убывает до нуля, не достигая нижней грани. Наиболее интересен случай $p'=-2$ (возможный при $n^2\leqslant\frac{I}{3}$), в котором излучаемые частицы обладают только спином 2 (также как и безмассовые гравитоны).

Остается обсудить случай $q=\frac{np+1}{2n}=-\frac{I}{4}$, когда условие Гильберта-Лоренца (II8) нельзя свести к условию Лоренца. В этом случае поле $f_p^{\mu\nu}$ имеет компоненты со спином 2 и массой m и со спином 0 и нулевой массой (см.Приложение 2). Любопытно, что несмотря на наличие массовых членов тензорного и всех других полей, при $q = -\frac{I}{4}$ (и только при $q = -\frac{I}{4}$) теория инвариантна относительно I5-параметрической конформной группы C_4 (см.вид λ^ρ в п.2.3). Напомним, что при всех остальных формах массового члена тензорного поля, теория должна быть инвариантной лишь относительно неоднородной группы Лоренца.

Таким образом, принцип ограничения по спину для массивного тензорного поля дает целый набор теорий, в то время как для безмассового тензорного поля получилась одна единственная теория – теория Эйнштейна. Уравнение (II7) отличается от уравнения Эйнштейна с космологическим членом /I/ последним членом в левой части. Эта добавка нарушает общековариантность теории и принцип эквивалентности. Вместе с тем равенство инертной и "гравитационной" масс остается в силе.

Естественно, что в этих теориях статический потенциал подобен потенциалу Юкавы, а не Кулона, в то время как космологический член не дает решений с Юкавским поведением. В принципе такие теории могут быть полезны, если гравитон обладает массой (конечно, очень малой), и для описания каких-либо других тяжелых частиц со спином 2, если они существуют.

6. Несостоятельность вариантов негравитационного типа

В разделе 3, обсуждая возможные виды вариаций тензорного поля, мы показали, что все они при $p \neq -\frac{I}{2}$ все они сводятся к гравитационному варианту I и к его предельному случаю при $\alpha = 0$, т.е. к варианту 3. Гравитационный вариант был подробно исследован выше. Остается проанализировать особый (для всех вариантов) случай $p = -\frac{I}{2}$ и вариант 3 ($\alpha = 0$) с $p \neq -\frac{I}{2}$.

6.I. Особый случай $p = -\frac{I}{2}$

Наиболее общий вид уравнения для тензорного поля следующий:

$$\alpha \Box h_{\mu\nu} + \beta(\partial_\mu\partial_\sigma h_{\sigma\nu} + \partial_\nu\partial_\sigma h_{\mu\sigma}) + \gamma\delta_{\mu\nu}\partial_\lambda\partial_\rho h_{\lambda\rho} + \delta\,\partial_\mu\partial_\nu h_1 +$$
$$+ \varepsilon\delta_{\mu\nu}\Box h_1 + \text{массовые и нелинейные члены} = 0. \qquad (I2I)$$

В соответствии с настоящим подходом при $m = 0$ уравнение (I2I) должно быть инвариантным относительно рассматриваемых преобразований. Поэтому во всяком случае необходимо, чтобы часть уравнения, линейная по вторым производным $h_{\mu\nu}$ была инвариантна относительно чисто аддитивного преобразования

$$\delta^* h_{\mu\nu} = \partial_\mu\lambda^\nu + \partial_\nu\lambda^\mu + p\delta_{\mu\nu}\partial_\sigma\lambda^\sigma, \qquad (I22)$$

независимо от вида мультипликативной части преобразования. Нетрудно проверить, что при $p = -\frac{I}{2}$ такая инвариантность линейных членов возможна только тогда, когда $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Тогда это уравнение не содержит общепринятой кинетической части под спин 2, и, в лучшем случае, может описывать только скалярное поле h_1. Тем самым доказано, что все варианты при $p = -\frac{I}{2}$ не представляют интереса и должны быть отброшены.

6.2. Вариант 3

Как уже отмечалось, вариант 3 может быть получен из гравитационного варианта I переходом к пределу $\alpha \to 0$. При переходе $\alpha \to 0$ в (94) все взаимодействия выключаются, а чисто гравитационная часть (94) переходит в наиболее общий лагранжиан для свободного безмассового тензорного поля (Приложение 2). При $\alpha = 0$ тождество (III) приводит к свободным массовым членам. Итак, варианту 3 отвечают свободные уравнения, а минимальных взаимодействий нет.

В самом деле, попытаемся построить взаимодействия. При этом, за исключением поля $h_{\mu\nu}$, преобразующегося по закону (44), остальные поля φ, b_μ и ψ можно считать непреобразующимися. (Например, хотя общая форма вариации скалярного поля есть $\delta\varphi = s\partial_\sigma \lambda^\sigma \varphi$, но заменой переменных поля $\varphi \to \varphi' = \exp\left(-\frac{s}{2(1+2p)} h_1\right)\varphi$ можно свести вариацию к нулю: $\delta\varphi' = 0$. Такими же заменами можно обратить в нуль и вариации полей b_μ и ψ). Поэтому в инвариантные взаимодействия поле $h_{\mu\nu}$ может входить только через инварианты, построенные целиком из $h_{\mu\nu}$. Такие взаимодействия, например, $f\varphi\varphi \lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha} R = f\varphi\varphi\left[-\frac{p+2}{2(1+2p)}\Box h_{\mu\mu} + \partial_\mu \partial_\nu h_{\mu\nu}\right]$, с одной стороны, содержат константы связи размерности выше, чем см, и следовательно, не являются минимальными, а, с другой стороны, вообще, по-видимому, являются фиктивными.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Эйнштейн получил свои знаменитые уравнения изумительным по красоте, стройности и логике методом, вводя с самого начала постулат общековариантности и риманову метрику $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ и используя понятия римановой геометрии как геометрии физического мира при наличии тяготения. Уравнения Эйнштейна учитывают закон равенства инертной и гравитационной масс, принцип эквивалентности и в нерелятивистском пределе переходят в уравнения теории тяготения Ньютона.

Замечательно, что и в плоском пространстве-времени есть принцип, который ведет к уравнениям Эйнштейна с их нелинейной структурой, – спиновый принцип.

Мы не рассматривали специально уравнения движения материальной точки в поле тяготения, но и они, очевидно, совпадают с эйнштейновскими. Свободная материальная частица с координатами X^m и массой m описывается в специальной теории относительности лагранжианом /28/ $L_ч = -m\int\sqrt{-dX^\mu dX^\mu}$, где $X^4 = it$. При включении взаимодействия с гравитационным полем должно соблюдаться спиновое условие. Тогда правила, изложенные в разделе 4, ведут к общепринятому лагранжиану частицы в поле тяготения

$$L_ч = -m\int\sqrt{-g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu}. \qquad (123)$$

Это выражение должно быть добавлено к лагранжиану $L = \int d^4x \mathcal{L}''(x)$ с $\mathcal{L}''(x)$ (94).

Поскольку уравнения движения для полей и частиц в плоском пространстве совпадают с эйнштейновскими, то они допускают переход к эйнштейновскому геометрическому истолкованию. В этой связи, как подробно и четко проанализировал Тирринг /18/, оба подхода оказываются эквивалентными.

Несмотря на различие в интерпретации пространства-времени в теоретико-полевом и геометрическом подходах, оба они дают одинаковые предсказания наблюдаемых эффектов (см. /18,19/). В самом деле, расчет отклонения света и прецессии перегелия Меркурия в терминах плоского пространства при заданных уравнениях движения ничем не отличается от обычного (в том виде, например, как это изложено в /32/) Хорошо известно также, что правильное значение красного смещения можно получить прямо на основе закона сохранения энергии.

Таким образом, старый подход, использующий понятия законов сохранения сил и полей (в том числе и гравитационного), оказывается приемлемым в теории тяготения, наряду с оригинальным подходом Эйнштейна, в котором тяготение сведено к искривлению пространства-времени. Силы тяготения действуют на материальные частицы таким образом, что эти частицы движутся по траекториям, которые являются геодезическими в соответствующем римановом пространстве. В полевом подходе распространенное стремление сделать все поля равноправными осуществляется путем сведения гравитационного поля в ранг обычных полей, а не путем геометризации всех полей в дополнение к гравитационному.

Вместе с тем отметим, что поскольку в основе нашего исследования лежал лагранжев формализм, то полевой подход трудно распространить на обсуждение космологических проблем.

Полевой подход обнаруживает глубокую аналогию в природе уравнений Эйнштейна и Максвелла (а также уравнений Янга – Миллса): все они могут быть выведены из спинового принципа. Эта аналогия простирается довольно далеко. Так, хорошо известно, что во всех этих уравнениях источниками служат некоторые сохраняющиеся тензоры: сохраняющиеся векторные токи в уравнениях Максвелла и Янга-Миллса и сохраняющийся тензор энергии-импульса в уравнениях Эйнштейна (см. запись последних в форме Папапетру (100)). Далее, для всех этих теорий характерна универсальность констант связи. Наконец, уравнения Максвелла, Янга-Миллса и Эйнштейна инвариантны относительно соответствующих групп калибровочных преобразований, ограничивающих поля по спину. В этом смысле тензорное поле ближе к полю Янга-Миллса, поскольку оно преобразуется не только аддитивно, но и мультипликативно. Дело в том, что электромагнитное поле не несет заряда, в то время как поле Янга-Миллса обладает изотопическим спином, а тензорное поле несет энергию и импульс.

В электродинамике часто оказывается удобным закрепить калибровку с помощью условия Лоренца $\partial_\mu A_\mu = 0$ (лоренцова калибровка). Аналогично этому в теории тяготения можно закрепить калибровку с помощью условия Гильберта-Лоренца $\partial_\mu h^{\mu\nu}_\rho + q\,\partial_\nu h^{\mu\mu}_\rho = 0$. При любом $q \neq -\frac{1}{4}$ оно может быть сведено к условию Лоренца $\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0$. При $q = -\frac{1}{4}$ получается еще одна возможная форма линейного дополнительного условия, закрепляющего калибровку только с точностью до преобразований 15-параметрической конформной группы. Пока то или иное дополнительное условие не наложено, гравитоны со спином 1 присутствуют, но не влияют на динамику, так как соответствующие компоненты $h^{\mu\nu}$ не определяются уравнениями движения и остаются совершенно произвольными. Наложение дополнительного условия полностью исключает гравитоны со спином I из теории. Интересно отметить, что при геометрическом подходе условие $\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0$, или, что то же самое, $\partial_\mu g^{\mu\nu} = 0$ /I0–I3/ интенсивно использовалось Фоком/I3/ для закрепления гармонических координатных систем.

Гупта/8,9/ и Фейнман /I5/ продемонстрировали, что точка зрения на уравнения Эйнштейна как на нелинейные уравнения теории поля в пространстве Минковского является весьма плодотворной для квантования и вычисления эффектов по теории возмущений. Естественно, что при этом условие Лоренца накладывается на векторы состояния/9,I6/ (как и в электродинамике). Полученные теории массивного тензора поля любопытны тем, что в них остается справедливым равенство инертной и "тяжелой" массы (поскольку действие для материальной частицы по-прежнему записывается в форме (I23)), в то время как принцип эквивалентности нарушается. Это связано с тем, что хотя массовые члены для тензорного поля и похожи на космологический член Эйнштейна, но отличаются от него и нарушают "общековариантность".

Наконец, отметим, что из проведенного в настоящей работе анализа вытекает следующее утверждение. Требование, чтобы взаимодействия полей $h_{\mu\nu}$, b_μ, ψ и φ (определенных по их трансформационным свойствам относительно неоднородной группы Лоренца) были совместны с дополнительным условием (3), приводит к инвариантности теории относительно неоднородной группы Лоренца, а в случае $q = -\frac{I}{4}$ – относительно более широкой, конформной группы. Другими словами, условие (3) порождает законы сохранения полных 4-импульса и момента количества движения, аналогично тому, как условие Лоренца в теории векторных полей порождает законы сохранения электрического заряда, изотопического спина и т.д. /4,5/.

В заключение авторы выражают глубокую признательность Б.Н. Валуеву, М.А. Маркову и Я.А. Смородинскому за полезное обсуждение и ценные замечания.

Приложение I. Содержание тензорного поля $h_{\mu\nu}$ по спину

Для тензорного поля $h_{\mu\nu}$, которое для общности не предполагается симметричным, оператор квадрата спина $\hat{s}^2$, построенный обычным образом (см.например, /3,6/), имеет вид

$$(\hat{s}^2)_{\mu_1\mu_2,\nu_1\nu_2} = 4\delta_{\mu_1\nu_1}\delta_{\mu_2\nu_2} - 2\delta_{\mu_1\mu_2}\delta_{\nu_1\nu_2} + 2\delta_{\mu_1\nu_2}\delta_{\mu_2\nu_1} - \frac{2}{\Box}\Big[\delta_{\mu_1\nu_1}\partial_{\mu_2}\partial_{\nu_2} + \delta_{\mu_2\nu_2}\partial_{\mu_1}\partial_{\nu_1} + \delta_{\mu_1\nu_2}\partial_{\mu_2}\partial_{\nu_1} + \delta_{\mu_2\nu_1}\partial_{\mu_1}\partial_{\nu_2} - \delta_{\mu_1\mu_2}\partial_{\nu_1}\partial_{\nu_2} - \delta_{\nu_1\nu_2}\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\Big]. \tag{П.I}$$

Ковариантное разложение поля $h_{\mu\nu}$ на компоненты со спинами 2,I и 0 записывается

$$h_{\mu\nu} = h^{(2)}_{\mu\nu} + h^{(1)}_{\mu\nu} + h^{(0)}_{\mu\nu} = \left(P^{(2)}_{\mu\nu,\lambda\rho} + P^{(1)}_{\mu\nu,\lambda\rho} + P^{(0)}_{\mu\nu,\lambda\rho}\right) h_{\lambda\rho} \tag{П.2}$$

где

$$P^{(2)} = \frac{(\hat{s}^2-2)\hat{s}^2}{24} = \frac{1}{6}\Big\{3\delta_{\mu_1\nu_1}\delta_{\mu_2\nu_2} + 3\delta_{\mu_1\nu_2}\delta_{\mu_2\nu_1} - 2\delta_{\mu_1\mu_2}\delta_{\nu_1\nu_2} + \frac{4}{\Box^2}\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\partial_{\nu_1}\partial_{\nu_2} - \frac{3}{\Box}\Big[\delta_{\mu_1\nu_1}\partial_{\mu_2}\partial_{\nu_2} + \delta_{\mu_2\nu_2}\partial_{\mu_1}\partial_{\nu_1} + \delta_{\mu_1\nu_2}\partial_{\mu_2}\partial_{\nu_1} + \delta_{\mu_2\nu_1}\partial_{\mu_1}\partial_{\nu_2} - \frac{2}{3}\left(\delta_{\mu_1\mu_2}\partial_{\nu_1}\partial_{\nu_2} + \delta_{\nu_1\nu_2}\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\right)\Big]\Big\} \tag{П.3}$$

$$P^{(1)} = \frac{(\hat{s}^2-6)\hat{s}^2}{-8} = \frac{1}{2}\Big\{\delta_{\mu_1\nu_1}\delta_{\mu_2\nu_2} - \delta_{\mu_1\nu_2}\delta_{\mu_2\nu_1} - \frac{4}{\Box^2}\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\partial_{\nu_1}\partial_{\nu_2} + \frac{1}{\Box}\Big[\delta_{\mu_1\nu_1}\partial_{\mu_2}\partial_{\nu_2} + \delta_{\mu_2\nu_2}\partial_{\mu_1}\partial_{\nu_1} + \delta_{\mu_1\nu_2}\partial_{\mu_2}\partial_{\nu_1} + \delta_{\mu_2\nu_1}\partial_{\mu_1}\partial_{\nu_2}\Big]\Big\} \tag{П.4}$$

$$P^{(0)} = \frac{(\hat{s}^2-6)(\hat{s}^2-2)}{12} = \frac{1}{3}\Big\{\delta_{\mu_1\mu_2}\delta_{\nu_1\nu_2} + \frac{4}{\Box^2}\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\partial_{\nu_1}\partial_{\nu_2} - \frac{1}{\Box}\left(\delta_{\mu_1\mu_2}\partial_{\nu_1}\partial_{\nu_2} + \delta_{\nu_1\nu_2}\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\right)\Big\}. \tag{П.5}$$

Оператор $P^{(2)}$ удовлетворяет условиям (I) и (2) и, обратно, в применении к полю, удовлетворяющему этим условиям, $P^{(2)}$ есть единица.

Произвольное поле $h_{\mu\nu}$ (I6 компонент) фактически описывает спин 2 (5 компонент), три спина I (9 компонент) и два спина 0. В соответствии с этим оператор $P^{(1)}$ представим в виде суммы трех взаимноортогональных проекционных операторов:

$$P'^{(1)}=\frac{1}{2\Box}\left\{\delta_{\mu_1\nu_1}\partial_{\mu_2}\partial_{\nu_2}+\delta_{\mu_2\nu_1}\partial_{\mu_1}\partial_{\nu_2}-\frac{2}{\Box}\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\partial_{\nu_1}\partial_{\nu_2}+(\nu_1\leftrightarrow\nu_2)\right\} \qquad (\text{П.4}^{\text{I}})$$

$$P''^{(1)}=\frac{1}{2}\left\{\delta_{\mu_1\nu_1}\delta_{\mu_2\nu_2}-\frac{1}{\Box}\left(\delta_{\mu_1\nu_1}\partial_{\mu_2}\partial_{\nu_2}-\delta_{\mu_2\nu_1}\partial_{\mu_1}\partial_{\nu_2}\right)-(\nu_1\leftrightarrow\nu_2)\right\} \qquad (\text{П.4}^{\text{II}})$$

$$P'''^{(1)}=\frac{1}{2\Box}\left\{\delta_{\mu_1\nu_1}\partial_{\mu_2}\partial_{\nu_2}-\delta_{\mu_2\nu_1}\partial_{\mu_1}\partial_{\nu_2}-(\nu_1\leftrightarrow\nu_2)\right\} \qquad (\text{П.4}^{\text{III}})$$

Аналогично оператор $P^{(0)}$ представим в виде суммы двух проекционных операторов, например, вида

$$P'^{(0)}=\frac{1}{3}\left\{(1+q)\delta_{\mu_1\mu_2}-(1+4q)\frac{1}{\Box}\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\right\}\delta_{\nu_1\nu_2} \qquad (\text{П.5}^{\text{I}})$$

$$P''^{(0)}=\frac{1}{3}\left\{-q\delta_{\mu_1\mu_2}\delta_{\nu_1\nu_2}+\frac{4}{\Box^2}\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\partial_{\nu_1}\partial_{\nu_2}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\Box}\left(\delta_{\mu_1\mu_2}\partial_{\nu_1}\partial_{\nu_2}-4q\delta_{\nu_1\nu_2}\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\right)\right\}. \qquad (\text{П.5}^{\text{II}})$$

Оператор (П.5$^{\text{I}}$) подогнан под условие Гильберта-Лоренца (3), а $P''^{(0)}=P^{(0)}-P'^{(0)}$. В применении к симметричному полю, $h_{\mu\nu}=h_{\nu\mu}$, $P''^{(1)}$ и $P'''^{(1)}$ дают ноль, и поэтому оно описывает десять степеней свободы: спин 2, спин I и два спина 0. Наконец, в применении к симметричному полю, удовлетворяющему условию Гильберта-Лоренца (3), $P^{(2)}=1-P'^{(0)}$, $P^{(1)}=0$ и $P^{(0)}=P'^{(0)}$, т.е. в этом случае поле описывает спин 2 и спин 0.

Роль условия Гильберта-Лоренца наглядно иллюстрируется

в р-представлении. Для $\tilde{h}_{\mu\nu}(p)$ с $p_\mu^2<0$ можно перейти в "систему покоя", в которой $p=\{0,0,0,ip_0\}$. В этой системе условие (3) записывается как

$$\tilde{h}_{4k}=0\,,\qquad (1+q)\tilde{h}_{44}+q\tilde{h}_{\ell\ell}=0 \qquad (\text{П.6})$$

и из спинов 2,I,0 и 0, представляемых $\tilde{h}_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}\tilde{h}_{\ell\ell}$, $\tilde{h}_{4k}$, $\tilde{h}_{44}$ и $\tilde{h}_{\ell\ell}$, остаются только спин 2 и один спин 0.

Из (П.4$^{\text{I}}$) видно, что спин I определяется величиной $\partial_\mu h_{\mu\nu}$. В случае безмассового поля мы требуем произвольность этой величины. Продемонстрируем на частном случае р =-I, что преобразование (36$^{\text{I}}$), действительно изменяет $\partial_\mu h_{\mu\nu}$ произвольным образом. Имеем

$$\partial_\mu h'_{\mu\nu}=\partial_\mu h_{\mu\nu}+\Box\lambda^\nu+\alpha\partial_\mu\left(\partial_\sigma\lambda^\nu h_{\mu\sigma}-\lambda^\mu\partial_\sigma h_{\sigma\nu}\right)+\cdots \qquad (\text{П.7})$$

Теперь, представляя $\lambda^\nu=\lambda^\nu_{(0)}+\lambda^\nu_{(1)}+\lambda^\nu_{(2)}+\cdots$, мы можем подчинить $\lambda^\nu_{(1)},\lambda^\nu_{(2)},\cdots$ уравнениям

$$\Box\lambda^\nu_{(1)}+\alpha\partial_\mu\left(\partial_\sigma\lambda^\nu_{(0)}h_{\mu\sigma}-\lambda^\mu_{(0)}\partial_\sigma h_{\sigma\nu}\right)=0\,,\quad \Box\lambda^\nu_{(2)}+\cdots=0\,,\ \cdots \qquad (\text{П.8})$$

При этом $\lambda^\nu_{(0)}$ остается совершенно произвольной функцией, что и говорит о произвольности $\partial_\mu h_{\mu\nu}$.

Отметим, что содержание тензорного поля по спину обсуждалось также в /I7,33/.

Приложение 2. Уравнения для свободного тензорного поля

В случае свободного тензорного поля, не описывающего спин I, безмассовая часть лагранжиана должна быть инвариантна относительно преобразований (44) (вариант 3), а мультипликативные преобразования недопустимы. Такой лагранжиан мы получим, если в чисто гравитационной части (94) устремим константу связи α к нулю. С точностью до 4-дивергенции он записывается

$$\mathcal{L}_0=-\frac{1}{2}\partial_\lambda h_{\mu\nu}\partial_\lambda h_{\mu\nu}+\partial_\mu h_{\mu\nu}\partial_\lambda h_{\lambda\nu}-\frac{1+p}{1+2p}\partial_\mu h_{\mu\nu}\partial_\nu h_1+\frac{2+4p+3p^2}{4(1+2p)^2}\partial_\lambda h_1\partial_\lambda h_1. \quad (\text{П.9})$$

Это выражение можно было бы также найти, записывая наиболее общий лагранжиан свободного поля с неопределенными коэффициентами и определяя последние из требования инвариантности относительно (44) (с точностью до 4-дивергенции). Отметим, что замена переменных поля

$$h_{\mu\nu}\to\varphi_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}+\frac{\bar{p}-p}{2(1+2p)}\delta_{\mu\nu}h_1 \quad (\text{П.I0})$$

приводит в (П.9) к замене p на $\bar{p}$. Другими словами, при $m=0$ все лагранжианы в однопараметрическом семействе (П.9) эквивалентны, и всегда без потери общности можно рассматривать какой-либо один из них, например, с p = 0.

Массовые члены должны быть устроены так, чтобы из уравнений движения следовало условие Гильберта-Лоренца (3). Тождество (I09) при $\alpha=0$ сведется к

$$2\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta h_{\mu\rho}}+p\delta_{\mu\rho}\delta_{\alpha\beta}\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta h_{\alpha\beta}}\equiv-2\left(h_{\mu\rho}+q\delta_{\mu\rho}h_1\right) \quad \left(p\neq-\frac{1}{2}\right). \quad (\text{П.II})$$

Тождество (П.II) имеет решение

$$\mathcal{L}_m=-\frac{1}{2}h_2-\frac{2q-p}{4(1+2p)}h_1^2. \quad (\text{П.I2})$$

Рассмотрим возникающие возможности.

а) $q=-\frac{1}{4}$ (случай особого условия Гильберта-Лоренца).

$$\mathcal{L}_m=-\frac{1}{2}h_2+\frac{1}{8}h_1^2. \quad (\text{П.I3})$$

Лагранжианы с различными p эквивалентны, так как заменой (П.I0) они сводятся друг к другу. Они описывают поле со спином 2 и массой m и поле со спином 0 и нулевой массой.

б) Случай $q\neq-\frac{1}{4}$ путем замены $h_{\mu\nu}+q\delta_{\mu\nu}h_1\to h_{\mu\nu}$ сводится к случаю условия Лоренца ($q=0$). Тогда

$$\mathcal{L}_m=-\frac{1}{2}h_2+\frac{p}{4(1+2p)}h_1^2 \quad (\text{П.I4})$$

В этом случае параметр p в $\mathcal{L}=\mathcal{L}_0+m^2\mathcal{L}_m$ тождественен с параметром p′ в Разделе 5. Лагранжианы этого однопараметрического семейства неэквивалентны и при замене (П.I0) не сводятся друг к другу: $\mathcal{L}(h,p)=\mathcal{L}(\varphi,\bar{p})+\frac{\bar{p}-p}{4(1+2p)}m^2\varphi_1^2$. Каждый из них описывает суперпозицию спина 2 и спина 0, причем масса спина 0 определяется параметром p.

в) При p =-2 лагранжиан $\mathcal{L}_0+m^2\mathcal{L}_m$ с $\mathcal{L}_m$ (П.I4) будет описывать только спин 2, так как из уравнений движения в этом случае следуют оба условия (I) и (2). Если исходить из (П.I2) и положить там $q=-\frac{p+2}{2(1+2p)}$, то получится целое однопараметрическое семейство (эквивалентных) лагранжианов, описывающих чистый спин 2, фактически сводимое с помощью замен переменных поля к одному лагранжиану семейства (П.I4) с p = - 2. Соответствующий массовый член запишется

$$\mathcal{L}_m=-\frac{1}{2}h_2+\frac{1+p+p^2}{2(1+2p)}h_1^2. \quad (\text{П.I5})$$

Уравнения движения в случаях а) - в) имеют вид, соответственно,

$$\Box h_{\mu\nu}-\partial_\mu\partial_\rho h_{\rho\nu}-\partial_\nu\partial_\rho h_{\mu\rho}+\frac{1+p}{1+2p}\left(\delta_{\mu\nu}\partial_\lambda\partial_\sigma h_{\lambda\sigma}+\partial_\mu\partial_\nu h_1\right)-$$

$$-\frac{2+4p+3p^2}{2(1+2p)^2}\delta_{\mu\nu}\Box h_1-m^2h_{\mu\nu}+m^2\delta_{\mu\nu}\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{4} & (\text{П.I6а})\\ \frac{p}{2(1+2p)} & (\text{П.I6б})\\ \frac{1+p+p^2}{(1+2p)^2} & (\text{П.I6в})\end{array}\right\}h_1=0.$$

Свертывая по $\mu\nu$, получаем

$$-\frac{2+p}{(1+2p)^2}\Box h_1+\frac{2}{1+2p}\partial_\lambda\partial_\rho h_{\lambda\rho}+m^2\left\{\begin{array}{ll}0 & (\text{П.I7а})\\ \frac{-1}{1+2p} & (\text{П.I7б})\\ \frac{3}{(1+2p)^2} & (\text{П.I7в})\end{array}\right\}h_1=0.$$

Теперь прибавим к (П.I6) помноженное на $\frac{p}{2}\delta_{\mu\nu}$ уравнение (П.I7)

$$\Box h_{\mu\nu}-\partial_\mu\partial_\rho h_{\rho\nu}-\partial_\nu\partial_\rho h_{\mu\rho}+\delta_{\mu\nu}\partial_\lambda\partial_\rho h_{\lambda\rho}+\frac{1+p}{1+2p}(\partial_\mu\partial_\nu h_1-\delta_{\mu\nu}\Box h_1)-$$

$$-m^2h_{\mu\nu}+m^2\delta_{\mu\nu}\left\{\begin{matrix}\frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{p+2}{2(1+2p)}\end{matrix}\right\}h_1=0\,. \qquad \begin{matrix}(\text{П.I8а})\\(\text{П.I8б})\\(\text{П.I8в})\end{matrix}$$

Взяв дивергенцию от (П.I8), получаем

$$m^2\left(\partial_\mu h_{\mu\nu}-\frac{1}{4}\partial_\nu h_1\right)=0 \qquad (\text{П.I9а})$$

$$m^2\partial_\mu h_{\mu\nu}=0 \qquad (\text{П.I9б})$$

$$m^2\left(\partial_\mu h_{\mu\nu}-\frac{p+2}{2(1+2p)}\partial_\nu h_1\right)=0\,. \qquad (\text{П.I9в})$$

Уравнение (П.I9) в сочетании с (П.I7) дает

$$\Box h_1=0, \qquad (\text{П.20а})$$

$$\frac{2+p}{1+2p}\Box h_1+m^2h_1=0, \qquad (\text{П.20б})$$

$$m^2h_1=0\,, \quad m^2\partial_\mu h_{\mu\nu}=0\,. \qquad (\text{П.20в})$$

Соотношения (П.I9а) и (П.I9б) суть те дополнительные условия, исходя из которых теория строилась. Соотношения (П.20в) показывают, что теория в) действительно описывает чистый спин 2.

Величина h_1 фактически представляет компоненту поля $h_{\mu\nu}$ со спином 0 (см. (П.5$^{\text{I}}$)). Из (П.20а) видно, что в случае а) компонента со спином 0 обладает массой $m_0=0$. Соотношение (П.20б) показывает, что в случае б) спину 0 соответствует масса $m_0=m\sqrt{-\frac{1+2p}{2+p}}$

и поэтому каждому параметру p, заключенному в пределах $-2\leqslant p<-\frac{\text{I}}{2}$, соответствует своя масса скалярной компоненты.

Естественно, что пользуясь проекционными операторами (Приложение I), уравнения движения (П.I6) можно превратить в уравнения движения для компонент $h_{\mu\nu}$ с определенным спином:

$$(\Box-m^2)h^{(2)}_{\mu\nu}=0\;,\; m^2h^{(1)}_{\mu\nu}=0\,,\left\{\begin{matrix}(\Box-m_0^2)h^{(0)}_{\mu\nu}=0\,, \\ m_0^2\,h^{(0)}_{\mu\nu}=0\,.\end{matrix}\right. \qquad \begin{matrix}(\text{П.2Iа,б})\\(\text{П.2Iв})\end{matrix}$$

Уравнение (П.I8в) для чистого спина 2 при p = - 2 было приведено нами в /6/. Все однопараметрическое семейство свободных уравнений для чистого спина 2 исследовано Натом /34/. Свободные уравнения для тензорного поля с теми или иными дополнительными условиями обсуждались также Риверсом /33/.

Приложение 3. Тождества для лагранжиана, не содержащего вторых производных

В лагранжеву плотность (94) входят вторые производные от гравитационного поля. Путем интегрирования по частям от них можно избавиться и представить лагранжеву плотность в виде /35/

$$\left.\begin{matrix}\overline{\mathcal{L}}=\mathcal{L}_g+\text{члены из (94), содержащие другие поля,}\\ \mathcal{L}_g=\frac{2}{\alpha^2}g^{\mu\nu}\left(\Gamma^\beta_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\beta}-\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}\right).\end{matrix}\right\} \qquad (\text{П.22})$$

где $g^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}_{p=-1}$. При калибровочном преобразовании (40) с p = - I для вариации $\overline{\mathcal{L}}$ находим

$$\delta^*\overline{\mathcal{L}}\equiv-\alpha\partial_\alpha(\chi^\alpha\overline{\mathcal{L}})+\frac{2}{\alpha}\partial_\alpha\left[\chi^\beta_{,\gamma}\left(g^{\gamma\alpha}_{,\beta}-\delta^\alpha_\beta\,g^{\gamma\varepsilon}_{,\varepsilon}\right)\right]. \qquad (\text{П.23})$$

Отсюда видно, что если бы с самого начала ставилась задача найти лагранжиан без вторых производных, то было бы трудно подобрать нужную дивергенцию в (73).

Полагая в (П.23) λ^{α} равным $\delta_{\alpha\rho}, \delta_{\alpha\rho}x^{\mu}$ и $\delta_{\alpha\rho}x^{\mu}x^{\nu}$, получаем три тождества, исчерпывающие при отсутствии вторых производных все ограничения на $\bar{\mathcal{L}}$,

$$\left(\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta g^{\alpha\beta}}+\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta g^{\alpha\beta}_{,\tau}}\partial_{\tau}\right)g^{\alpha\beta}_{,\rho}+\left(\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta b_{\alpha}}+\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta b_{\alpha,\tau}}\partial_{\tau}\right)b_{\alpha,\rho}+\left(\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta\Psi}+\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta\Psi_{,\tau}}\partial_{\tau}\right)\Psi_{,\rho}+$$
$$+\left(\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta\varphi}+\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta\varphi_{,\tau}}\partial_{\tau}\right)\varphi_{,\rho}\equiv\partial_{\rho}\bar{\mathcal{L}} \qquad (\text{П.24})$$

$$2\left(\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta g^{\alpha\rho}}g^{\alpha\mu}+\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta g^{\alpha\rho}_{,\sigma}}g^{\alpha\mu}_{,\sigma}\right)-\delta^{\mu}_{\rho}\left(\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta g^{\alpha\beta}}g^{\alpha\beta}+\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta g^{\alpha\beta}_{,\sigma}}g^{\alpha\beta}_{,\sigma}\right)-\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta g^{\alpha\beta}_{,\mu}}g^{\alpha\beta}_{,\rho}-$$
$$-\left(\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta b_{\mu}}+\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta b_{\mu,\tau}}\partial_{\tau}\right)b_{\rho}-\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta b_{\alpha,\mu}}b_{\alpha,\rho}+\frac{i}{4}\left(\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta\Psi}+\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta\Psi_{,\tau}}\partial_{\tau}\right)\left(\sigma_{\rho\mu}+2\tau^{\alpha\beta}\frac{\delta\tau^{\beta\gamma}}{\delta g^{\rho\mu}}\sigma_{\gamma\alpha}\right)\Psi-$$
$$-\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta\Psi_{,\mu}}\Psi_{,\rho}-\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta\varphi_{,\mu}}\varphi_{,\rho}\equiv-\delta^{\mu}_{\rho}\bar{\mathcal{L}} \qquad (\text{П.25})$$

$$2\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta g^{\alpha\rho}_{,\nu}}g^{\alpha\mu}-\delta^{\mu}_{\rho}\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta g^{\alpha\beta}_{,\nu}}g^{\alpha\beta}-\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta b_{\mu,\nu}}b_{\rho}+\frac{i}{4}\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta\Psi_{,\mu}}\left(\sigma_{\rho\nu}+2\tau^{\alpha\beta}\frac{\delta\tau^{\beta\gamma}}{\delta g^{\rho\nu}}\sigma_{\gamma\alpha}\right)\Psi+$$
$$+(\mu\leftrightarrow\nu)\equiv\frac{2}{a^2}\left(2g^{\mu\nu}_{,\rho}-\delta^{\mu}_{\rho}g^{\nu\lambda}_{,\lambda}-\delta^{\nu}_{\rho}g^{\mu\lambda}_{,\lambda}\right). \qquad (\text{П.26})$$

Отметим, что из тождеств (П.24–П.26) очевидным образом следуют тождества для чисто гравитационной части лагранжиана $\mathcal{L}_g$. В частности, (П.25) дает тождество, которое с учетом соотношений однородности /31/ $\frac{\delta\mathcal{L}_g}{\delta g^{\alpha\beta}}g^{\alpha\beta}=-\mathcal{L}_g$, $\frac{\delta\mathcal{L}_g}{\delta g^{\alpha\beta}_{,\gamma}}g^{\alpha\beta}_{,\gamma}=2\mathcal{L}_g$, есть тождество Толмена/36/

$$\frac{\delta\mathcal{L}_g}{\delta g^{\alpha\rho}}g^{\alpha\mu}+\frac{\delta\mathcal{L}_g}{\delta g^{\alpha\rho}_{,\sigma}}g^{\alpha\mu}_{,\sigma}-\frac{1}{2}\frac{\delta\mathcal{L}_g}{\delta g^{\alpha\beta}_{,\mu}}g^{\alpha\beta}_{,\rho}\equiv 0. \qquad (\text{П.27})$$

Толмен получил его путем непосредственных вычислений, а Папапетру/I2/ указал, что его можно найти из соображений инвариантности.

Из тождеств (П.24)-(П.26) можно вывести важные тождества для эйлериана гравитационного поля. С помощью (П.25) находим тождество

$$g^{\mu\alpha}\left(\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta g^{\alpha\beta}}-\partial_{\sigma}\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta g^{\alpha\rho}_{,\sigma}}\right)-\frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\rho}g^{\alpha\beta}\left(\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta g^{\alpha\beta}}-\partial_{\sigma}\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta g^{\alpha\beta}_{,\sigma}}\right)\equiv$$
$$\equiv-\frac{1}{2}t^{\mu}_{\rho}-\partial_{\sigma}\left(\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta g^{\alpha\rho}_{,\sigma}}g^{\mu\alpha}-\frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\rho}\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta g^{\alpha\beta}_{,\sigma}}g^{\alpha\beta}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta b_{\mu}}+\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta b_{\mu,\sigma}}\partial_{\sigma}\right)b_{\rho}-$$
$$-\frac{i}{8}\left(\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta\Psi}+\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta\Psi_{,\sigma}}\partial_{\sigma}\right)\left(\sigma_{\rho\mu}+2\tau^{\alpha\beta}\frac{\delta\tau^{\beta\gamma}}{\delta g^{\rho\mu}}\sigma_{\gamma\alpha}\right)\Psi, \qquad (\text{П.28})$$

где t^{μ}_{ρ} – канонический тензор энергии-импульса всех полей:

$$t^{\mu}_{\rho}=-\sum_{f}\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta f_{,\mu}}f_{,\rho}+\delta^{\mu}_{\rho}\bar{\mathcal{L}}. \qquad (\text{П.29})$$

Суммирование в (П.29) проводится по всем полям $g^{\mu\nu}, b_{\mu}, \Psi$ и φ. Представим t^{μ}_{ρ} в правой части (П.28) в виде $\frac{1}{2}(t^{\mu}_{\rho}+t^{\rho}_{\mu})+$ $+\frac{1}{2}(t^{\mu}_{\rho}-t^{\rho}_{\mu})$. Полусумму перевыразим с помощью приема Белинфанте (см. /2/) через симметричный тензор энергии-импульса*)

$$\Theta_{\mu\rho}=\frac{1}{2}\left(t^{\mu}_{\rho}+t^{\rho}_{\mu}\right)+\frac{1}{2}\partial_{\sigma}\sum_{f}\left(\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta f_{,\mu}}s_{\sigma\rho}f+\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta f_{,\rho}}s_{\sigma\mu}f\right), \qquad (\text{П.30})$$

*) Входящие в (П.29) спиновые матрицы суть: для φ – поля $s_{\sigma\rho}=0$, для b_{μ} – поля $(s_{\sigma\rho})_{\mu\nu}=-i(\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}-\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma})$, для Ψ – поля $s_{\sigma\rho}=\frac{1}{2}\sigma_{\sigma\rho}=-\frac{i}{2}(\gamma_{\sigma}\gamma_{\rho}-\delta_{\sigma\rho})$ и, наконец, для симметричного тензорного поля $(s_{\sigma\rho})_{\mu_1\mu_2,\nu_1\nu_2}=-2i(\delta_{\mu_1\sigma}\delta_{\nu_1\rho}-\delta_{\mu_1\rho}\delta_{\nu_1\sigma})\delta_{\mu_2\nu_2}$.

Полуразность представим через дивергенцию тензора момента количества движения

$$M_{\mu\rho|\sigma} = -x^{\mu}t^{\sigma}_{\rho} + x^{\rho}t^{\sigma}_{\mu} + i\sum_{f}\frac{\delta\overline{\mathcal{L}}}{\delta f_{,\sigma}} s_{\mu\rho} f = -x^{\mu}\Theta_{\rho\sigma} + x^{\rho}\Theta_{\mu\sigma} \qquad (\text{П.31})$$

Используя далее тождество (П.26), преобразуем (П.28) к окончательной форме

$$g^{\mu\alpha}\left(\frac{\delta\overline{\mathcal{L}}}{\delta g^{\alpha\rho}} - \partial_{\sigma}\frac{\delta\overline{\mathcal{L}}}{\delta g^{\alpha\rho}_{,\sigma}}\right) - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\rho} g^{\alpha\beta}\left(\frac{\delta\overline{\mathcal{L}}}{\delta g^{\alpha\beta}} - \partial_{\sigma}\frac{\delta\overline{\mathcal{L}}}{\delta g^{\alpha\beta}_{,\sigma}}\right) \equiv$$

$$\equiv -\frac{1}{2}\Theta_{\mu\rho} + \frac{1}{a^2}\partial_{\sigma}\left[g^{\mu\rho}_{,\sigma} - g^{\mu\sigma}_{,\rho} - g^{\rho\sigma}_{,\mu} + \delta_{\mu\rho}g^{\sigma\lambda}_{,\lambda}\right] + \frac{1}{4}\partial_{\sigma}M_{\rho\mu,\sigma} +$$

$$+\frac{1}{4}\left(x^{\rho}\partial_{\sigma}t^{\sigma}_{\mu} - x^{\mu}\partial_{\sigma}t^{\sigma}_{\rho}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta\overline{\mathcal{L}}}{\delta b_{\mu}} - \partial_{\sigma}\frac{\delta\overline{\mathcal{L}}}{\delta b'_{\mu,\sigma}}\right)b_{\rho} - \frac{1}{8}\left(\frac{\delta\overline{\mathcal{L}}}{\delta\Psi} - \partial_{\sigma}\frac{\delta\overline{\mathcal{L}}}{\delta\Psi_{,\sigma}}\right)\left(\sigma_{\rho\mu} + 2\tau^{\alpha\beta}\frac{\delta\tau^{\beta\gamma}}{\delta g^{\rho\mu}}\sigma_{\gamma\alpha}\right)\Psi. \qquad (\text{П.32})$$

В силу стационарности действия эйлерианы в левой и правой частях (П.32) обращаются в нуль, и симметричная часть (П.32) сразу же дает уравнения движения гравитационного поля в форме Папапетру (100). Антисимметричная часть (П.32) равна нулю вследствие законов сохранения энергии-импульса и момента количества движения.

Для чисто гравитационной части лагранжиана $\mathcal{L}_g$ согласно Эддингтону /31/(§ 58) имеем $\frac{\delta\mathcal{L}_g}{\delta g^{\mu\rho}} - \partial_{\sigma}\frac{\delta\mathcal{L}_g}{\delta g^{\mu\rho}_{,\sigma}} = -\frac{2}{a^2}R_{\mu\rho}$, и из тождеств (П.28) и (П.32) находим для тензора Эйнштейна

$$-\frac{2}{a^2}\left(g^{\mu\alpha}R_{\alpha\rho} - \delta^{\mu}_{\rho}R_{-1}\right) \equiv -\frac{1}{2}\tau^{\mu}_{\rho} - \partial_{\sigma}\left(\frac{\delta\mathcal{L}_g}{\delta g^{\alpha\rho}_{,\sigma}}g^{\alpha\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\rho}\frac{\delta\mathcal{L}_g}{\delta g^{\alpha\beta}_{,\sigma}}g^{\alpha\beta}\right) \equiv \qquad (\text{П.33})$$

$$\equiv -\frac{1}{2}\theta_{\mu\rho} + \frac{1}{a^2}\partial_{\sigma}\left(g^{\mu\rho}_{,\sigma} - g^{\mu\sigma}_{,\rho} - g^{\sigma\rho}_{,\mu} + \delta_{\mu\rho}g^{\sigma\lambda}_{,\lambda}\right) + \frac{1}{4}m_{\rho\mu|\sigma} + \frac{1}{4}\left(x^{\rho}\partial_{\sigma}\tau^{\sigma}_{\mu} - x^{\mu}\partial_{\sigma}\tau^{\sigma}_{\rho}\right), \qquad (\text{П.34})$$

где τ^{μ}_{ρ}, $\theta_{\mu\rho}$ и $m_{\rho\mu|\sigma}$ суть канонический и симметричный тензоры энергии-импульса и тензор момента количества движения одного гравитационного поля. Отметим, что (П.33) соответствует соотношению, полученному Толменом /36/.

В заключение для полноты приведем явный вид канонического тензора энергии-импульса

$$t^{\mu}_{\rho} = \frac{2}{a^2}\left(\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}_{,\rho} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}g^{\alpha\mu}_{,\rho}\right) + \Big[-g^{\mu\alpha}F_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma}b_{\gamma,\rho} + \frac{\tau^{\mu\alpha}}{4}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\tau^{-1}_{\beta\varkappa}\partial_{\rho}\tau^{\varkappa\gamma}\overline{\Psi}\gamma_5\gamma_{\delta}\Psi +$$

$$+\frac{1}{2}\tau^{\mu\alpha}\left(\overline{\Psi}\gamma_{\alpha}\Psi_{,\rho} - \overline{\Psi}_{,\rho}\gamma_{\alpha}\Psi\right) + g^{\mu\alpha}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\rho}\Big]g_0^{-\frac{1}{2}} + \delta^{\mu}_{\rho}\overline{\mathcal{L}} \qquad (\text{П.35})$$

и симметричного тензора энергии-импульса

$$\Theta_{\mu\rho} = \frac{1}{a^2}\Big[-\left(g^{\alpha\beta}g_{\rho\gamma} - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\rho\gamma}\right)\partial_{\alpha}\partial_{\beta}g^{\mu\gamma} + \left(g^{\mu\alpha}g_{\rho\beta} - \delta_{\mu\alpha}\delta_{\rho\beta}\right)\partial_{\alpha}\partial_{\gamma}g^{\beta\gamma} +$$

$$+g^{\mu\alpha}g_{\rho\beta}g^{\varepsilon\varkappa}\left(-\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\varepsilon\varkappa} - 3\Gamma^{\beta}_{\alpha\varepsilon}\Gamma^{\gamma}_{\varkappa\gamma} + \Gamma^{\beta}_{\varkappa\varepsilon}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\gamma}\right) + 2g_{\rho\alpha}g^{\beta\gamma}g^{\varepsilon\varkappa}\Gamma^{\alpha}_{\beta\varepsilon}\Gamma^{\mu}_{\gamma\varkappa} +$$

$$+g^{\varepsilon\varkappa}\left(-\Gamma^{\alpha}_{\varepsilon\varkappa}\Gamma^{\mu}_{\alpha\rho} - 2\Gamma^{\alpha}_{\varepsilon\alpha}\Gamma^{\mu}_{\rho\varkappa} + 2\Gamma^{\mu}_{\varepsilon\varkappa}\Gamma^{\alpha}_{\rho\alpha}\right) - g^{\mu\gamma}\left(\Gamma^{\alpha}_{\rho\alpha}\Gamma^{\beta}_{\gamma\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\gamma}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\right) +$$

$$+\delta^{\mu}_{\rho}g^{\alpha\beta}\left(\Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\beta\delta} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\delta}_{\gamma\delta} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\delta}_{\beta\delta}\right)\Big] + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T_{\rho\nu} + (\mu \leftrightarrow \rho), \qquad (\text{П.36})$$

где $T_{\mu\nu}$ дается формулой (99). Отметим, что в выражении (П.36) учтены уравнения движения, и что оно следует также из тождества (П.32).

Литература

I. А. Эйнштейн, Сущность теории относительности, ИЛ, Москва, 1955.

2. Х. Умэдзава, Квантовая теория поля, ИЛ, М. (1958).

3. C.Fronsdal, Suppl.Nuovo Cim. 9, 416 (1958).

4. В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов, Ann.Phys. (N.Y.) 25, 358 (1963) ; ЖЭТФ, 45, 966 (1963); 46, 1048 (1964).

5. В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов, Препринт ОИЯИ Р-1822 (1964). Nuclear Phys. , в печати.

6. В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов, ЖЭТФ, 45, 237 (1963).

7. В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов, Труды Международ. конференции по физике высоких энергий, Дубна, (1964).

8. S.N.Gupta, Rev.Mod.Phys. 29, 334 (1957).

9. S.N.Gupta. Proc. Phys.Soc. A65, 161, 808 (1952); статья в сборнике " Recent developments in general relativity", Pergamon Press, p.251, 1962.

10. T. De Donder, Le gravifique Einsteinienne, Paris, 1921.

11. K.Lanczos, Phys. Zs. 23, 537 (1923).

12. A.Papapetrou, Proc.Roy.Irish.Acad.A52, 11 (1948).

13. В.А. Фок, Теория пространства-времени и тяготения, ФМ, Москва, 1961.

14. N.Posen, Phys.Rev.57, 147, 150 (1940).

15. R.P.Feynman, Acta Physica Polonica 24, 697 (1963).

16. K.Just, Nuovo Cim. 34, 567 (1964).

17. В.И. Захаров, ЖЭТФ, 48, 303 (1965)

18. W.Thirring, Ann.Phys. (N.Y.), 16, 69 (1961).

19. S.A.Bludman, preprint UCRL-9176 (1960).

20. S.Weinberg, Phys.Rev.135, B1049 (1964).

21. S.Weinberg, Photons and Gravitons in Perturbations Theory; Derivation of Maxwell's and Einstein's Equations", preprint (1965).

22. E.Noether, Nachrichten von der Kon.der Wissenschaften zu Gottingen, Math.-Phys. KL., вып. 2,325 (1918).

23. C.N.Yang, R.L.Mills, Phys.Rev. 96, 191 (1954).

24. R.Utiyama, Phys.Rev.101, 1596 (1956)1

25. T.W.B.Kibble, Journ.Math.Phys. 2, 212 (1961).

26. А.М. Бродский, Д.Д. Иваненко, Г.А. Соколик, ЖЭТФ, 41, 1307 (1961).

27. В. Паули, Теория относительности, ИЛ, Москва (1947).

28. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теория поля, ФМ, Москва, 1962.

29. В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов, Препринт ОИЯИ Р-1890 (1964);

30. В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов, Nuovo Cim. 23, 173 (1962).

31. А.С. Эддингтон, Теория относительности ОНТИ, ГТТИ, Ленинград-Москва, 1934.

32. П.Г. Бергман, Введение в теорию относительности ИЛ, Москва, 1947.

33. R.J.Rivers, Nuovo Cim. 34, 386 (1964).

34. L.M.Nath, The minimal electromagnetic interactions of the charged spin 2 field, preprint (1964).

35. A.Einstein, Sitzunsber, der Preuss. Acad.Wiss., Berlin,1111 (1916).

36. R.C.Tolman, Phys.Rev.35, 875 (1930)

Рукопись поступила в издательский отдел
9 апреля 1964 г.