

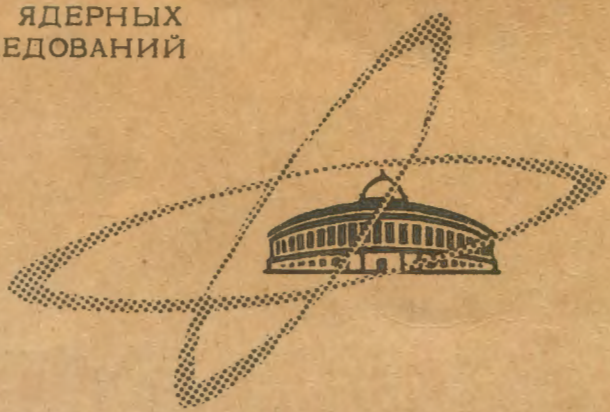
С 324.15

К-326

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P-2102



ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Я. Квечиньски

МЕТОД БУТСТРАПА И ПОЛЮСА РЕДЖЕ

1965

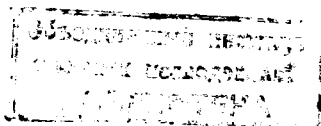
P-2102

Я. Квечиньски^{x)}

МЕТОД БУТСТРАПА И ПОЛЮСА РЕДЖЕ

Направлено в Acta Physica Polonica

x) Командирован из Института ядерной физики, Краков, Польша.



3277/1 нр.

1. Введение

В последнее время очень интенсивно исследуется так называемая модель "бут-страпа" /1/. В этом подходе предполагается, что главными силами, приводящими к возникновению связанных состояний или резонансов, являются силы, обусловленные обменом этого же самого связанного состояния.

Точнее, предполагается, что главная часть левого разреза в парциальной амплитуде обусловлена одночастичным обменом в перекрестном канале.

Если, однако, попытаться применить этот метод к случаю ρ -мезона, то немедленно столкнемся с трудностью - возникают расходимости, которые непосредственно связаны с векторным характером частицы. Из этого вытекает, что необходимо более точно определить далекие нефизические (левые) особенности. Недавно был предложен интересный метод учета этих особенностей самосогласованным способом /2,3/.

Была выдвинута также очень привлекательная идея, являющаяся естественным обобщением описанного метода /4,5/, связанная с вычислением самосогласованным способом ведущих траекторий Редже. Она заключается в следующем: исходя из дисперсионных соотношений для парциальной амплитуды, разделенной на пороговый фактор $q_n^{2\ell}$

$$\frac{a_\ell(s)}{q_n^{2\ell}} = f_\ell(s) = V_\ell^P(s) + \frac{1}{\pi} \int_4^{s_1} \frac{\text{Im} f_\ell(s')}{s' - s} ds',$$

определяем функцию $V_\ell^P(s)$ через левые и далекие правые особенности парциальной амплитуды. Предполагая наличие двухчастичной унитарности внутри полосы $4 < s < s_1$, применяем N/D метод. Функция D аналитична вне полосы, а функция N содержит остальные особенности парциальной амплитуды. Далее дается способ вычисления функции $V_\ell^P(s)$ с помощью параметров полюсов Редже во всех трех каналах и накладывается требование, чтобы траектории Редже, полученные из нулей функции $D_\ell(s)$, совпали с заданными.

Однако такая общая формулировка представляется очень сложной. Поэтому желательно использовать приближения, которые могли бы сделать эту схему практически полезной. Схема имеет недостаток, заключающийся в том, что невозможно одновременно обеспечить правильное пороговое и асимптотическое поведение парциальной амплитуды.

Чтобы устранить этот недостаток, согласно работе ^{/8/}, надо включить в левый разрез вклады от полюсов Редже в прямом канале, что приводит к дополнительным усложнениям.

В настоящей работе дана формулировка этой задачи в удобной для практики форме. Кроме того исследуется и устраняется дефект, связанный с асимптотическим и пороговым поведением парциальной амплитуды.

В главе второй производится разбиение амплитуды рассеяния на сумму двух членов, удовлетворяющих дисперсионным соотношениям по передаче импульса, но различающихся асимптотическим поведением по этим переменным.

Далее эти два члена выражаются через параметры полюсов Редже во всех трех каналах. Основная цель этого разбиения та же, что и в работах ^{/4,5/}, но его реализация отличается последовательным использованием представления Кури ^{/6/}.

В главе третьей дан анализ структуры парциальной амплитуды и показано, каким образом можно выделить пороговую часть и при этом не учитывать вклада в левый разрез от полюсов Редже в прямом канале. При этом не искажается асимптотическое поведение. Далее применяется N/D метод как в приближении упругой унитарности, так и в рамках нового полюсного приближения ^{/5/} и обсуждаются полученные уравнения. Наконец в главе 4 дана сводка основных результатов.

2. Структура амплитуды $\pi\pi$ -рассеяния

Рассматриваем амплитуду $\pi\pi$ -рассеяния $A^I(s; t, u)$, которая описывает процесс рассеяния с определенным значением изотопического спина в канале s . Предполагается, что амплитуда удовлетворяет дисперсионным соотношениям по переменным передачи импульса:

$$A^I(s; t, u) = \frac{1}{\pi} \int_4^{\infty} A_t^I(s; x) \left[\frac{1}{x-t} + \frac{(-1)^I}{x-u} \right] dx, \quad (2.1)$$

причем дисперсионные интегралы надо понимать либо в элементарном смысле, либо в смысле аналитического продолжения ^{/8/}.

Инвариантные переменные определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 \\ t &= (p_1 + p_3)^2 \\ u &= (p_2 + p_3)^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

(см. рис. 1).

В системе центра масс z канала мы имеем следующие формулы:

$$\begin{aligned} t &= -2q_n^2(1-z) \\ u &= -2q_n^2(1+z), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $q_n^2 = \frac{s-4}{4}$, $z = \cos \theta_n$, s является квадратом полной энергии в этом канале. Парциальные амплитуды $f_l^I(s)$ определяются следующим образом:

$$f_l^I(s) = \frac{1}{2\pi q_n^2} \int_4^\infty A_t^I(s; x) [1 + e^{i\pi l} (-1)^l] Q_\ell \left(1 + \frac{x}{2q_n^2}\right) dx, \quad (2.4)$$

где $Q_\ell(v)$ - функция Лежандра второго рода.

Однако наличие множителя $e^{i\pi l}$ в амплитуде не позволяет продолжить ее на комплексные значения ℓ .

Определим новую амплитуду, которая допускает такое продолжение, а именно:

$$\bar{f}_\ell^I(s) = \frac{1}{2\pi q_n^2} \int_4^\infty A_t^I(s; x) Q_\ell \left(1 + \frac{x}{2q_n^2}\right) dx. \quad (2.5)$$

Используя эту формулу, получаем следующее разложение функции $A^I(s; t, u)$ в ряд Лежандра

$$A^I(s; t, u) = \frac{1}{2} \sum (2\ell + 1) \bar{f}_\ell^I(s) [P_\ell(z) + (-1)^\ell P_\ell(-z)]. \quad (2.6)$$

Если применить к выражению (2.6) преобразование Ватсона-Зоммерфельда, то получим следующие представления для функции $A(s; t, u)$:

$$\begin{aligned} A^I(s; t, u) &= -\frac{1}{4i} \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} \frac{d\ell(2\ell+1)}{\sin \pi \ell} \bar{f}_\ell^I(\ell; s) [P_\ell(-z) + (-1)^\ell P_\ell(z)] + \\ &- \frac{\pi}{2} \sum_1 \frac{(2\alpha_1^I + 1)}{\sin \alpha_1^I(s)} \beta_1^I(s) [P_{\alpha_1^I(s)}(-z) + (-1)^{\alpha_1^I(s)} P_{\alpha_1^I(s)}(z)], \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\beta_1^I(s)$ и $\alpha_1^I(s)$ - вычет и положение полюса Редже в правой полуплоскости.

Если продолжить это выражение на нефизические значения переменной z , то обнаружим, что каждый из двух членов в (2.7) имеет разрез вдоль всей вещественной оси переменной z за исключением отрезка $-1 < z < 1$. Следовательно, оба эти члена имеют разрезы вдоль всей положительной вещественной оси переменных t и u . Видно тогда, что для обеспечения аналитических свойств, вытекающих из представления (2.1), должно осуществляться взаимное сокращение указанных двух членов. Для иллюстрации этого факта мы используем метод, предложенный в работе /6/. С этой целью преобразуем первый член в (2.7) с помощью интегрального представления для функции Лежандра:

$$\frac{\pi \lambda P_{\lambda-\frac{1}{2}}(z)}{\cos \pi \lambda} = \frac{1}{2^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\lambda x} \operatorname{sh} x}{[\operatorname{ch} x + z]^{3/2}} dx. \quad (2.8)$$

Тогда получим следующее выражение для функции $A^I(s; t, u)$

$$A^I(s; t, u) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} B^I(x; s) \operatorname{sh} x \, dx \left[\frac{1}{(\operatorname{ch} x - z)^{s/2}} + \frac{(-1)^I}{(\operatorname{ch} x + z)^{s/2}} \right] + \frac{\pi}{2} \sum_n \frac{\beta_n^I(s)}{\sin \pi \alpha_n^I k(s)} (2\alpha_n^I(s) + 1) \times \\ \times [P_{\alpha_n^I(s)}^I(-z) + (-1)^I P_{\alpha_n^I(s)}^I(z)], \quad (2.9)$$

где функция $B^I(x; s)$ определяется формулой

$$B^I(x; s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda e^{\lambda x} f^-(\lambda - \frac{1}{2}; s) \quad (2.10)$$

и по сути дела является фурье-образом парциальной амплитуды.

Следуя Кури^{6/}, разделим функцию $B^I(x; s)$ на две части:

$$B^I(x; s) = B_1^I(x; s) \Theta(\xi_0 - x) + B_2^I(x; s) \Theta(x - \xi_0), \quad (2.11)$$

где

$$\xi_0 = \operatorname{arsh} \left(1 + \frac{8}{s-4} \right).$$

Для значений $x < \xi_0$ мы можем в (2.10) замкнуть контур интегрирования справа (из формулы (2.5) вытекает, что $f^-(\ell; s)$ стремится к нулю как $e^{-\ell \xi_0}$ для $\operatorname{Re} \ell \rightarrow \infty$).

Тогда получаем

$$B_1^I(x; s) = - \sum_n e^{\lambda_n^I(s)x} \beta_n^I(s), \quad (2.12)$$

где $\lambda_n^I(s) = \alpha_n^I(s) + \frac{1}{2}$.

Подставляя (2.12) и (2.11) в (2.9), получаем окончательно

$$A^I(s; t, u) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\xi_0}^{\infty} B^I(x; s) \operatorname{sh} x \, dx \left[\frac{1}{(\operatorname{ch} x - z)^{s/2}} + \frac{(-1)^I}{(\operatorname{ch} x + z)^{s/2}} \right] + \\ + \frac{1}{2} \sum_n \beta_n^I(s) \left\{ - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\xi_0} \frac{e^{\lambda_n^I x} \operatorname{sh} x \, dx}{(\operatorname{ch} x - z)^{s/2}} + \frac{2\pi \lambda_n^I(s) P_{\lambda_n^I - \frac{1}{2}}^I(-z)}{\cos \pi \lambda_n^I} + \right. \\ \left. + (-1)^I \int_{-\infty}^{\xi_0} \frac{e^{\lambda_n^I x} \operatorname{sh} x \, dx}{(\operatorname{ch} x + z)^{s/2}} + \frac{2\pi \lambda_n^I}{\cos \pi \lambda_n^I} P_{\lambda_n^I - 1/2}^I(z) \right\}. \quad (2.13)$$

В формуле (2.13) оба члена обладают уже правильно расположенными разрезами в плоскости t и u . Первый член, очевидно, обладает этим свойством а, что касается второго члена, то скачки функции Лежандра на отрезках $-1 - \frac{8}{s-4} < z < -1$ и $1 + \frac{8}{s-4} > z > 1$ сокращаются со скачками соответствующих интегралов. Таким образом, мы показали, каким образом исчезают искусственные разрезы, на отрезках $4 > t > 0$ и $4 > u > 0$.

Далее введем следующие обозначения:

$$R^I(s; \alpha_n^I(s), z) = \beta_n^I(s) \left\{ - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\xi_0} \frac{e^{\lambda_n^I x} \operatorname{sh} x \, dx}{[\operatorname{ch} x - z]^{s/2}} + \frac{2\pi \lambda_n^I}{\cos \pi \lambda_n^I} P_{\lambda_n^I - \frac{1}{2}}^I(-z) \right\}. \quad (2.14)$$

R^I не является, однако, непрерывной функцией от переменной z , потому что она включает в себя ступенчатую функцию $\Theta(s-z)$, которая отражает тот факт, что е ли полюс Редже для некоторого значения z_1 перейдет в левую полуплоскость, он дает уже вклад не в функцию R , а в функцию $V_2^I(x; s)$. Легко вычислить этот вклад. Действительно, та часть функции $V_2^I(x; s)$, которая определяется через полюс Редже, лежащий в левой полуплоскости, определяется соотношением (см. /8/):

$$V_n^I(x; s) = \beta_n(s) e^{\lambda_n x} \quad (2.15)$$

Следовательно, для вклада этого полюса в полную амплитуду имеем:

$$R(s; z; \lambda_n) = \frac{\beta_n^I}{\sqrt{2}} \int_{\xi_0}^{\infty} e^{\lambda_n x} \operatorname{sh} x \, dx \left[\frac{1}{[\operatorname{ch} x - z]^{3/2}} + \frac{(-1)^I}{[\operatorname{ch} x + z]^{3/2}} \right]. \quad (2.16)$$

В полосе $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} \lambda_n < \frac{1}{2}$ функции (2.16) и (2.14) совпадают, и таким образом, они определяют одну и ту же функцию от переменной $\lambda_n(s)$ и, следовательно, аналитическую функцию от переменной z . Итак, мы можем опустить скачкообразную функцию и представить вклад полюса Редже с помощью формулы (2.16) или (2.14).

В результате амплитуда $A^I(s; t, u)$ приобретает вид:

$$A^I(s; t, u) = \frac{1}{2} \sum_n (R_n^I(s; z, \lambda_n) + (-1)^I R_n^I(s; -z; \lambda_n)) + \int_{\xi_0}^{\infty} \operatorname{sh} x \, dx V^I(x; s) \left[\frac{1}{(\operatorname{ch} x - z)^{3/2}} + \frac{(-1)^I}{(\operatorname{ch} x + z)^{3/2}} \right], \quad (2.17)$$

где функция $V^I(x; s)$ определяется только этими особенностями парциальной амплитуды (по-видимому, очень сложными по структуре), которые никогда не входят в правую полуплоскость. Поскольку оба члена в (2.17) являются аналитическими функциями в переменных t и u с разрезами для $t > 4$, $u > 4$ для амплитуды окончательно имеем:

$$A^I(s; t, u) = \frac{1}{2} \sum_n (R_n^I(s; z; \lambda_n) + (-1)^I R_n^I(s; -z; \lambda_n)) + \frac{1}{\pi} \int_4^{\infty} \bar{A}_t^I(s; x) \left[\frac{1}{x-t} + \frac{(-1)^I}{x-u} \right] dx, \quad (2.18)$$

где дисперсионный интеграл может быть записан без вычитания.

Исследуем вклады, обусловленные каждым из этих членов, в манделштамовские двойные спектральные функции. Для этого вычислим двойной скачок всех функций в (2.18). Рассмотрим сначала первый член (2.18) и вычислим двойной скачок функции $R_n^I(s; z)$. Во избежание дополнительных усложнений, связанных со степенью $3/2$ в знаменателе под знаком интеграла в определении функции $R_n^I(s; z)$ проинтегрируем выражение (2.14) по частям:

$$R_n(s; \lambda_n, z) = \beta_n^I(s) \left[\sqrt{2} \frac{e^{\lambda_n \xi_0}}{[\operatorname{ch} \xi_0 - z]^{1/2}} - \right. \\ \left. - \sqrt{2} \lambda_n \int_{-\infty}^{\xi_0} \frac{e^{\lambda_n x}}{[\operatorname{ch} x - z]^{1/2}} dx + \frac{2\pi \lambda_n P_{\lambda_n - 1/2}(-z)}{\cos \pi \lambda_n} \right]. \quad (2.18)$$

Можно показать [8,7], что первый и третий члены в (2.18) сокращаются с соответствующими вкладками фонового интеграла в (2.13). Таким образом, получаем следующие выражения для спектральных функций, связанных с функцией R

$$\bar{\rho}_{st}^I(s; t) = \sum \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{disc}_s \beta_n^I(s) \lambda_n \int \frac{dx \left[1 + \frac{x}{2q^2} + \sqrt{\left(1 + \frac{x}{2q^2}\right)^2 - 1} \right]^{\lambda_n(s)}}{(2q^2)^{1/2} \sqrt{\left(1 + \frac{x}{2q^2}\right)^2 - 1} [t-x]^{1/2}} \quad (2.19)$$

$$\bar{\rho}_{su}^I(s; u) = (-1)^I \bar{\rho}_{st}^I(s; u).$$

Существенной чертой спектральных функций (2.19) является то, что эти функции играют важную роль только внутри полос (см. рис. 2), ширина которых определяется некоторым отрезком переменной s , а именно $4 < s < s_1$. Это область изменения переменной s , для которой $\operatorname{Re} \lambda_n(s) > -1/2$. Вне этой области вклады других членов начинают играть не меньшую роль.

Рассмотрим теперь второй член в формуле (2.18). Так как функция $\bar{A}_t^I(s; t')$ исчезает для $t' \rightarrow \infty$, главный вклад, который она дает в интеграл, обусловлен интегрированием по некоторому конечному отрезку $4 < t < t_1$. С другой стороны, функция $\bar{A}_t^I(s; t)$ может быть определена через абсорбтивную часть амплитуды в перекрестном канале

$$\bar{A}_t^I(s; t) = \sum_{I'} \beta_{II'} A_{t'}^{I'}(s; t'). \quad (2.20)$$

Однако при $4 < t < t_1$ мы имеем дело с низкоэнергетической областью t канала, где абсорбтивная часть определяется, главным образом, вкладками, происходящими от обмена резонансными системами в этом канале.

Обычно разлагают функцию $A_{t'}^{I'}(s; t)$ в ряд по парциальным волнам, оставляя только резонансные. Однако при этом остается в тени аналитическая структура функции $A_{t'}^{I'}(s; t)$ по переменной s . Чтобы устранить этот недостаток, представим этот вклад в форме Кури-Редже:

$$\bar{A}_t^I(s; t) = \sum_n \left\{ \operatorname{disc}_t \left[W(\alpha_n^I(t); s, t) + \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^{I'} W(\alpha_n^I(t); u(s, t), t) \right] \right\}, \quad (2.21)$$

где функция $W(\alpha_n^I(t), s, t)$ равна:

$$W(\alpha_n^I(t); s, t) = 1/2 \beta_n^I(t) \lambda_n^I(t) \left[-\sqrt{2} \lambda_n^I \int_{-\infty}^{\xi_0^{(t)}} \frac{e^{\lambda_n^I x}}{[\operatorname{ch} x - z_t]^{1/2}} dx + \frac{2\pi P_{\lambda_n^I - 1/2}(-1 - \frac{s}{2q^2})}{\cos \pi \lambda_n^I(t)} \right]. \quad (2.22)$$

Вклад, который эти члены дают в спектральные функции, легко вычислить:

$$\rho_{st}^I = \sum_{I'} \beta_{II'} \text{disc}_I \lambda_n^{I'}(t) \frac{\beta_n^{I'}(t)}{\sqrt{2}} \int_0^s \frac{dx \left[1 + \frac{x}{2q_1^2} + \sqrt{\left(1 + \frac{x}{2q_1^2}\right)^2 - 1} \right]^{\lambda_n}}{\sqrt{\left(1 + \frac{x}{2q_1^2}\right)^2 - 1} (s-x)^{\frac{1}{2}} (2q_1^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\rho_{tu}^I = \sum_{I'} (-1)^{I'} \beta_{II'} \text{disc}_I \lambda_n^{I'}(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^u \frac{dx \left[1 + \frac{x}{2q_1^2} + \sqrt{\left(1 + \frac{x}{2q_1^2}\right)^2 - 1} \right]^{\lambda_n}}{\sqrt{\left(1 + \frac{x}{2q_1^2}\right)^2 - 1} (u-x)^{\frac{1}{2}} (2q_1^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Вновь отметим, что эти спектральные функции играют важную роль, главным образом, внутри некоторых полос (см. рис. 2).

Таким образом, приближение амплитуды рассеяния суммой трех членов, удовлетворяющих представлению Мандельштама со спектральными функциями, не исчезающими внутри некоторых полос и определенными с помощью параметров полюсов Редже во всех трех каналах, представляется полезным. Описанное разбиение амплитуды является предварительным шагом в формулировке новой полосовой аппроксимации^{15/} в рамках которой можно в принципе получить траектории Редже самосогласованным способом. В следующей главе мы дадим анализ структуры парциальной амплитуды и покажем, какие приближения можно применять, чтобы сделать эту программу практически удобной.

3. Структура парциальных амплитуд

Чтобы получить парциальную амплитуду используем формулу (2.18)

$$f_I^-(s) = \sum_n \frac{e^{-\ell - \alpha_n^I(s)} \xi_0^-(s)}{\ell - \alpha_n^I(s)} \beta_n^I(s) + V^I(\ell; s), \quad (3.11)$$

где функция $V^I(\ell; s)$ голоморфна в правой полуплоскости

$$V^I(\ell; s) = \frac{1}{\pi q_n} \int_0^{\infty} Q_\ell(1+t/2q_n^2) \overline{A_n^I(s; t')} dt'. \quad (3.2)$$

Первый член в формуле (3.1) представляет вклад, происходящий от полюсов Редже в s канале, которые могут появиться в правой полуплоскости. Этот член обладает важными свойствами, которые являются существенными в низкоэнергетической области. Именно этот член имеет правильное пороговое поведение и одновременно является выражением резонансного типа. Эта форма вклада полюса Редже в канале очень часто употребляется для полуфеноменологического анализа разных процессов рассеяния^{19-12/} при малых энергиях.

Рассмотрим аналитические свойства обоих членов в выражении (3.1) как функций от переменной s . Они являются аналитическими функциями во всей области, кроме обычных разрезов $\infty < s < 0, 4 < s < \infty$. При нефизических значениях параметра ℓ появля-

ется также добавочный кинематический разрез на отрезке $0 < s < 4$. Далее введем новую амплитуду $h_{\rho}(s)$

$$\bar{f}_{\rho}^{-1}(s) = e^{-\ell \xi_0(s)} h_{\rho}^I(s) \approx \left(\frac{s^{1/2} - 2}{s^{1/2} + 2} \right)^{\ell} h_{\rho}^I(s), \quad (3.3)$$

где функция $h_{\rho}^I(s)$ не имеет уже кинематического разреза, а функция $\bar{f}_{\rho}^{-1}(s)$ обладает правильным пороговым поведением. Из формулы (3.1) получаем следующие выражения для функции $h_{\rho}^I(s)$

$$h_{\rho}^I(s) = \sum_n \frac{e^{\alpha_n^I \xi_0(s)}}{\ell - \alpha_n^I(s)} \beta_n^I(s) + e^{\ell \xi_0(s)} B(\ell; s). \quad (3.4)$$

В формуле (3.4) первый член имеет практически только правый разрез, и левый разрез функции $h_{\rho}^I(s)$ определяется почти целиком через соответствующий вклад второго члена. С другой стороны, второй член определяется параметрами полюсов Редже в перекрестных каналах. Рассмотрим этот член. Из (3.2) имеем следующие выражения для функции $B(\ell; s)$

$$B(\ell; s) = \frac{1}{\pi q_n^2} \int_4^{\infty} dt' \bar{A}_t^I(s; t') Q_{\ell} \left(1 + \frac{t'}{2q_n^2} \right).$$

Как было показано в главе 3, главная часть функции $\bar{A}_t^I(s; t')$ лежит внутри полосы $4 < t < t_1$, где эта функция имеет вид:

$$\bar{A}_t^I(s; t) = \sum_{n'} \beta_{n'} \operatorname{disc}_t \frac{1}{2} [W(\alpha_n^{I'}(t), ts) + (-1)^{I'} W(\alpha_n^{I'}(t), tu)], \quad (3.5)$$

где

$$W(\alpha_n^I; t, s) = \frac{(2\alpha_n^I(t) + 1)}{\sin \pi \alpha_n^I(t)} \beta_n(t) \left[-\pi P_{\alpha_n^I(t)} \left(-1 - \frac{s}{2q_n^2} \right) + \sqrt{2} \sin \pi \alpha_n^I(t) \int_{-\infty}^{\xi_0(t)} \frac{e^{(\alpha_n^I(t) + 1/2)x}}{[\operatorname{ch} x - (1 + \frac{s}{2q_n^2})]^{1/2}} dx \right]. \quad (3.6)$$

Но внутри полосы $4 < t < t_1$ главная зависимость функции $W(\alpha(t); s, t)$ от t определяется фактором $\frac{1}{\sin \pi \alpha(t)}$. Следовательно, хорошим приближением для функции $W(\alpha(t), s, t)$ внутри полосы будет следующее выражение:

$$W(\alpha^I(t); t, s) \approx \frac{(2\alpha^I(M^2) + 1) \beta^I(M^2)}{\sin \pi \alpha^I(t)} \times \quad (3.7)$$

$$\left[-\pi P_{\alpha^I(t)} \left(-1 - \frac{s}{2q_M^2} \right) + \frac{\sin \pi \alpha^I(t)}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\xi_0(M^2)} \frac{e^{\lambda_n^I(x)}}{[\operatorname{ch} x - (1 + \frac{s}{2q_M^2})]^{1/2}} dx \right],$$

где M - масса резонанса.

Используя это приближение, получаем для функции $B^I(\ell; s)$ (пока для физических ℓ) формулу:

$$\begin{aligned}
V^I(\ell; s) = & \frac{\beta_{11}}{2} \int_{-1}^{+1} dx P_{\rho} \ell(s; a) \frac{3\beta^I(M_{\rho}^2)}{2 \sin \pi \alpha_{\rho}(t)} [-\pi P_{\alpha_{\rho}(s)}(-1 - \frac{s}{2q^2 M_{\rho}^2})] \\
& + \sin \pi \alpha_{\rho}(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\infty}^{\xi_0 \alpha_{\rho}^2} \frac{e^{\lambda_{\rho}(s)x}}{[\operatorname{ch} x - (1 + \frac{2s}{M_{\rho}^2 - 4})]^{1/2}} dx + \\
& + \pi P_{\alpha_{\rho}(s)}(1 + \frac{2s}{M_{\rho}^2 - 4}) - \sin \pi \alpha_{\rho}(t) \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\xi_0 \alpha_{\rho}^2} \frac{e^{\lambda_{\rho}(s)x}}{[\operatorname{ch} x + (1 + \frac{2s}{M_{\rho}^2 - 4})]^{1/2}} dx] \quad (3.8)
\end{aligned}$$

(если ограничимся вкладом от ρ мезона).

В выражении (3.8) можно пренебречь зависимостью от переменной t функции, стоящей в скобках, и положить $t=0$. Окончательно можем написать следующие приближенное выражение для функции $V^I(\ell; s)$

$$\begin{aligned}
V^I(\ell; s) = & \frac{3\beta_{11}}{2q^2} f(s; a(0)) \times \beta(M_{\rho}^2) \times \\
& \times \frac{1}{\pi} \int_4^{t_4} \frac{d\alpha}{\sin \pi \alpha(t)} \frac{dt}{Q_{\rho} \ell(1 + \frac{t}{2q^2})} = \frac{3}{2\pi q^2} \Gamma_{\rho} Q_{\rho} \ell(1 + \frac{M_{\rho}^2}{2q^2}) \times f(s; a(0)), \quad (3.9)
\end{aligned}$$

где $f(s; a(0))$ значение функции, стоящей в скобках в точке $t=0$, а именно:

$$\begin{aligned}
f^I(s; a(0)) = & [-P_{\alpha_{\rho}(s)}(-1 - \frac{2s}{M_{\rho}^2 - 4}) + \\
& + (\sin \pi \alpha^I(0)) \sqrt{2} \int_{-\infty}^{1 + \frac{s}{M_{\rho}^2 - 4}} \frac{e^{\lambda_{\rho}(s)x}}{[\operatorname{ch} x - (1 + \frac{2s}{M_{\rho}^2 - 4})]^{1/2}} dx] \quad (3.10) \\
& + \pi P_{\alpha_{\rho}}(1 + \frac{2s}{M_{\rho}^2 - 4}) - (\sin \pi \alpha_{\rho}(0)) \sqrt{2} \times \\
& \times \int_{-\infty}^{1 + \frac{s}{M_{\rho}^2 - 4}} \frac{e^{\lambda_{\rho}(s)x}}{[\operatorname{ch} x + 1 + \frac{2s}{M_{\rho}^2 - 4}]^{1/2}} dx].
\end{aligned}$$

Таким образом вклад, который дает обмен полюсом Редже в перекрестном канале, в парциальную амплитуду s канала, выражается в виде произведения двух функций. Первая из них $f(s; a(0))$ определяет, главным образом, асимптотическое поведение, а вторая совпадает с вкладом, который дает обмен элементарной частицы со спином 0.

Вернемся теперь к задаче определения функции $h^I(s)$, которая удовлетворяет дисперсионным соотношениям вида:

$$h_{\ell}^I(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\text{Im } h_{\ell}^L(s')}{s' - s} + \frac{1}{\pi} \int_4^{\infty} \frac{\text{Im } h_{\ell}^R(s')}{s' - s}, \quad (3.11)$$

где $\text{Im } h_{\ell}^L(s)$ определяется только через функцию $B(\ell, s)$. Для определения функции $h_{\ell}^I(s)$ применим N/D метод. Запишем функцию $h_{\ell}^I(s)$ в виде:

$$h_{\ell}^I(s) = \frac{N_{\ell}^I(s)}{D_{\ell}^I(s)}. \quad (3.12)$$

В приближении упругой унитарности получаем тогда следующее уравнение:

$$D_{\ell}^I(s) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_4^{\infty} \left(\frac{s' - 4}{s'} \right)^{\frac{\ell}{4}} \left(\frac{s' - 2}{s' + 2} \right)^{\frac{\ell}{2}} \frac{N_{\ell}^I(s')}{s' - s} ds'. \quad (3.14)$$

Функция $N_{\ell}^I(s)$ удовлетворяет интегральному уравнению:

$$N_{\ell}^I(s) = F_{\ell}^I(s) + \frac{1}{\pi} \int_4^{\infty} \frac{F_{\ell}^I(s') - F_{\ell}^I(s)}{s' - s} \times \left(\frac{s' - 4}{s'} \right)^{\frac{\ell}{4}} \left(\frac{s' - 2}{s' + 2} \right)^{\frac{\ell}{2}} N_{\ell}^I(s') ds', \quad (3.15)$$

а функция $F_{\ell}^I(s)$ равна:

$$F_{\ell}^I(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\text{Im} [B(\ell; s')] \left(\frac{s' - 2}{s' + 2} \right)^{\frac{\ell}{2}}}{s' - s} ds' = B(\ell; s) \left(\frac{s' - 2}{s' + 2} \right)^{\frac{\ell}{2}} - \frac{1}{\pi} \int_4^{\infty} \frac{\text{Im} [B(\ell; s') \left(\frac{s' - 2}{s' + 2} \right)^{\frac{\ell}{2}}]}{s' - s}. \quad (3.16)$$

Легко видеть, что асимптотическое поведение функции $F_{\ell}^I(s)$ достаточно хорошее, чтобы обеспечить фредгольмовский характер соответственного интегрального уравнения (3.15). Однако это не самая важная черта этого уравнения. Обычно, пороговое поведения обеспечивается просто фактором $q^{2\ell}$. Тогда получается, что соответствующие интегральное уравнение на функцию $N_{\ell}(s)$ не разрешимо для произвольного ℓ . Видно, что мы наталкиваемся здесь на это усложнение и, таким образом, можно пользоваться уравнением (3.15) для произвольного ℓ .

Приближение упругой унитарности не кажется, однако, достаточно хорошим. Описанный выше метод можно также применить в рамках новой полосовой аппроксимации^{/4,5/}. Действительно, предположим двухчастичную унитарность внутри полосы $4 < s < s_1$ и зададим одновременно особенности на левом и далеком правом разрезе через так называемый обобщенный потенциал $V_{\ell}^P(s)$.

Чтобы вычислить обобщенный потенциал $V_{\ell}^P(s)$ надо вычесть из функции $V_{\ell}^I(\ell; s) \left(\frac{s' - 2}{s' + 2} \right)^{\frac{\ell}{2}}$ вклад из разреза на отрезке $4 < s < s_1$. Получаем тогда следующие выражения для функции $V_{\ell}^P(s)$

$$V_{\ell}^P(s) = V_{\ell}^I(\ell; s) \left(\frac{s' + 2}{s' - 2} \right)^{\frac{\ell}{2}} - \frac{1}{\pi} \int_4^{s_1} \frac{\text{Im} [V_{\ell}^I(\ell; s') \left(\frac{s' - 2}{s' + 2} \right)^{\frac{\ell}{2}}]}{s' - s}. \quad (3.17)$$

Уравнения N/D в рамках этого приближения принимают следующий вид:

$$N_{\ell}^I(s) = B_{\ell}^P(s) + \frac{1}{\pi} \int_4^{s_1} \frac{B_{\ell}^P(s') - B_{\ell}^P(s)}{s' - s} \times$$

$$\times \left(\frac{s'-4}{s'}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{s'^{\frac{1}{2}} - 2}{s'^{\frac{1}{2}} + 2}\right)^{\ell} N_{\ell}^I(s') ds' \quad (3.18)$$

$$D_{\ell}^I(s) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_4^{s_1} \frac{ds'}{s' - s} \left(\frac{s'-4}{s'}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{s'^{\frac{1}{2}} - 2}{s'^{\frac{1}{2}} + 2}\right)^{\ell} N_{\ell}^I(s'). \quad (3.19)$$

Подчеркнем, что можно пренебречь в обобщенном потенциале вкладами, происходящими от полюсов Редже в прямом канале. Этого упрощения мы добились в результате правильной факторизации порогового члена.

4. Заключение

В предыдущих главах была показана полезность приближения амплитуды рассеяния в виде суммы вкладов от полюсов Редже от всех трех каналов.

Далее мы показали, как выделить пороговый фактор парциальной амплитуды, чтобы, во-первых, не испортить ее асимптотического поведения, и, во-вторых, чтобы левый разрез новой амплитуды определялся через вклады полюсов Редже в перекрестных каналах.

Идея учета поведения типа Редже обмениваемой частицы в перекрестном канале была выдвинута в ранних работах в связи с расходимостями, которые появляются, если частица считается элементарной (см. работы /13-15/). Известно /18/, что асимптотическое поведение абсорбтивных частей парциальной амплитуды определяется положением полюсов Редже в перекрестном канале для нулевого значения энергии в этом канале. Поэтому естественно учесть реджеевское поведение в определении этих абсорбтивных частей. В предыдущей главе мы показали, что, используя приближения, этого можно добиться.

Этот метод можно применять в рамках так называемой новой полосовой аппроксимации /4,5/. Показано, каким образом можно вычислить "обобщенный потенциал" без учета вкладов полюсов Редже прямого канала. Одновременно показано, что конфликт между пороговым и асимптотическим поведением парциальной амплитуды устраняется

специальным выбором порогового фактора. Следует заметить, что проводя эту факторизацию, мы выделяем, практически, всю зависимость функции $N_\ell(s)$ от переменной ℓ в виде фактора $(\frac{s^{\frac{1}{2}}-2}{s^{\frac{1}{2}}+2})^\ell$. Недавно /17/ был предложен интересный подход к проблеме определения амплитуды $\pi\pi$ -рассеяния на основе аналитичности, унитарности и перекрестной симметрии. Одним из главных приближений являлось пренебрежение ℓ зависимостью функции N_1 (кроме указанного порогового фактора). В нашем методе необходимость использовать эту факторизацию обусловлена иными причинами. Видно также, что такая факторизация более удобна, чем обычная.

Теперь остается проблема решения полученных интегральных уравнений. Вероятно, удастся аппроксимировать ядро уравнения (3.18) вырожденной формой и свести всю задачу к квадратурам ^{х)}. Метод, представленный в работе /18/, показывает, что очень грубые приближения могут привести к разумным результатам.

В заключение отметим, что кажущийся на первый взгляд практически очень сложный метод самосогласованного определения параметров полюсов Редже, можно свести к форме, очень похожей на обычный метод бутстрапа /1/ при одновременном устранении недостатков старого подхода.

Л и т е р а т у р а

1. См., например, лекцию Ф.Захариазена в книге
Strong Interactions and High Energy Physics, Scottish Universities, Summer School, 1963. Edited by R.G.Moorhouse
Oliver and Boyd, Edinburgh and London.
2. L.A.P.Balazs. Phys. Rev., 128, 1939 (1962).
3. L.A.P.Balazs. Phys. Rev., 132, 867 (1963).
4. G.F.Chew. Phys. Rev., 129, 2363 (1963).
5. G.F.Chew and C.E.Jones. Phys. Rev., 135, B208 (1964).
6. N.N.Khuri. Phys. Rev., 130, 429 (1963).
7. M.Kretzschmar. Nuovo Cim., 32, 1405 (1964).
8. G.F.Chew, S.C.Frautschi and S.Mandelstam. Phys. Rev., 126, 1202 (1962)).
9. N.N.Khuri and B.M.Udgaonkar. Phys. Rev. Lett., 10, 172 (1963).
10. R.Majumdar. Nuovo Cim., 33, 1734 (1964).
11. S.N.Biswas and S.K.Bose. Phys. Rev., 135, B1045 (1964).
12. M.Der Sarkissian. Nuovo Cim., 31, 562 (1963).

^{х)} В методе новой полосовой аппроксимации появляется, однако, добавочное усложнение, связанное с особенностью функции $V_\ell^p(s)$ на границе полосы (см. /18/).

13. D.Wong. Phys. Rev., 126, 1220 (1962).
14. M.Bander and G.L. Shaw. Phys. Rev., 135, B 267 (1964).
15. R.C. Arnold. Phys. Rev., 134, B1380 (1964).
16. R.Omnes. Phys. Rev., 133, B1543 (1964).
17. R.E.Kreps, L.F.Cook, J.J.Brehm and R.Blankenbecler. Phys. Rev., 133, B1526 (1964).
18. G.F.CheW. Phys. Rev., 130, 1264 (1963).
19. L.A.P.Balazs. Phys. Rev., 134, B 1315 (1964).

Рукопись поступила в издательский отдел
8 апреля 1965 г.

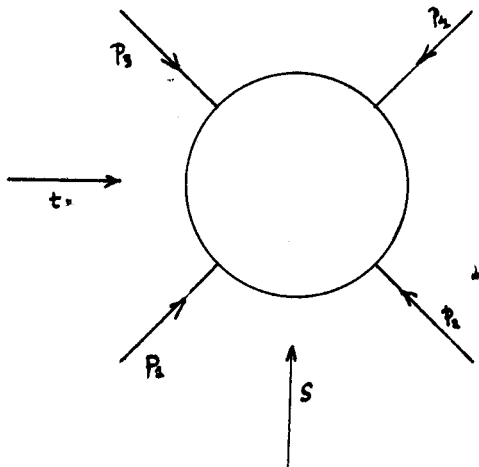


Рис.1.

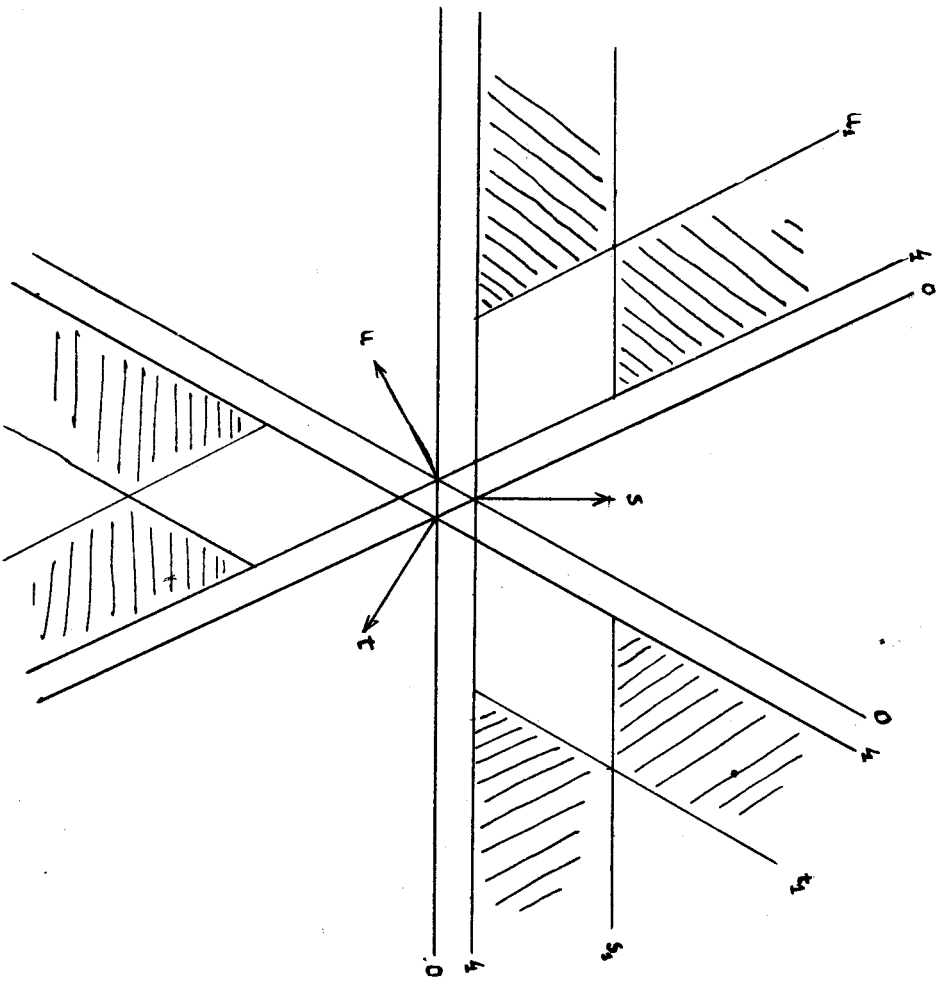


Рис. 2.