ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2098

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

П.Н. Боголюбов

О СОСТАВНОЙ МОДЕЛИ МЕЗОНОВ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ТИПА БЕТЕ-СОЛПИТЕРА

1965

P-2098

П.Н. Боголюбов

О СОСТАВНОЙ МОДЕЛИ МЕЗОНОВ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ТИПА БЕТЕ-СОЛПИТЕРА

§ 1.

В работе Н.Н.Боголюбова, Нгуен Ван Хьеу, Д.Стоянова, Б.В.Струминского, А.Н.Тавхелидзе, В.П.Шелеста [1] была рассмотрена динамическая модель мезонов, в которой мезоны представляются как связанные состояния двух частиц – кварка и антикварка. В этой работе авторы исходили из релятивистски инвариантного уравнения вида:

$$\{(\partial_1^2 - M^2)(\partial_2^2 - M^2) - U\}\psi = 0, \tag{1.1}$$

где

$$\partial_j = \sum_{\nu=0}^{3} \gamma_j^{(\nu)} \left(i \frac{\partial}{\partial x_j^{(\nu)}} + e_j A_\nu(x_j) \right). \tag{1.2}$$

Здесь волновая функция ψ

$$\psi = \psi_{a_1, a_2}(x_1, x_2)$$

зависит от двух спинорных индексов $a_1, a_2 = 1,2,3,4$ и от двух точек $x_1(x_1^{(0)} x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, x_1^{(3)})$; $x_2(x_2^{(0)}, x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, x_2^{(3)})$ пространства-времени; $\gamma^{(\nu)}$ – обычные γ –матрицы, действующие на спинорный индекс a_j x); $A_\nu(x)$ – слабое внешнее электромагнитное поле.

Взаимодействие между двумя частицами, обуславливающее возможность связанных состояний, представляется в уравнении четырехмерным факторизующимся потенциалом:

$$U\psi = -i g W(x_1 - x_2) \int \delta(x_1 + x_2 - x_1' - x_2') W(x_1' - x_2') \psi(x_1', x_2') \, dx_1' \, dx_2'.$$

Целью настоящей статьи является получение результатов работы БНССТШ [1] на основе использования вместо уравнения с факторизующимся потенциалом уравнения типа Бете–Солпитера:

$$\{(\partial_1^2 - M^2)(\partial_2^2 - M^2) - W^2((\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 - (x_1^{(0)} - x_2^{(0)})^2)\}\psi = 0. \tag{1.3}$$

В этом уравнении W представляет скалярный потенциал, зависящий от инвариантного скаляра $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 - (x_1^{(0)} - x_2^{(0)})^2$.

Мы будем систематически применять основную идею работы [1], состоящую в том, что масса кварка M весьма велика и что взаимодействие кварка и антикварка в мезоне осуществляет, так сказать, компенсацию этой массы. В соответствии с этим примем:

$$W = M^2 - U((\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 - (x_1^{(0)} - x_2^{(0)})^2). \tag{1.4}$$

---

x) При этом γ_1^ν действуют на ψ слева, а γ_2^ν –справа:

$$(\gamma_1^\nu \psi)_{a_1, a_2} = \sum_{(b)} (\gamma_1^\nu)_{a_1, b} \psi_{b, a_2}; \qquad (\gamma_2^\nu \psi)_{a_1, a_2} = \sum_{(b)} \psi_{a_1, b} (\gamma_2^\nu)_{b, a_2}.$$

Будем считать, что

$$U((\bar x_1-\bar x_2)^2-(x_1^{(0)}-x_2^{(0)})^2)\ge 0 \quad \text{при} \quad (\bar x_1-\bar x_2)^2-(x_1^{(0)}-x_2^{(0)})^2\ge 0 . \qquad (1.5)$$

Для получения окончательного приближенного уравнения в наиболее простом виде мы также воспользуемся формальным предельным переходом $M\to\infty$.

§ 2. Связанные состояния при отсутствии внешнего поля

Рассмотрим простейший случай отсутствия внешнего поля, когда $A_\nu=0$. В этом случае имеем из (1.3) следующее уравнение Б–С:

$$\{(\Box_{x_1}+M^2)(\Box_{x_2}+M^2)-W^2\{(\bar x_1-\bar x_2)^2-(x_1^{(0)}-x_2^{(0)})^2\}\}\,\psi=0, \qquad (2.1)$$

где $\Box_{x_j}$ – даламбертианы, действующие на переменные x_j

$$\Box_{x_j}=\sum_{a=0}^{3} g_{aa}\left(\frac{\partial}{\partial x_j^a}\right)^2; \qquad g_{aa}=1,-1,-1,-1.$$

Выделим теперь движение центра тяжести и относительное движение двух частиц. Для этого произведем замену переменных:

$$\frac{x_1+x_2}{2}=x; \qquad x_1-x_2=y.$$

Тогда

$$\Box_{x_1}=\frac14\Box_x+\Box_y+\sum_{a=0}^{3} g_{aa}\frac{\partial}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial y^a} \qquad (2.2)$$

$$\Box_{x_2}=\frac14\Box_x+\Box_y-\sum_{a=0}^{3} g_{aa}\frac{\partial}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial y^a}.$$

Используем здесь сделанный Виком /2/ поворот оси времени, положив $y^{(0)}=i\,y^{(4)}$, где теперь $y^{(4)}$ будет вещественной переменной. Тогда

$$W=M^2-U(\bar y^2-(y^{(0)})^2)=M^2-U(\bar y^2+(y^{(4)})^2).$$

Введя евклидовский квадрат четырехвектора

$$y^2=\sum_{a=1}^{4}(y^a)^2,$$

напишем просто

$$W=M^2-U(y^2).$$

Запишем уравнение в новых переменных:

$$\{(\Box_{x_1}+M^2)(\Box_{x_2}+M^2)-(M^2-U(y^2))^2\}\,\psi=0,$$

где $\Box_{x_1}$, $\Box_{x_2}$ определяются формулами (2.2). Отсюда, разделив на M^2, получаем

$$\{\frac12\Box_x+2\Box_y+2U+\frac{\Box_{x_1}\Box_{x_2}-U^2}{M^2}\}\,\psi=0.$$

Как видно тогда, после формального перехода к пределу, при $M\to\infty$, уравнение будет иметь вид

$$(\frac12\Box_x+2\Box_y+2U)\,\psi=0. \qquad (2.3)$$

Так как $\Box_y=\left(\frac{\partial}{\partial y^0}\right)^2-\sum_{a=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial y^a}\right)^2$, то обозначив $\Delta=\sum_{a=1}^{4}\left(\frac{\partial}{\partial y^a}\right)^2$, получим $\Box_y=-\Delta$.

Окончательно (2.3) принимает следующий вид:

$$\{-\Delta+U(y^2)+\frac14\Box_x\}\,\psi(x,y)=0. \qquad (2.4)$$

Рассмотрим теперь в евклидовском пространстве точек y задачу на собственные значения и функции для уравнения типа Шредингера:

$$\{-\Delta+U(y^2)-\epsilon\}\,\phi(y)=0. \qquad (2.5)$$

Если допустить, что взаимодействие

$$W\{(\bar x_1-\bar x_2)^2-(x_1^{(0)}-x_2^{(0)})^2\}$$

исчезает при $(\bar x_1-\bar x_2)\to\infty$, то потенциал $U(y^2)\to M\to\infty$ при $y^2\to\infty$.

Далее, в силу условия (1.5) $U(y^2)\ge 0$. Заметим, что $(-\Delta)$ является положительно определенным оператором, и поэтому оператор $(-\Delta+U(y^2))$ также будет положительно определенным. Таким образом, все его собственные значения положительны. Предположим теперь, что наименьшее собственное значение $\epsilon=\epsilon_0$ соответствует s–состоянию, т.е. что для него

$$\phi=\phi_0(y)=\phi(R^2); \qquad R=\sqrt{\sum_{a=1}^{4}(y^a)^2} \qquad (2.6)$$

где $\phi(R^2)$– нормируемая вещественная функция R

$$\int\phi^2(R^2)\,d^4y=1. \qquad (2.7)$$

Интересно отметить, что для такого решения уравнение (2.5) сводится к обычному дифференциальному уравнению:

$$-\frac{\partial^2\phi(R^2)}{\partial R^2}-\frac{3}{R}\frac{\partial\phi(R^2)}{\partial R}+U(R^2)\phi(R^2)=\epsilon\,\phi(R^2).$$

Условие же нормировки будет:

$$2\pi^2\int_0^\infty R^3\phi^2(R^2)\,dR=1.$$

Возвратимся теперь к уравнению (2.4). Ясно, что оно обладает решениями, пропорциональными $\phi_0(y)$

$$\psi_{a_1,a_2}(x,y)=\phi_0(y)\,\Phi_{a_1,a_2}(x)=\phi(y^2)\,\Phi_{a_1,a_2}(x), \qquad (2.8)$$

где Φ_{a_1,a_2} удовлетворяет уравнению

$$(\Box_x+m^2)\,\Phi(x)=0, \qquad (2.9)$$

в котором

$$m^2=4\epsilon_0. \qquad (2.10)$$

В первоначальных переменных x_1, x_2 решение (2.8) запишется:

$$\psi_{a_1,a_2}(x_1,x_2)=\phi\{(\bar x_1-\bar x_2)^2-(x_1^0-x_2^0)^2\}\,\Phi_{a_1,a_2}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right). \qquad (2.11)$$

Как видно, плоская волна

$$\Phi_{a_1,a_2}(x)=e^{-i(Ex^0-\bar p\bar x)}\,\Phi_{a_1,a_2}$$

удовлетворяет уравнению (2.9), когда $E^2-\bar p^2=m^2$.

Итак, собственные значения ϵ_0 определяет квадрат массы рассматриваемого связанного состояния (2.8).

§ 3. Связанные состояния в присутствии слабого электромагнитного поля

Рассмотрим теперь вопрос о влиянии слабого внешнего электромагнитного поля. Для простоты будем считать его не зависящим от времени $A_\nu(x) = A_\nu(\bar{x})$. Тогда в уравнении (1.3) будем иметь:

$$\partial_j^2 = -\Box_{x_j} + e_j s_{x_j},$$

где
$$S_{x_j} = \sum_{\nu=0}^{3} g_{\nu\nu} i \left(\frac{\partial}{\partial x_j^\nu} A_\nu(\bar{x}_j) + A_\nu(\bar{x}_j) \frac{\partial}{\partial x_j^\nu} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu} \sigma_j^{\nu\mu} F^{\nu,\mu}(x_j);$$

$$F^{\nu,\mu} = \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x^\mu}; \qquad \sigma^{\nu,\mu} = \frac{i}{2}(\gamma_\nu \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\nu).$$

Мы учитываем здесь, разумеется, лишь члены первого порядка малости по отношению к A.

Наше уравнение (1.3) запишется поэтому в виде:

$$\{(\Box_{x_1} - e_1 S_{x_1} + M^2)(\Box_{x_2} - e_2 S_{x_2} + M^2) - (M^2 - U)^2\} \psi = 0. \tag{3.1}$$

Как и в предыдущем параграфе, сделаем замену переменных:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = x; \quad x_1 - x_2 = y$$

и получим:

$$\Box_{x_1} = \tfrac{1}{4}\Box_x + \Box_y + \sum_{\alpha=0}^{3} g_{\alpha\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

$$\Box_{x_2} = \tfrac{1}{4}\Box_x + \Box_y - \sum_{\alpha=0}^{3} g_{\alpha\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

$$S_{x_1} = i \sum_{\nu=0}^{3} g_{\nu\nu} \left\{ \left(\tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} + \frac{\partial}{\partial y^\nu} \right) A_\nu\left(\bar{x} + \frac{\bar{y}}{2}\right) + A_\nu\left(\bar{x} + \frac{\bar{y}}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} + \frac{\partial}{\partial y^\nu} \right) \right\} +$$
$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{\nu,\mu} \sigma_1^{\nu,\mu} F^{\nu,\mu}\left(\bar{x} + \frac{\bar{y}}{2}\right) \tag{3.2}$$

$$S_{x_2} = i \sum_{\nu=0}^{3} g_{\nu\nu} \left\{ \left(\tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial y^\nu} \right) A_\nu\left(\bar{x} - \frac{\bar{y}}{2}\right) + A_\nu\left(\bar{x} - \frac{\bar{y}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial y^\nu} \right) \right\} +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{\nu,\mu} \sigma_2^{\nu,\mu} F^{\nu,\mu}\left(\bar{x} - \frac{\bar{y}}{2}\right).$$

Сделаем опять виковский поворот

$$y^{(0)} = i y^{(4)}, \tag{3.3}$$

где $y^{(4)}$ – вещественная переменная и перейдем к четырехмерному евклидовскому пространству:

$$y^2 = \bar{y}^2 + (y^{(4)})^2 = \sum_{\alpha=1}^{4} (y^{(\alpha)})^2.$$

В новых переменных уравнение (3.1) имеет вид:

$$\{(\Box_{x_1} - e_1 S_{x_1} + M^2)(\Box_{x_2} - e_2 S_{x_2} + M^2) - (M^2 - U(y^2))^2\} \psi(x,y) = 0,$$

где $\Box_{x_1}$, $\Box_{x_2}$, S_{x_1}, S_{x_2} определяются из формул (3.2). Раскрывая произведение и разделив результат на M^2, найдем:

$$\{(\Box_{x_1} + \Box_{x_2} - e_1 S_{x_1} - e_2 S_{x_2} + 2U) + \frac{1}{M^2}[(\Box_{x_1} - e_1 S_{x_1})(\Box_{x_2} - e_2 S_{x_2}) - U^2]\} \psi(x,y) = 0.$$

Отсюда после формального перехода к пределу при $M \to \infty$ получим:

$$\{\Box_{x_1} + \Box_{x_2} - e_1 S_{x_1} - e_2 S_{x_2} + 2U(y^2)\} \psi(x,y) = 0. \tag{3.4}$$

В силу (3.2), (3.3) здесь:

$$\Box_{x_1} + \Box_{x_2} = \frac{1}{2}\Box_x - 2\Delta; \qquad \Delta = \sum_{\alpha=1}^{4} \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)^2.$$

Обозначим

$$L_{x,y} = e_1 S_{x_1} + e_2 S_{x_2} =$$

$$= i e_1 \sum_{\nu=0}^{3} g_{\nu\nu} \left\{ \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} + \frac{\partial}{\partial y^\nu} \right) A_\nu\left(\bar{x} + \frac{\bar{y}}{2}\right) + A_\nu\left(\bar{x} + \frac{\bar{y}}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} + \frac{\partial}{\partial y^\nu} \right) \right\} +$$
$$+ i e_2 \sum_{\nu=0}^{3} g_{\nu\nu} \left\{ \left(\tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial y^\nu} \right) A_\nu\left(\bar{x} - \frac{\bar{y}}{2}\right) + A_\nu\left(\bar{x} - \frac{\bar{y}}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial y^\nu} \right) \right\} + \tag{3.5}$$
$$+ \frac{e_1}{2} \sum_{\nu,\mu} \sigma_1^{\nu,\mu} F^{\nu,\mu}\left(\bar{x} + \frac{\bar{y}}{2}\right) + \frac{e_2}{2} \sum_{\nu,\mu} \sigma_2^{\nu,\mu} F^{\nu,\mu}\left(\bar{x} - \frac{\bar{y}}{2}\right).$$

Тогда уравнение (3.4) приводится к виду:

$$\{-2\Delta + 2U(y^2) + \tfrac{1}{2}\Box_x - L_{x,y}\} \psi(x,y) = 0. \tag{3.6}$$

Рассмотрим систему собственных функций $\phi_n(y)$; $n=1,2\ldots$ уравнения

$$\{-\Delta + U(y^2) - \epsilon_n\} \phi_n(y) = 0$$

такую, которая вместе с $\phi_0(y)$ образует полную систему.

Естественно, что

$$\int \phi_0(y) \phi_n(y) d^4y = 0.$$

Построим теперь разложение $\psi(x,y)$ по функциям $\phi_n(y)$

$$\psi_{a_1,a_2}(x,y) = \phi_0(y) \Phi_{a_1,a_2}(x) + \sum_{n \geq 1} \phi_n(y) \Phi^{(n)}_{a_1,a_2}(x). \tag{3.7}$$

Очевидно,

$$\Phi_{a_1,a_2}(x) = \int \phi_0(y) \psi_{a_1,a_2}(x,y) d^4y. \tag{3.8}$$

Как мы уже видели в предыдущем параграфе, в случае отсутствия электромагнитного поля, $L = 0$, имеется решение, когда в (3.7)

$$\Phi_{a_1,a_2}(x) = e^{-i(Ex^0 - \bar{p}\bar{x})} \Phi_{a_1,a_2}$$

$$\Phi^{(n)}_{a_1,a_2}(x) = 0 \qquad n \geq 1.$$

Проанализируем теперь влияние бесконечно малого электромагнитного поля на это решение. Естественно считать, что $\Phi^{(n)}_{a_1,a_2}(x)$ при $n \geq 1$ будут бесконечно малыми первого порядка по отношению к A. Заметив это, подставим разложение в уравнение, полученное из (3.6),

$$\int \phi_0(y) \{-2\Delta + 2U(y^2) + \tfrac{1}{2}\Box_x - L_{x,y}\} \psi(x,y)\, d^4y = 0. \tag{3.9}$$

Найдем

$$\int \phi_0(y) \{-2\Delta + 2U(y^2) + \tfrac{1}{2}\Box_x - L_{x,y}\} \phi_0(y)\, d^4y\ \Phi^{(0)}(x) +$$
$$+ \sum_{n \geq 1} \int \phi_0(y) \{-2\Delta + 2U(y^2) + \tfrac{1}{2}\Box_x - L_{x,y}\} \phi_n(y)\, d^4y\ \Phi^{(n)}(x) = 0, \tag{3.10}$$

но

$$\int \phi_0(y) \{-2\Delta + 2U(y^2) + \tfrac{1}{2}\Box_x - L_{x,y}\} \phi_n(y)\, d^4y =$$
$$= 2\epsilon_n \int \phi_0(y)\, \phi_n(y)\, d^4y + \tfrac{1}{2} \int \phi_0(y) \phi_n(y)\, d^4y\ \Box_x -$$
$$- \int \phi_0(y)\, L_{x,y} \phi_n(y)\, d^4y = - \int \phi_0(y) L_{x,y} \phi_n(y)\, d^4y.$$

Значит, уравнение (3,10) может быть записано в виде:

$$\int \phi_0(y) \{-2\Delta + 2U(y^2) + \tfrac{1}{2}\Box_x - L_{x,y}\} \phi_0(y)\, d^4y\ \Phi(x) - \sum_{n \geq 1} \int \phi_0(y) L_{x,y} \phi_n(y)\, d^4y\ \Phi^{(n)}(x) = 0.$$

Но выражения

$$\int \phi_0(y)\, L_{x,y}\, \phi_n(y)\, d^4y\ \Phi^{(n)}(x)$$

будут второго порядка малости по отношению к A. Поэтому, не учитывая их, получим вместо (3.10)

$$\int \phi_0(y) \{-2\Delta + 2U(y^2) + \tfrac{1}{2}\Box_x - L_{x,y}\} \phi_0(y)\, d^4y\ \Phi(x) = 0.$$

Но

$$\int \phi_0(y) \{-2\Delta + 2U(y^2)\} \phi_0(y)\, d^4y = 2\epsilon_0 \int \phi_0^2(y)\, d^4y = 2\epsilon_0 = \frac{m^2}{2}.$$

Таким образом, окончательно найдем:

$$(\Box_x + m^2)\, \phi(x) - 2 \int \phi_0(y)\, L_{x,y}\, \phi_0(y)\, d^4y\ \Phi(x) = 0, \tag{3.11}$$

где $m^2 = \frac{\epsilon_0}{4}$.

Здесь нам необходимо вычислить интеграл:

$$\int \phi_0(y)\, L_{x,y} \phi_0(y)\, d^4y,$$

где $L_{x,y}$ определяется из (3.5). Интегрируя по частям, видим, что

$$\int \phi_0(y) \left(\frac{\partial}{\partial y^\nu} A_\nu(\bar{x} \pm \frac{\bar{y}}{2}) + A_\nu(\bar{x} \pm \frac{\bar{y}}{2}) \frac{\partial}{\partial y^\nu} \right) \phi_0(y)\, d^4y =$$
$$= \int A_\nu(\bar{x} \pm \frac{\bar{y}}{2}) \int \left\{ -\frac{\partial \phi_0(y)}{\partial y^\nu} \phi_0(y) + \phi_0(y) \frac{\partial \phi_0(y)}{\partial y^\nu} \right\} d^4y = 0.$$

Ввиду радиальной симметрии $\phi_0(y) = \phi(y^2)$ мы можем написать для любой функции F

$$\int F(x + \frac{y}{2})\, \phi_0^2(y)\, d^4y = \int F(x - \frac{y}{2})\, \phi_0^2(y)\, d^4y.$$

Отсюда следует, что

$$\int \phi_0(y)\, L_{x,y} \phi_0(y)\, d^4y =$$
$$= \frac{i(e_1+e_2)}{2} \sum_{\nu=0}^{3} g_{\nu\nu} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\nu} \int A_\nu(\bar{x} + \frac{\bar{y}}{2})\, \phi_0^2(y)\, d^4y + \int A_\nu(\bar{x} + \frac{\bar{y}}{2})\, \phi_0^2(y)\, d^4y \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right\} \tag{3.12}$$
$$+ \sum_{\nu,\mu} \frac{e_1\sigma_1^{\nu,\mu} + e_2\sigma_2^{\nu,\mu}}{2} \int F^{\nu,\mu}(\bar{x} + \frac{\bar{y}}{2})\, \phi_0^2(y)\, d^4y.$$

Преобразуем теперь входящие сюда интегралы по y.

Воспользуемся для этого представлениями Фурье:

$$A_\nu(\bar{x}) = \int e^{i(\bar{q}\bar{x})}\, \tilde{A}_\nu(q)\, d\bar{q} \tag{3.13}$$
$$F^{\nu,\mu}(\bar{x}) = \int e^{i(\bar{q}\bar{x})}\, \tilde{F}^{\nu,\mu}(q)\, d\bar{q}.$$

Получим

$$\int A_\nu(\bar{x} + \frac{\bar{y}}{2})\, \phi_0^2(y)\, d^4y = \int d\bar{q}\, e^{i(\bar{q}\bar{x})} \left\{ \int e^{\frac{iqy}{2}} \phi_0^2\, d^4y \right\} \tilde{A}_\nu(q).$$

Ввиду радиальной симметрии $\phi_0^2(y) = \phi^2(y^2)$ входящий сюда интеграл в фигурных скобках зависит лишь от $\bar{q}^2$. Напишем поэтому

$$\int e^{\frac{iqy}{2}}\, \phi_0^2(y)\, d^4y = f(\bar{q}^2). \tag{3.14}$$

Благодаря условию нормировки (2.7),

$$f(0) = 1. \tag{3.15}$$

Итак,

$$A'_\nu(\bar{x}) \equiv \int A_\nu(\bar{x} + \frac{\bar{y}}{2})\, \phi_0^2(y)\, d^4y = \int d\bar{q}\, e^{i(\bar{q}\bar{x})}\, f(q^2)\, \tilde{A}_\nu(q). \tag{3.16}$$

Поскольку $f(\Box_x)\, e^{i(\bar{q}\bar{x})} = f(-\Delta_x)\, e^{i(\bar{q}\bar{x})} = f(\bar{q}^2)\, e^{i(\bar{q}\bar{x})}$ можем написать символически:

$$A'_\nu(\bar{x}) = \{ f(\Box_x)\, A_\nu(\bar{x}) \}. \tag{3.17}$$

Совершенно аналогично:

$$F'^{\nu,\mu}(x) \equiv \int F^{\nu,\mu}(\bar{x} + \frac{\bar{y}}{2})\, \phi_0^2(y)\, d^4y = \int d\bar{q}\, e^{i(\bar{q}\bar{x})}\, f(\bar{q}^2)\, \tilde{F}^{\nu,\mu}(q)\, d\bar{q} = \{ f(\Box_x)\, F^{\nu,\mu}(x) \}. \tag{3.18}$$

Подставив (3.16), (3.18) в (3.12), найдем:

$$\int \phi_0(y)\, L_{x,y} \phi_0(y)\, d^4y = \frac{i(e_1+e_2)}{2} \sum_{\nu=0}^{3} g_{\nu\nu} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\nu} A'_\nu(\bar{x}) + A'_\nu(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right\} +$$
$$+ \sum_{\nu,\mu} \frac{e_1\sigma_1^{\nu,\mu} + e_2\sigma_2^{\nu,\mu}}{2} F'^{(\nu,\mu)}(\bar{x}).$$

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2 - 2U)\,\psi = 0, \tag{4.14}$$

а в силу (4.9)

$$\psi = \gamma_1^{(5)} \gamma_2^{(5)} \psi\ . \tag{4.15}$$

Но, как мы видели в § 3,

$$\partial_j^2 = -\Box_{x_j} + e_j S_{x_j},$$

и поэтому уравнение (4.14) будет:

$$(\Box_{x_1} + \Box_{x_2} - e_1 S_{x_1} - e_2 S_{x_2} + 2U(y^2))\,\psi = 0\ . \tag{4.16}$$

Мы получили, следовательно, уравнение, совпадающее (3.4). Поэтому, проводя все дальнейшие рассуждения § 3, мы здесь также придем для

$$\Phi_{a_1, a_2}(x) = \int \phi_0(y)\, \psi_{a_1, a_2}(x, y)\, d^4 y\ . \tag{4.17}$$

к уравнению БНССТШ (3.19). Из (4.15), кроме того, еще получим дополнительное условие:

$$(1 - \gamma_1^{(5)} \gamma_2^{(5)})\,\phi = 0\ . \tag{4.18}$$

В заключение рассмотрим случай отсутствия электромагнитного поля. Возвратимся к неквадрированному уравнению (4.2), которое запишем в сокращенной форме:

$$L\,\psi = 0\,, \tag{4.19}$$

где

$$L = (\partial_1 - M)(\partial_2 + M) + \gamma_1^{(5)} \gamma_2^{(5)} W\ . \tag{4.20}$$

Как известно, оператор пространственного отражения для одной дираковской частицы можно взять в виде: $I = \gamma^0 \Lambda_x$, где Λ_x – оператор изменения знака пространственных координат точки x

$$\Lambda_x F(x_0, x_1, x_2, x_3) = F(x_0, -x_1, -x_2, -x_3)\,.$$

Поэтому в рассматриваемом случае системы двух частиц за оператор пространственного отражения возьмем:

$$I_{1,2} = \gamma_1^0 \gamma_2^0 \Lambda_{x_1} \Lambda_{x_2}\,. \tag{4.21}$$

Ясно, что $I_{1,2}$ – эрмитовский оператор и что $I_{1,2}^2 = 1$. Его собственные значения будут, следовательно, ± 1. Рассмотрим соответствующие уравнения для собственных функций $I_{1,2}$

$$I_{1,2}\psi = \psi \tag{4.22}$$

$$I_{1,2}\psi = -\psi\ . \tag{4.23}$$

С другой стороны, нетрудно заметить, что $I_{1,2}$ коммутирует с оператором L. Таким образом, как соотношение (4.12), так и соотношение (4.23) совместны с основным

уравнением (4.19). Очевидно, равенство (4.22) соответствует положительной четности рассматриваемой системы, а (4.23) – отрицательной. Как это принято в теориях составной модели мезона, сделаем допущение об отрицательной четности. Тогда, вместе с уравнением (4.19), мы будем иметь дополнительное условие в форме (4.23). Выведем из него дополнительное условие для $\Phi(x)$. В рассматриваемом случае отсутствия электромагнитного поля

$$\psi(x_1, x_2) = \phi\{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 - (x_1^0 - x_2^0)^2\}\,\Phi(x)\,.$$

Поэтому:

$$I_{1,2}\psi(x_1, x_2) = \phi\{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 - (x_1^0 - x_2^0)^2\}\,\gamma_1^0 \gamma_2^0 \Lambda_x \Phi(x)\,.$$

Таким образом, из (4.23), получим:

$$\gamma_1^0 \gamma_2^0 \Lambda_x \Phi(x) = -\Phi(x)\,. \tag{4.24}$$

Нам будет удобно перейти к импульсному представлению. Так как

$$(\Box_x + m^2)\,\Phi(x) = 0,$$

мы можем написать

$$\Phi(x) = \int e^{-i(p^0 x^0 - \bar{p}\bar{x})}\,\tilde{\Phi}(\bar{p})\,d\bar{p}\ ; \qquad p^0 = E = \sqrt{m^2 + \bar{p}^2}\ .$$

Тогда

$$\Lambda \Phi(x) = \int e^{-i(p^0 x^0 + \bar{p}\bar{x})}\,\tilde{\Phi}(\bar{p})\,d\bar{p} = \int e^{-i(p^0 x^0 - \bar{p}\bar{x})}\,\tilde{\Phi}(-\bar{p})\,d\bar{p}\,.$$

Поэтому, из (4.24) следует

$$\gamma_1^0 \gamma_2^0 \tilde{\Phi}(-\bar{p}) = -\tilde{\Phi}(\bar{p})\,. \tag{4.25}$$

Возьмем систему отсчета, в которой пространственный импульс равен нулю: $\bar{p} = 0$. В этой системе (4.25) дает $\gamma_1^0 \gamma_2^0 \tilde{\Phi} = -\tilde{\Phi}$. Помножая на γ_1^0, получим:

$$\gamma_1^0 \tilde{\Phi} + \gamma_2^0 \tilde{\Phi} = 0\ . \tag{4.26}$$

Перейдем теперь к произвольной системе отсчета. Тогда релятивистски ковариантным расширением условия (4.26) будет следующее условие:

$$(\gamma_1 p)\,\tilde{\Phi} + (\gamma_2 p)\,\tilde{\Phi} = 0, \tag{4.27}$$

где $\gamma p = \gamma^0 p^0 - \bar{\gamma}\bar{p}$.

Мы получили дополнительное условие (4.27), использованное в работе /1/. Выясним теперь матричную структуру Φ на основе условий (4.18), (4.27). Так как γ_1 действует на Φ слева, а γ_2 – справа, то:

$$\gamma^5 \tilde{\Phi}\, \gamma^5 = \tilde{\Phi} \tag{4.28}$$

$$(\gamma p)\,\tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}\,(\gamma p) = 0\,. \tag{4.29}$$

Как известно, произвольную матрицу четвертого порядка можно представить с помощью суммы из дираковских матриц:

$$\tilde{\Phi} = F_s + F_p\gamma^5 + \sum_{(\nu)} \gamma^\nu F^\nu + \sum_{(\nu)} \gamma^5\gamma^\nu S^\nu + \sum_{\nu,\mu} \sigma^{\nu,\mu} T^{\nu,\mu}.$$

Но

$$\gamma^5 \tilde{\Phi}\gamma^5 = -F_s - \gamma^5 F_p + \sum_{(\nu)} \gamma^\nu F^\nu + \sum_{(\nu)} \gamma^5\gamma^\nu S^\nu - \sum_{\nu,\mu} \sigma^{\nu,\mu} T^{\nu,\mu},$$

поэтому из (4.28) следует, что $F_p = 0$, $F_s = 0$, $T^{\nu,\mu} = 0$ и, таким образом,

$$\tilde{\Phi} = \sum_{(\nu)} \gamma^\nu F^\nu + \sum_{(\nu)} \gamma^5\gamma^\nu S^\nu. \tag{4.30}$$

Учтем теперь (4.29)

$$(\gamma p)\tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}(\gamma p) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_{a,\nu} (g^{aa} p^a S^\nu - g^{\nu\nu} p^\nu S^a)\gamma^5(\gamma^\nu\gamma^a - \gamma^a\gamma^\nu) + 2\sum_\nu p^\nu F^\nu,$$

откуда

$$g^{aa} p^a S^\nu - g^{\nu\nu} p^\nu S^a = 0; \quad \sum_\nu p^\nu F^\nu = 0.$$

Итак,

$$\Phi = \frac{\gamma^5(\gamma p)}{m} Q + (\gamma e) P,$$

где e – единичный четырехвектор $\bar{e}^2 - (e^\circ)^2 = 1$, ортогональный к четырехвектору p.

$$e p + e^\circ p^\circ = 0.$$

Введя индексы кварков, $A, B = 1,2,3$

$$\Phi = \frac{\gamma^5(\gamma p)}{m} Q^B_A + (\gamma e) P^B_A,$$

мы приходим к представлению Бэга и Пайса /3/ для псевдоскалярных и векторных мезонов.

В заключение, пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность Н.Н.Боголюбову, А.Н.Тавхелидзе и участникам семинара отдела теории поля за ценные советы и обсуждение.

Литература

1. Н.Н. Боголюбов, Нгуен Ван Хьеу, Д.Стоянов, Б.В. Струминский, А.Н. Тавхелидзе, В.П. Шелест. Препринт ОИЯИ Д-2075, Дубна, 1965.

2. Wick. Phys. Rev., 96, 1124 (1954).

3. M.A.B.Beg, A.Pais. Phys. Rev. Lett., 14, 267 (1965).

Рукопись поступила в издательский отдел
6 апреля 1965 г.