4/VI-65

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2073

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.Н. Табаченко

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ $\frac{b}{x^2 \ln x}$ В ТЕОРИИ $g\phi^4$

1965

P-2073

А.Н. Табаченко

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ $\frac{b}{x^2 \ln x}$ В ТЕОРИИ $g\phi^4$

1. В последнее время ряд авторов [1-7] рассматривал в лестничном приближении в теории $g\phi^4$ аналитические свойства амплитуды рассеяния по константе связи g и угловому моменту λ. Амплитуда рассеяния находится с помощью уравнения Бете-Солпитера [4,5,6,7] или исследуется решение уравнения Шредингера с потенциалом, соответствующим определенному классу диаграмм [1,2,3]. Так, в работах [1,2] для потенциала:

$$V(r) = -a\frac{g^2}{r^2} - b\frac{g^3}{r^2}\ln 2mr\,, \qquad a>0,\ b>0\,,$$

отвечающего диаграммам рис. 1 а), в), с) было найдено, что амплитуда рассеяния в λ плоскости имеет неподвижные точки ветвления $\lambda = \pm\sqrt{ag^2 + 0(g^3)}$; а по константе связи в точке $g = 0$ имеет существенную особенность. Аналогичный результат получен в [3], где исследовались аналитические свойства длины рассеяния по g для потенциала:

$$V(r) = \frac{g}{r^2}\ln(R/r) \qquad r<r_0.$$

$$= 0 \qquad r>r_0$$

В указанной работе найдено, что в точке $g=0$ длина рассеяния имеет точку ветвления и существенную особенность типа сгущения полюсов. Точка ветвления корневого типа в λ плоскости получена также в [4] суммированием наиболее сингулярных членов в иттерационном ряду. В работах [5,6,7] рассматривался класс диаграмм рис. 2. Например, Шарап и Домби [7] показали, что потенциал, отвечающий диаграмме рис. 2в, приводит к существенной особенности волновой функции по переменной углового момента λ в точке $\lambda = 0$. Вопрос о том, остается ли эта существенная особенность в амплитуде рассеяния, остался невыясненным.

В настоящей заметке мы рассмотрим в теории $g\phi^4$ аналитические свойства амплитуды рассеяния по $g\,(g\to 0)$ и $\lambda(\lambda\to 0)$ в лестничном приближении, при этом диаграммой наинизшего порядка является диаграмма рис. 2в. Используем метод, предложенный в [1]. В последней работе из квазипотенциального уравнения для парциальной амплитуды рассеяния получено дифференциальное уравнение - релятивистский аналог уравнения Шредингера и найдено соответствующее общее выражение для локального потенциала.

2. Потенциал, отвечающий диаграмме рис. 2в, имеет вид:

$$V(x) = a\frac{g}{x^2 \ln x} \qquad x < x_0 ,$$
$$= 0 \qquad x > x_0 \tag{1}$$

где

$$a = -(2\pi)^2 \gamma(\lambda)$$
$$g > 0$$
$$x_0 < 1$$
$$\gamma(\lambda) = \frac{[\Gamma(\lambda+1)]^2}{(\lambda+\frac{1}{2})[\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})]^2}.$$

Дифференциальное уравнение для введенной в /1/ "волновой функции" $\phi_\lambda(x)$ записывается в форме:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{x^2} + k^2\right]\phi_\lambda(g,k,x) = V(x)\,\phi_\lambda(g,k,x) \tag{2}$$

$\lambda = \ell$ – орбитальный момент[x)],

$$k^2 = \frac{k'^2}{4m^2},$$

k' – волновой вектор, m – масса промежуточной частицы.

Для уравнения (2) имеем следующие граничные условия. При $x \to 0$ решение (2) должно обращаться в нуль. Частное решение (2), удовлетворяющее этому условию, можно найти из интегрального уравнения $(x < x_0)$:

$$\phi'_\lambda(g,k,x) = \psi^{(1)}_\lambda(g,0,x) + \frac{k^2\Gamma\left(1-\frac{ag}{2\lambda}\right)}{2\lambda}\int_0^x [\psi^{(1)\prime}_\lambda(g,0,x)\,\psi^{(2)}_\lambda(g,0,x') -$$
$$-\psi^{(1)}_\lambda(g,0,x')\,\psi^{(2)\prime}_\lambda(g,0,x)]\,\phi'_\lambda(g,k,x')\,dx',$$

где

$$\psi^{(1)}_\lambda(g,0,x) = x^{\lambda+\frac{1}{2}}\,\psi\left(-\frac{ag}{2\lambda}, 0, -2\lambda \ln x\right) \tag{4}$$

$$\psi^{(2)}_\lambda(g,0,x) = x^{\lambda+\frac{1}{2}}(-2\lambda \ln x)\,\Phi\left(1-\frac{ag}{2\lambda}, 2, -2\lambda \ln x\right) \tag{5}$$

и ψ и ϕ вырожденные гипергеометрические функции второго и первого рода, соответственно /8/. При $x \to 0$:

$$\psi^{(1)}_\lambda(g,0,x) \approx x^{\frac{1}{2}+\lambda}(-2\lambda \ln x)^{\frac{ag}{2\lambda}}$$

$$\psi^{(2)}_\lambda(g,0,x) \approx x^{\frac{1}{2}-\lambda}(-2\lambda \ln x)^{-\frac{ag}{2\lambda}}.$$

В области $\mathrm{Re}\,\lambda > \frac{1}{2}$ при $x \to 0$:

$$\psi^{(1)}_\lambda(g,0,x) \to 0$$

$$\psi^{(2)}_\lambda(g,0,x) \to \infty .$$

[x)] Заметим, что "центробежный" член здесь $\frac{\ell^2 - \frac{1}{4}}{x^2}$, а не $\frac{(\ell+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}{x^2}$ как в обычном уравнении Шредингера и $\ell \neq 0$

Другое независимое частное решение, которое ведет себя в начале как $\psi^{(2)}_{\lambda}(g,0,x)$ при целых λ в точке $x=0$ обращается в ∞. Поэтому в области $x<x_o$ мы рассматриваем следующее решение уравнения (2):

$$\phi_{\lambda}(g,kx) = \text{const}\, \phi'_{\lambda}(g,k,x)\,.$$

Граничное условие на ∞ имеет вид:

$$\phi_{\lambda}(g,kx)\Big|_{x\to\infty} \sim \frac{\sin\left(kx-\frac{\ell'\pi}{2}\right)}{k} - \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{k^2}\,\frac{1}{\sqrt{k^2+m^2}}\, A_{\lambda}(g,k,x_o)\, e^{i\left(kx-\frac{\ell'\pi}{2}\right)}, \quad (6)$$

где $\ell'=\lambda-\frac{1}{2}$, причем $A_{\lambda}(g,k,x_o)$ *) – релятивистская амплитуда рассеяния, совпадающая с $A_{\lambda}(g,p,p',x_o)$ при $p=p'=k$. Последняя удовлетворяет релятивистскому уравнению Липпмана-Швингера /1/. Условие (6) легко получить, если учесть связь между p представлением $\phi_{\lambda}(x)$ и $A_{\lambda}(g,p,k,x_o)$ /1/. Решения Йоста в области $x>x_o$ берем в форме:

$$g_{\lambda}(g,k,x) = \left(\tfrac{1}{2}\pi k^{-1}x\right)^{1/2} J_{\lambda}(kx)$$

$$f_{\lambda}(g,-k,x) = \left(\tfrac{1}{2}\pi kx\right)^{1/2} i H^{(1)}_{\lambda}(kx),$$

где J_{λ} и $H^{(1)}_{\lambda}$ – функции Бесселя и Ханкеля. Отсюда обычным образом получим:

$$A_{\lambda}(g,k,x_o) = \frac{2k}{\pi i}\sqrt{k^2+m^2}\,\frac{k\,J'_{\lambda}(kx_o)+B_{\lambda}(g,k,x_o)J_{\lambda}(k,x_o)}{k\,H^{(1)\prime}_{\lambda}(kx_o)+B_{\lambda}(g,k,x_o)\,H^{(1)}_{\lambda}(kx_o)} \quad (7)$$

и

$$B_{\lambda}(g,k,x_o) = \frac{1}{2x_o} - \frac{\phi'_{\lambda}(g,k,x)'_x}{\phi'_{\lambda}(g,k,x)}\Big|_{x=x_o}.$$

3. Для случая $x_o<<1$ при малых g находим:

$$B_{\lambda}(g,k,x_o) = -\frac{1}{x_o}\left[\lambda + \frac{ag}{2\lambda\,\ell n\, x_o} + 0(g^2)\right].$$

Величина $0(g^2)$ включает только степени g. Полученный ряд для $B_{\lambda}(g,k,x_o)$ не является асимптотическим рядом, так как $\psi\left(-\frac{ag}{2\lambda}, b, -2\lambda\,\ell n\,x\right)$ аналитична по g и уравнение (3), определяющее ϕ'_{λ}, есть уравнение Вольтерра. Таким образом, $A_{\lambda}(g,k,x_o)$ не имеет особенности по g в точке $g=0$. При $k^2=0$ это также следует из (8) (см. ниже). Заметим, что рассматриваемый потенциал не удовлетворяет условию:

$$\int_0^a x\,|V(x)|\,dx < \infty\,,$$

и след ядра, соответствующего интегрального уравнения, расходится.

Рассмотрим величину $f_{\lambda}(g,x_o)$

$$f_{\lambda}(g,x_o) = \lim_{k^2\to 0}\left\{\frac{A_{\lambda}(g,k,x_o)}{k^{2\lambda+2}}\right\} = 2\left(\frac{x_o}{2}\right)^{2\lambda}\frac{1}{\lambda[\Gamma(\lambda)]^2}\left[1-\frac{\psi\left(-\frac{ag}{2\lambda},0,-2\lambda\,\ell n\,x\right)}{\psi\left(-\frac{ag}{2\lambda},1,-2\lambda\,\ell n\,x\right)}\right]. \quad (8)$$

---

x) $A_{\lambda} = -\frac{2k\sqrt{k^2+m^2}}{\pi}\, e^{i\delta_e}\sin\delta_e$

В области $|\lambda| \ll 1$ используем разложение вырожденной гипергеометрической функции $\psi(a,b,z)$ при целых b :

$$\psi(a,b,z) = \frac{e^{\frac{1}{2}z}}{\pi} (-1)^{b} z^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}b} k^{\frac{1}{2}} \Gamma(k) \sin a\pi \left[\mathrm{const} + 0(\lambda) + 0(\lambda \ln \lambda) \right], \tag{9}$$

где

$$k = \tfrac{1}{2} b - a$$

$$|\arg z| < \pi .$$

Формулу (9) легко получить из представления $\psi(a,b,z)$ в виде ряда для целых b /8/. Тогда $f_{\lambda}(g, x_o)$ запишется следующим образом:

$$f_{\lambda}(g, x_o) = 2\left(\frac{x_o}{2}\right)^{2\lambda} \lambda \left[1 + \lambda \alpha \right]. \tag{10}$$

где

$$\alpha = \mathrm{const}(g, x_o)\{ 1 + 0(\lambda) + 0(\lambda \ln \lambda) \}.$$

Аналитические свойства амплитуды рассеяния с $k^2 = 0$ в области $|\lambda| \ll 1$ непосредственно следуют из (10) и (8) с учетом свойств функции $\psi(a,b,z)$ /8/. В указанной области амплитуда рассеяния имеет логарифмическую точку ветвления при $\lambda = 0$. Волновая функция в точке $\lambda = 0$ содержит логарифмическую точку ветвления и существенно особую точку, что следует из (3), (4), (9).

4. Рассмотренный выше пример показывает, что потенциал вида (1) приводит к неаналитической зависимости релятивистской амплитуды рассеяния от комплексного углового момента λ. Замена ядра рис. 1 в) ядром рис. 2 в) в соответствующем интегральном уравнении существенно меняет аналитические свойства амплитуды рассеяния по константе связи. Наличие существенной особенности по λ у волновой функции уравнения типа Шредингера еще не означает, что эта особенность остается в амплитуде рассеяния. С очевидными изменениями приведенные выше результаты справедливы для обычного нерелятивистского уравнения Шредингера с потенциалом вида (1). Конечно, нет оснований считать, что характер асимптотики потенциала для $x \to 0$ более правилен в рассмотренном нами случае, чем асимптотика, определяемая диаграммами рис. 1, так как в асимптотику потенциала дают существенный вклад и диаграммы других классов. Правильная асимптотика определяется суммой всех диаграмм и представляется рядом:

$$V(x)\Big|_{x \to 0} = \frac{bg}{x^2} + \frac{g^{2 \cdot\cdot}}{x^2} \left[a_0 + a_1 y + \ldots \right]$$

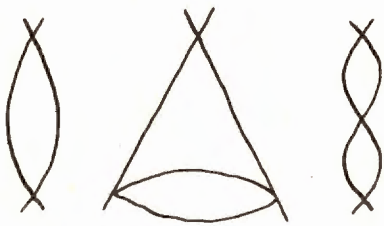
$$y = g \ln x .$$

Автору приятно выразить благодарность А.Т. Филиппову за постоянное внимание к работе и предложенную тему.

Литература

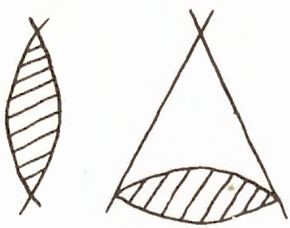
1. А.Т. Филиппов. Препринт ОИЯИ Р-1493, Дубна, 1963.
2. B.A.Arbuzov, A.T.Filippov, O.A.Khrustalev. Phys. Lett. 8, 205 (1964).
3. F.Calogero and M.Cassandro. Nuovo Cim., 34, 1713 (1964).
4. R.F.Sawyer. Phys. Rev., 131, 1384 (1963).
5. J.Kwiechinski and P.Suranyi. Phys. Lett., 9, 283 (1964).
6. P.Y.Pac. Prog. Theor. Phys., 30, 201 (1963).
7. I.M.Charap and N.Dombey. Phys. Lett., 9, 210 (1964).
8. L.J.Slater. Confluent Hypergeometric Functions. Cambridge University Press, 1960.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 марта 1965 г.



a) b) c)

Рис. 1.



a) b)

Рис. 2.