ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2066

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Д.Стоянов, В.П.Шелест

О РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ
II

1965

P-2066

Д.Стоянов, В.П.Шелест

О РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

II

§ 1. Введение

Настоящая работа является продолжением работ [1-3], где рассматривалась релятивистская задача трех тел. В этих работах из трехчастичного уравнения для гриновой функции типа Бете–Солпитера в случае парных взаимодействий была получена система уравнений, выражающая трехчастичную гриновую функцию только через двухчастичные амплитуды рассеяния вне массовой поверхности. В нерелятивистском пределе эти уравнения сводятся к уравнениям Фаддеева [4].

Был указан метод получения матричных элементов S –матрицы для всевозможных трехчастичных процессов. В частности, в работе [3] указана возможность введения некоторых операторов перехода, через матричные элементы которых выражаются матричные элементы S –матрицы. Были получены уравнения для этих операторов и связь между ними.

В настоящей работе, используя уравнения для операторов перехода, мы получим систему уравнений для матричных элементов амплитуд рассеяния. В частности, рассмотрены приближения для трехчастичных амплитуд рассеяния, которые, по-видимому, соответственно пригодны для случаев сильной и слабой связи внутри двухчастичных связанных состояний.

В §2 рассмотрена кинематика трехчастичной задачи и приведены основные результаты некоторых предыдущих работ.

В § 3 рассматривается приближение (импульсное), которое применимо для случая слабой связи внутри двухчастичных связанных состояний.

В § 4 получено выражение для двухчастичной функции Грина, удобное для вывода основных уравнений, которые получены в § 5. Там же рассмотрено полюсное приближение.

§ 2. Постановка задачи и кинематика

Как и в предыдущих работах, будем рассматривать три релятивистские частицы с разными массами m_i , m_j , m_k, координаты которых в координатном и импульсном представлениях соответственно обозначим x_i , x_j , x_k и p_i , p_j , p_k. Будем считать, что между частицами существует лишь парное взаимодействие, что позволит нам пользоваться результатами предыдущих работ.

Нам будет удобно пользоваться координатами Якоби в x –представлении и сопряженными с ними импульсами. Выберем в качестве i –й двухчастичной подсистемы частицы j и k . Тогда, вводя обозначения

$$\mu_k^{(i)} = \frac{m_k}{M_i}\ ; \quad \mu_j^{(i)} = \frac{m_j}{M_i}\ ;$$

$$M_i = m_j + m_k\ ; \qquad M = m_i + m_j + m_k\ , \tag{2.1}$$

можно записать сначала координаты Якоби i-й двухчастичной подсистемы

$$\begin{aligned} X_i &= \mu_k^{(i)} x_k + \mu_j^{(i)} x_j \\ \bar{x}_i &= x_j - x_k \\ x_i &= x_i \end{aligned} \tag{2.2}$$

и соответственно сопряженные импульсы:

$$\begin{aligned} P_i &= p_j + p_k\ , \\ \bar{p}_i &= \mu_k^{(i)} p_j - \mu_j^{(i)} p_k\ , \\ p_i &= p_i\ . \end{aligned} \tag{2.3}$$

Введем теперь i-ю трехчастичную систему координат Якоби, определенную следующим образом:

$$\begin{aligned} X &= (M_i X_i + m_i x_i)\frac{1}{M}\ , \\ \tilde{x}_i &= X_i - x_i\ , \\ \bar{x}_i &= \bar{x}_i \end{aligned} \tag{2.4}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} P &= P_i + p_i\ , \\ \tilde{p}_i &= (m_i P_i - M_i p_i)\frac{1}{M}\ , \\ \bar{p}_i &= \bar{p}_i \end{aligned} \tag{2.5}$$

Импульсы (2.3) выражаются через импульсы (2.5) следующим образом:

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{M_i}{M} P + \tilde{p}_i\ , \\ \bar{p}_i &= \bar{p}_i\ , \\ p_i &= \frac{m_i}{M} P - \tilde{p}_i\ . \end{aligned} \tag{2.6}$$

В формулах (2.2) - (2.6) индексы i, j, k различны и принимают значения 1,2,3. Конкретный выбор трехчастичной системы координат будет определяться ее удобством для данной задачи; так, если в трехчастичной системе имеется i-е связанное двухчастичное состояние, то наиболее удобно выбрать такую систему координат, в которой выделена i-я двухчастичная подсистема.

Напомним теперь некоторые результаты работы /3/. Нами была получена следующая формула для матричных элементов амплитуд рассеяния:

$$T_{ij} = (\overset{+}{\chi}_{(i)}\ (K - K_i)\chi^{o}_{(j)}\ )\ , \tag{2.7}$$

где K_i –парные ядра уравнения Бете–Солпитера[2], $K = \sum_{i=1}^{3} K_i$, $\chi^{\circ}_{(j)}$ – решение двухчастичного уравнения Бете–Солпитера для j –й двухчастичной подсистемы и j –й свободной частицы, а $\overset{+}{\chi}_{(i)}$ – решение уравнений (3.24) работы[1] .

Из работы[3] видно, что элементы S –матрицы выражаются через T_{ij} следующим образом:

$$S_{ij} = \delta_{(i)(j)} + T_{ij} . \tag{2.8}$$

Было показано, что, формально решая уравнение для $\overset{+}{\chi}_{(i)}$ и подставляя это решение в (2.7), получим

$$T_{ij} = \overset{+}{\chi}{}^{\circ}_{(i)} \; M_{ij} \; \chi^{\circ}_{(j)} , \tag{2.9}$$

где

$$M_{ij} = \sum_{\alpha \neq i} K_{\alpha} + \sum_{\substack{\alpha \neq i \\ \beta \neq j}} K_{\alpha}\, g\, K_{\beta} . \tag{2.10}$$

Здесь g –полная трехчастичная функция Грина. В этой работе мы ограничимся рассмотрением только M_{ij} , определенных формулой (2.10), которые были обозначены в[3] через M^{+}_{ij} , поскольку использование операторов второго вида M^{-}_{ij} не дает нам пока ничего принципиально нового.

Используя уравнения для функции Грина g , можно сразу получить уравнения для M_{ij} (ур. 2.9 в работе[3])

$$M_{ij} = \sum_{\alpha \neq i} K_{\alpha} + \sum_{\beta \neq j} M_{i\beta}\, g_{\beta}\, K_{\beta} . \tag{2.11}$$

Как было нами отмечено раньше, операторы M_{ij} можно определить также посредством следующих соотношений :

$$g_i M_{ij} g_j = g_i (K - K_i) g = g (K - K_j) g_j , \tag{2.12}$$

$$g_i = g_0 + g_0 K_i g_i . \tag{2.13}$$

Из (2.12) видно, что

$$g_i M_{ij} g_j = g_i M_{ik} g_k \tag{2.14}$$

Таким образом определенные M_{ij} не зависят фактически от второго индекса, что указывает на некоторую связь между M_{ij} , для разных j . Из (2.14) следует, что уравнение (2.11) можно переписать в виде:

$$M_{ij} = K - K_i + M_{i\beta}\, g_{\beta} (K - K_j) . \tag{2.15}$$

Так как левая часть этого уравнения не зависит от β , в правой части можно фиксировать β произвольным образом. Так, полагая $\beta = j$, получим

$$M_{ij} = K - K_i + M_{ij}\, g_j\, (K - K_j)\ . \tag{2.16}$$

Таким образом, мы смогли получить систему несвязанных уравнений для всех M_{ij} .

Фиксируя β некоторым другим способом, можно получить соотношения, в которых все M_{ij} выражаются через некоторые из них. Так, например, полагая $\beta = 0$, получим выражение для всех M_{ij} через M_{i0} . Итак, мы показали, что из операторов M_{ij} можно тем или иным образом выбрать независимую систему операторов, через которые выражаются остальные операторы. Теперь покажем, что этих независимых операторов достаточно для построения матричных элементов амплитуд для всех процессов. Тем самым мы конкретизируем систему независимых операторов. Перепишем уравнение (2.14) в виде:

$$g_i\, M_{ij}\, g_j = g_i\, M_{i0}\, g_0\ . \tag{2.17}$$

Устремляя начальные и конечные временные аргументы g_i и g_j соответственно к $-\infty$ и $+\infty$ и учитывая, что в начальном состоянии у нас имеются три свободные частицы, получим:

$$\overset{+}{\chi}{}^{o}_{(i)}\ M_{ij}\ \chi^{o}_{(j)} = \overset{+}{\chi}{}^{o}_{(i)}\ M_{i0}\ \chi^{oo}_{(j)} \tag{2.18}$$

где $\chi^{\infty}_{(j)}$ –волновая функция трех свободных частиц. Сравнивая (2.18) с (2.9) для $j = 0$, получим

$$T_{i0} = \overset{+}{\chi}{}^{o}_{(i)}\, M_{i0}\ \chi^{oo}_{(j)} = \overset{+}{\chi}{}^{o}_{(i)}\ M_{ij}\ \chi^{o}_{(j)}\ . \tag{2.19}$$

Таким образом, знания операторов $M_{ij}\,(j \neq 0)$ достаточно для построения T_{i0} , поэтому операторы M_{i0} оказываются излишними.

Рассматривая аналогичным образом операторы $\overset{-}{M}_{ij}$, введенные в /3/, можно исключить из рассмотрения также и операторы M_{0i}. Поскольку в настоящей работе мы ограничились рассмотрением только операторов $\overset{+}{M}_{ij}$, в наших уравнениях не будут появляться величины T_{0i} , и поэтому мы не будем обсуждать исключение M_{0i} .

В дальнейшем оказывается, что можно получить два связанных уравнения для T_{ii} и T_{i0} , исходя только из уравнения (2.15) для $\beta = i = j$. Поскольку в рамках наших рассмотрений эти две величины полностью описывают систему из трех тождественных частиц, мы ограничимся этим случаем. Нам понадобится выражение для g_i, входящего в уравнение (2.15). Как было показано раньше;

$$g_i(x_i x_k x_e y_i y_k y_e) = S_i\,(x_i - y_i)\ \hat{g}_i\,(x_k x_e y_k y_e), \tag{2.20}$$

где $\hat{g}_i(x_k x_e y_k y_e)$– функция Грина i –й двухчастичной подсистемы, удовлетворяющая двухчастичному уравнению Бете–Солпитера, $S_i\,(x_i - y_i)$– гриновая функция "голой" частицы. Значок $\hat{}$ будет обозначать, что данная величина является двухчастичной.

§ 3. Импульсное приближение

В предыдущем параграфе были выписаны уравнения для операторов M_{ij}; например, для оператора перехода M_{11} уравнение имеет вид:

$$M_{11} = K_2 + K_3 + M_{11} g_1 (K_2' + K_3) . \qquad (3.1)$$

Рассмотрим приближение к этому уравнению, положив $g_1 = g_0$. Тем самым мы пренебрежем взаимодействием внутри связанного состояния. Формальное решение уравнения (1) для нашего приближения имеет вид:

$$M_{11} = (K_2 + K_3)(1 - g_0(K_2 + K_3))^{-1} \qquad (3.2)$$

Выражения типа $(1 + A)^{-1}$ следует понимать в следующем смысле

$$(1 + A)^{-1} \equiv 1 - A + A A - \ldots + (- 1)^n \underbrace{A \ \ldots \ A}_{n \text{ раз}} + \qquad (3.3)$$

Учитывая, что

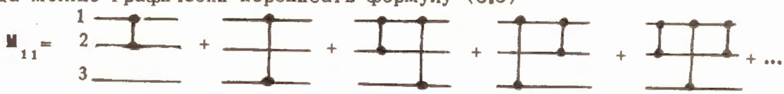
$$K_i = T_i (1 + g_0 T_i)^{-1} , \quad T_i = S_i^{-1} \hat{T}_i ,$$
$$\int S_i^{-1} (x - z) S_i (z - y) dz = \delta (x - y) . \qquad (3.4)$$

получим для M_{11}

$$M_{11} = \sum_{\substack{n=1 \\ i \neq k = 2,3}}^{\infty} \underbrace{T_i \ g_0 T_k \ g_0 T_i \ldots}_{n} \qquad (3.5)$$

Будем обозначать двухчастичную амплитуду рассеяния i -й и j -й частиц как

Тогда можно графически переписать формулу (3.5)



(3.6)

Таким образом, разложение (3.6) представляет собой фактически разложение по кратности взаимодействия (а не в ряд теории возмущений). Так, например, первые два члена соответствуют однократному рассеянию налетающей частицы на каждой из частиц, образующих связанное состояние, вторые два – последовательному рассеянию сначала на одной и затем на другой частице и т.д.

Особый интерес представляет случай, когда можно пренебречь многократными рассеяниями. Этот случай, например, имеет место для рассеяния нуклона на дейтроне при энергиях нуклона порядка $\geq$ 100 Мэв в системе центра масс дейтрона. Тогда

$$M_{11} = T_2 + T_3 . \qquad (3.7)$$

Отсюда можно получить выражения для амплитуд, описывающих процессы рассеяния на связанном состоянии с распадами и без них, а также рассеяния с образованием и без образования связанного состояния.

Заметим, что рассмотренное приближение является непосредственным аналогом импульсного приближения[5].

Наше исходное уравнение (3.1) можно модифицировать, замечая, что

$$g_1 = g_0 + g_0 T_1 g_0 . \tag{3.8}$$

Подставляя (3.8) в (3.1) получим:

$$M_{11} = K_2 + K_3 + M_{11} g_0 (K_2 + K_3) + M_{11} g_0 T_1 g_0 (K_2 + K_3) \tag{3.9}$$

Будем итерировать это уравнение, подставляя в каждом порядке итерации выражение (3.9) вместо M_{11} только в те члены правой части, которые не содержат T_1. Имеем:

$$\begin{aligned} M_{11} = {} & K_2 + K_3 + (K_2 + K_3) g_0 (K_2 + K_3) + \ldots + \\ & + M_{11} g_0 T_1 g_0 [(K_2 + K_3) + (K_2 + K_3) g_0 (K_2 + K_3) + \ldots] . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Вводя обозначения

$$V_{11} = K_2 + K_3 + (K_2 + K_3) g_0 (K_2 + K_3) + \ldots , \tag{3.11}$$

мы можем выписать следующие уравнения для M_{11} и V_{11}:

$$M_{11} = V_{11} + M_{11} g_0 T_1 g_0 V_{11} , \tag{3.12}$$

$$V_{11} = K_2 + K_3 + V_{11} g_0 (K_2 + K_3) = K_2 + K_3 + (K_2 + K_3) g_0 V_{11} . \tag{3.13}$$

Из уравнения (3.13) видно, что V_{11} совпадает с выражением для M_{11}, определенным формулой (3.2), т.е. с M_{11} без учета взаимодействия между частицами 2 и 3, и выражается рядом (3,5). Тогда уравнение (3.12) может быть использовано для получения поправок к нашему приближению, которые учитывают взаимодействие частиц 2 и 3. Видно, например, что если положим $T_1 = 0$, то получим нулевое приближение, т.е. V_{11}. Можно, далее, получить первое приближение, которым мы здесь и ограничимся.

$$M_{11} = V_{11} + V_{11} g_0 T_1 g_0 V_{11} . \tag{3.14}$$

Таким образом, подставляя в (3.14) ряд (3.5) для V_{11}, получим некоторый ряд, являющийся разложением по кратности взаимодействия между частицами 1,2 и 1,3. Если мы снова ограничимся первым порядком по кратности взаимодействия, то получим формулу (3.7). Следовательно, в нашей интерпретации кратности взаимодействия, однократное взаимодействие исключает возможность учета взаимодействия частиц 2 и 3.

Для учета этого взаимодействия необходимо по меньшей мере рассматривать и двукратное взаимодействие. Тогда имеем

$$M_{11} = T_2 + T_3 + T_2 g_0 T_3 + T_3 g_0 T_2 + (T_2 + T_3) g_0 T_1 g_0 (T_2 + T_3). \quad (3.15)$$

Равенство (3.15) является импульсным приближением для M_{11} с учетом поправки первого порядка по взаимодействию 2,3.

Если же T_1 не предполагается малым, то можно снова воспользоваться разложением по кратности взаимодействия (учитывая и взаимодействие 2,3 на равных правах со взаимодействиями 1, 3 и 1, 2). Тогда T_1 учтется лишь в третьем порядке по кратности взаимодействия:

$$M_{11} = T_2 + T_3 + T_2 g_0 T_3 + T_3 g_0 T_2 + T_2 g_0 T_3 g_0 T_2 + T_3 g_0 T_2 g_0 T_3 + \\ + (T_2 + T_3) g_0 T_1 g_0 (T_2 + T_3) . \quad (3.16)$$

Рассмотрим теперь случай тождественных частиц. Если берем импульсное приближение, т.е. $g_1 = g_0$, то в ряде (3.5) мы должны отбросить все члены порядка больше двух. Действительно, мы пренебрегаем величиной T_1 , но во всех членах ряда порядка > 2 мы, в силу тождественности частиц, должны считать члены n -го порядка, содержащие T_1 (как это имеет место в точном решении) и не содержащие T_1, - одного порядка. Поэтому, пренебрегая T_1 , мы должны пренебречь всеми членами n -го порядка $(n > 2)$.

§ 4. Двухчастичная функция Грина

Мы будем различать два типа возможных состояний двухчастичной системы - состояния рассеяния и связанные состояния. В двухчастичной системе центра масс первые из них обладают непрерывным спектром полной энергии, а вторые - дискретным. В произвольной системе координат полная энергия E_i состояний рассеяния равняется $\sqrt{\vec{p}_j^{\,2} + m_j^2} + \sqrt{\vec{p}_k^{\,2} + m_k^2}$, в то время как энергия связанного состояния $E_i^n = \sqrt{(\vec{p}_j + \vec{p}_k)^2 + \mu_n^{i\,2}}$, где μ_n - масса связанного состояния. Поскольку существует неравенство

$$\mu_n^i < m_j + m_k , \quad (4.1)$$

то очевидно, что для одинаковых импульсов, входящих в выражения для E_i и E_i^n , можно написать

$$E_i^n < E_i . \quad (4.2)$$

Этот факт позволяет получить удобное выражение для свободной двухчастичной гриновой функции $\hat{g}_0(x_k x_e y_k y_e)$. Эту функцию в координатах (2.2) и (2.3) представим в виде:

$$\hat{g}_0(X_i - Y_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i) = \int \phi_{P_i \bar{p}_i}(\bar{x}_i)\, \hat{g}_0(P_i \bar{p}_i)\, \overset{+}{\phi}_{P_i \bar{p}_i}(\bar{y}_i)\, e^{-iP_i(X_i - Y_i)}\, dP_i\, d\bar{p}_i \quad (4.3) ,$$

где ,

$$\overset{+}{\phi}_{P_i \bar{p}_i}(\bar{x}_i) = (\phi_{P_i \bar{p}_i}(\bar{x}_i))^{+} \simeq e^{-i \bar{p}_i \bar{x}_i} , \quad (4.4)$$

$$\hat{g}_0(P_i \bar{p}_i) \sim \frac{1}{[(\mu_j^{(1)} P_i + \bar{p}_i)^2 - m_j^2 + i\epsilon)][(\mu_k^{(1)} P_i - \bar{p}_i)^2 - m_k^2 + i\epsilon]} . \quad (4.5)$$

Легко проверить, что в силу (4.2) полюса подынтегрального выражения (4.3) не совпадают с энергией связанных состояний. Поэтому выражение:

$$\int d\vec{P}_i \int_{E_i^n - \eta}^{E_i^r + \eta} (\phi_{P_i \bar{p}_i}\, \hat{g}_0(P_i \bar{p}_i)\, \overset{+}{\phi}_{P_i \bar{p}_i}(\bar{y}_i)\, d\bar{p}_i)\, e^{-iP_i(X_i - Y_i)}\, d\bar{p}_{10} \to 0 , \quad (4.6)$$

когда $\eta \to 0$.

Вычитая (4.6) из выражения для $\hat{g}_0$ (4.3), получим:

$$\hat{g}_0(X_i - Y_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i) = P_{10}(E_i^n) \int \phi_{P_i \bar{p}_i}(\bar{x}_i)\, \hat{g}_0(P_i \bar{p}_i)\, \overset{+}{\phi}_{P_i \bar{p}_i}(\bar{y}_i)\, e^{-iP_i(X_i - Y_i)}\, dP_i\, d\bar{p}_i , \quad (4.7)$$

где $P_{10}(E_i^n)$ означает, что интеграл по P_{10} берется в смысле главного значения во всех точках, отвечающих энергиям связанных состояний. Вводя частный фурье-образ

$$\hat{g}_0(P_i \bar{x}_i \bar{y}_i)\, \delta(P_i - P_i') = \int \hat{g}_0(X_i - Y_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i)\, e^{iP_i X_i}\, e^{-iP_i' Y_i}\, dX_i\, dY_i , \quad (4.8)$$

получаем, что

$$\hat{g}_0(P_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i) = \begin{cases} \int \phi_{P_i \bar{p}_i}(\bar{x}_i)\, \hat{g}_0(P_i \bar{p}_i)\, \phi_{P_i \bar{p}_i}(\bar{y}_i)\, d\bar{p}_i , & P_{10} \neq E_i^n ; \\ 0 , & P_{10} = E_i^n . \end{cases} \quad (4.9)$$

Уравнение Бете-Солпитера запишем в виде:

$$\hat{g}(P_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i) = \hat{g}_0(P_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i) + \frac{1}{(2\pi)^8} \int \hat{g}_0(P_i \bar{x}_i, \bar{u}_i) K_i (P_i, \bar{u}_i, \bar{v}_i) \times \hat{g}(P_i \bar{v}_i \bar{y}_i)\, d\bar{u}_i\, d\bar{v}_i . \quad (4.10)$$

В силу (4.9) это уравнение является неоднородным только в случае $P_{10} \neq E_i^n$. Поэтому рассмотрим сначала этот случай. Аналогично (4.9) для $\hat{g}(P_i \bar{x}_i \bar{y}_i)$ положим:

$$\hat{g}(P_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i) = P(E_i^n) \int f_{P_i \bar{p}_i}(\bar{x}_i)\, \hat{g}_0(P_i \bar{p}_i)\, \overset{+}{\phi}_{P_i \bar{p}_i}(\bar{y}_i)\, d\bar{p}_i \quad (4.11)$$

Подставляя (4.11) в (4.10), получаем уравнение для $f_{P_i \bar{p}_i}(\bar{x}_i)$

$$f_{P_i \bar{p}_i}(\bar{x}_i) = \phi_{P_i \bar{p}_i}(\bar{x}_i) + \frac{1}{(2\pi)^8} \int \hat{g}_0(P_i \bar{x}_i \bar{u}_i) K_i (P_i \bar{u}_i \bar{v}_i)\, f_{P_i \bar{p}_i}(\bar{v}_i)\, d\bar{u}_i\, d\bar{v}_i , \quad (4.12)$$

и поэтому $f_{P_1\bar{p}_1}(\bar{x}_1)$ является Бете–Солпитеровской волновой функцией, описывающей рассеяние двух частиц. Таким образом, (4.11) является частным решением неоднородного уравнения (4.10). Мы к этому решению прибавим и решение соответствующего однородного уравнения, которое существует только в случае $P_{10} = E_1^n$. Тогда для $\hat{g}$ получаем

$$\hat{g}(P_1\,\bar{x}_1\bar{y}_1) = P(E_1^n)\int f_{P_1\bar{p}_1}(\bar{x}_1)\,\hat{g}_0(P_1\,\bar{p}_1)\,\overset{+}{\phi}_{P_1\bar{p}_1}(\bar{y}_1)\,d\bar{p}_1 + \\ + \sum_n \omega^n_{P_1}(\bar{x}_1)\,\overset{+}{\omega}{}^n_{P_1}(\bar{y}_1)\,\delta(P_1^2-\mu_n'^2)\,\theta(p_{10}), \tag{4.13}$$

$\theta(p_{10})$ выражает тот факт, что в выражении

$$g(x_1\,x_2 y_1\,y_2)\,\Big|_{x_{10}\,x_{20} > y_{10}\,y_{20}} = \sum_a \langle 0|\,T\psi_1(x_1)\,\psi_2(x_2)|\,a\rangle\langle a|\,T\bar{\psi}_1(y_1)\,\bar{\psi}_2(y_2)|\,0\rangle$$

входит полная система векторов состояния $|a\rangle$ с неотрицательными энергиями, причем состояния $|a\rangle$ уже не содержатся в аналогичном выражении в случае обратного соотношения времен. $\omega^n_{P_1}(\bar{x}_1)$ удовлетворяет уравнению Бете–Солпитера для волновой функции связанного состояния:

$$\omega^n_{P_1}(\bar{x}_1) = \frac{1}{(2\pi)^8}\int g_0(P_1\,\bar{x}_1\,\bar{u}_1)\,K_1(P_1\,\bar{u}_1\bar{v}_1)\,\omega^n_{P_1}(\bar{v}_1)\,d\bar{u}_1\,d\bar{v}_1, \tag{4.14}$$

а $\overset{+}{\omega}{}^n_{P_1}(\bar{y}_1)$ удовлетворяет соответствующему сопряженному уравнению.

Здесь сделаем следующее замечание. Фактически уравнение (4.12) совпадает с уравнением Бете–Солпитера для функции рассеяния только на массовых поверхностях рассеивающихся частиц, $E_k = \sqrt{\vec{p}_k^{\,2} + m_k^2}$ и $E_j = \sqrt{\vec{p}_j^{\,2} + m_j^2}$. Так как в (4.12) P_{10} не фиксированное (оно лишь должно не равняться E_1^n), мы будем говорить о $f_{P_1\bar{p}_1}(\bar{x}_1)$ как о функции рассеяния вне массовых поверхностей E_k и E_j (хотя она определена и на этих поверхностях).

Этого нельзя сказать об $\omega^n_{P_1}(\bar{x}_1)$, определенной лишь на массовой поверхности связанного состояния $E_1'^n$. Однако можно заметить, что выражение (4.13) не изменяется при произвольном продолжении $\omega^n_{P_1}(\bar{x}_1)$ и $\overset{+}{\omega}{}^n_{P_1}(\bar{y}_1)$ вне поверхности E_1^n. Оно также не изменяется при произвольном выборе $f_{P_1\bar{p}_1}(\bar{x}_1)$ на этой поверхности. Поэтому мы будем считать, что $\omega^n_{P_1}(\bar{x}_1)$, $\overset{+}{\omega}{}^n_{P_1}(\bar{y}_1)$ и $f_{P_1\bar{p}_1}(\bar{x}_1)$ заданы всюду.

Вводя обозначения

$$\chi^{oo}_{P\,\tilde{p}_1\bar{p}_1}(X\,\tilde{x}_1\bar{x}_1) = e^{-iPX - i\tilde{p}_1\tilde{x}_1}\,\phi_{\frac{M_1}{M}P+\tilde{p}_1,\,\bar{p}_1}(\bar{x}_1), \tag{4.15}$$

$$\chi^{o}_{P\,\tilde{p}_1\bar{p}_1}(X\,\tilde{x}_1\bar{x}_1) = e^{-iPX - i\tilde{p}_1\tilde{x}_1}\,f_{\frac{M_1}{M}P+\tilde{p}_1,\,\bar{p}_1}(\bar{x}_1), \tag{4.16}$$

$$\chi^{n}_{P,\tilde{p}_1}(X,\,\tilde{x}_1,\,\bar{x}_1) = e^{-iPX - i\tilde{p}_1\tilde{x}_1}\cdot\omega^n_{\frac{M_1}{M}P+\tilde{p}_1}(\bar{x}_1), \tag{4.17}$$

можно выписать уже явный вид функции $g_i(X-Y, \tilde{x}_i \bar{x}_i, \tilde{y}_i, y_i)$, заданной равенством (2.20), с использованием формул (4.8) и (4.13)

$$g_i(X-Y, \tilde{x}_i \bar{x}_i \tilde{y}_i \bar{y}_i) = \int \chi^{o}_{P\tilde{p}_i \bar{p}_i}(X, \tilde{x}_i \bar{x}_i) S_i(\frac{m_i}{M} P - \tilde{p}_i) \times$$

$$\times \hat{g}_o(\frac{M_i}{M} P + \tilde{p}_i, \bar{p}_i) \overset{+}{\chi}{}^{oo}_{P\tilde{p}_i \bar{p}_i}(Y \tilde{y}_i \bar{y}_i) d\tilde{p}_i \, d\bar{p}_i + \tag{4.18}$$

$$+\sum_{n'} \int \chi^{n'}_{P\tilde{p}_i}(X \tilde{x}_i \bar{x}_i) S_i(\frac{m_i}{M} P - \tilde{p}_i) \delta([\frac{M_i}{M} P + \tilde{p}_i]^2 - \mu^{i\,2}_{n'}) \times$$

$$\times \Theta(\frac{M_i}{M} P_0 + \tilde{p}_{i0}) \overset{+}{\chi}{}^{n'}_{P\tilde{p}_i}(Y \tilde{y}_i \bar{y}_i) d\tilde{p}_i \quad ,$$

где
$$S_i(p)\delta(p-p') = \frac{1}{(2\pi)^{o}} \int S_i(x-y) e^{i(px-p'y)} \, dx \, dy \quad . \tag{4.19}$$

Введенные формулами (4.15) – (4.17) χ совпадают на соответствующих массовых поверхностях с χ, входящими в формулу (2.9). Поэтому матричные элементы M_{ij}, полученные с помощью формулы (2.9), но с χ, определенными уравнениями (4.15) – (4.17), будут давать матричные элементы амплитуды рассеяния вне массовых поверхностей. Для этих величин мы сохраним обозначение (2.9). Случай перехода на массовые поверхности будем оговаривать особо.

§ 5. Уравнения для T_{ii} и T_{i0}

Теперь мы можем получить уравнения для матричных элементов рассеяния частицы на связанном состоянии T_{ii} и рассеяния трех частиц с образованием двухчастичного связанного состояния T_{i0}. Эти элементы определяются равенствами:

$$T^{nm}_{ii}(P \, \tilde{p}_i \, \tilde{p}'_i) = \int \chi^{n}_{P\tilde{p}_i}(X \, \tilde{x}_i \bar{x}_i) M_{ii}(X-Y, \tilde{x}_i \bar{x}_i \tilde{y}_i \bar{y}_i) \times$$

$$\times \overset{+}{\chi}{}^{m}_{P\tilde{p}'_i}(Y \, \tilde{y}_i \, \bar{y}_i) dX \, dY \, d\tilde{x}_i \, d\tilde{y}_i \, d\bar{x}_i \, d\bar{y}_i \tag{5.1}$$

$$T^{n0}_{i0}(P \, \tilde{p}_i \, \tilde{p}'_i \, \bar{p}'_i) = \int \chi^{n}_{P\tilde{p}_i}(X \, \tilde{x}_i \bar{x}_i) M_{ii}(X-Y, \tilde{x}_i \bar{x}_i \tilde{y}_i \bar{y}_i) \times$$

$$\times \overset{+}{\chi}{}^{o}_{P\tilde{p}'_i \bar{p}'_i}(Y \, \tilde{y}_i \, \bar{y}_i) dX \, dY \, d\tilde{x}_i \, d\tilde{y}_i \, d\bar{x}_i \, d\bar{y}_i \quad .$$

Теперь возмем уравнение (2.15) для случая $\beta = i = j$. Домножим справа и слева соответственно на функции $\overset{+}{\chi}{}^{n}_{P\tilde{p}_i}(X \tilde{x}_i \bar{x}_i)$ и $\chi^{m}_{P\tilde{p}'_i}(Y \tilde{y}_i \bar{y}_i)$ и проинтегрируем по всем x и y; после того, как подставили $g_i(X-Y, \tilde{x}_i \bar{x}_i \tilde{y}_i \bar{y}_i)$ из (4.18), получим:

$$T^{nm}_{ii}(P \, \tilde{p}_i \, \tilde{p}'_i) = \langle K - K_i \rangle^{nm}_{ii}(P, \tilde{p}_i \, \tilde{p}'_i) + \frac{1}{(2\pi)^{12}_{i}} P \int T^{n0}_{i0}(P \, \tilde{p}_i \, \tilde{p}''_i \, \bar{p}''_i] \times$$

$$\times S_i(\frac{m_i}{M} P - \tilde{p}''_i) \hat{g}_0(\frac{M_i}{M} P + \tilde{p}''_i, \bar{p}''_i) \langle K - K_i \rangle^{oo,m}_{ii}(P \, \tilde{p}''_i \, \tilde{p}'_i \, \bar{p}''_i) d\tilde{p}''_i \, d\bar{p}''_i \times \tag{5.3}$$

$$+ \frac{\sum_{n'}}{(2\pi)^{12}_{i}} \int T^{nn'}_{ii}(P \, \tilde{p}_i \, \tilde{p}''_i) \, S_i(\frac{m_i}{M} P + \tilde{p}''_i) \delta[(\frac{M_i}{M} P + \tilde{p}''_i)^2 - \mu^{i2}_{n}] \times$$

$$\times \Theta\left(\frac{M_i}{M} P_0 + \tilde{p}''_{i0}\right) \langle K - K_i \rangle^{n'm}_{i,i} \quad (P, \tilde{p}''_i \; \tilde{p}'_i)\, dp''_i \; . \qquad (5.3)$$

Если слева умножить уравнение (2.15) вместо $\chi^{m}_{P\tilde{p}_i}$, на $\chi^{\circ}_{P\,\tilde{p}_i}(Y \; \tilde{y}_i \; \bar{y}_i)$, то получим:

$$T^{n0}_{i0}(P \; \tilde{p}_i \; \tilde{p}'_i \; \bar{p}'_i) = \langle K - K_i \rangle^{n0}_{ii} (P \; \tilde{p}_i \; \tilde{p}'_i \; \bar{p}'_i) +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^{12} i} P \int T^{n0}_{i0} (P \; \tilde{p}_i \; \tilde{p}''_i \; \bar{p}''_i)\, S_i\left(\frac{m_i}{M} P - \tilde{p}''_i\right) \hat{g}_0 \left(\frac{M_i}{M} P + \tilde{p}''_i, \; \bar{p}''_i\right) \times$$

$$\times \langle K - K_i \rangle^{00,0}_{ii} (P, \tilde{p}''_i \; \tilde{p}'_i \; \bar{p}''_i \; \bar{p}'_i)\, d\tilde{p}''_i \; d\bar{p}''_i + \qquad (5.4)$$

$$+ \frac{\sum_{n'}}{(2\pi)^{12} i} \int T^{nn'}_{ii} (P \; \tilde{p}_i \; \tilde{p}''_i)\, S_i\left(\frac{m_i}{M} P - \tilde{p}''_i\right) \delta\left[\left(\frac{M_i}{M} P + \tilde{p}''_i\right)^2 - \mu^{12}_{n}\right] \times$$

$$\times \theta\left(\frac{M_i}{M} P_0 + \tilde{p}''_{i0}\right) \langle K - K_i \rangle^{n'0}_{ii} (P \; \tilde{p}''_i \; \tilde{p}'_i \; \bar{p}'_i)\, dp''_i \; ,$$

где

$$\langle K - K_i \rangle^{nm}_{ii} (P \; \tilde{p}_i \; \tilde{p}'_i) = \{ \chi^{+n}_{P\tilde{p}_i} (K - K_i)\, \chi^{m}_{P\tilde{p}'_i} \} \; ,$$

$$\langle K - K_i \rangle^{00,m}_{ii} (P \; \tilde{p}_i \; \tilde{p}'_i \; \bar{p}_i) = \{ \chi^{+00}_{P\tilde{p}_i\bar{p}_i} (K - K_i)\, \chi^{m}_{P\tilde{p}'_i} \} \; ,$$

$$\langle K - K_i \rangle^{n0}_{ii} (P \; \tilde{p}_i \; \tilde{p}'_i \; \bar{p}'_i) = \{ \chi^{+n}_{P\tilde{p}_i} (K - K_i)\, \chi^{\circ}_{P\tilde{p}'_i\bar{p}'_i} \} \; , \qquad (5.5)$$

$$\langle K - K \rangle^{00,0}_{ii} (P \; \tilde{p}_i \; \tilde{p}'_i \; \bar{p}_i \; \bar{p}'_i) = \{ \chi^{00}_{P\tilde{p}_i\bar{p}_i} (K - K_i)\, \chi^{\circ}_{P\tilde{p}'_i\bar{p}'_i} \} \; .$$

Фигурные скобки означают интегрирования по всем соответствующим переменным. В предыдущем параграфе мы обсудили произвол в выборе величин $\omega^{n}_{P_i}$ и $f_{P_i\bar{P}_i}$ из уравнения (4.13). Этот произвол сказывается и на уравнениях (5.3) –(5.4), так как в соответствии с формулами (5.5) величины ω и f входят в определение матричных элементов K_i. Однако нетрудно заметить, что произвол можно устранить еще в самых уравнениях (5.3) – (5.4) до их решения. В самом деле ,для этого достаточно устремить в (5.3) начальные и конечные импульсы на соответствующие массовые поверхности, а в (5.4) устремить на массовую поверхность только конечный импульс. При этом в уравнениях (5.3) и (5.4) будут входить одинаковые величины, а именно – амплитуда рассеяния

T_{11} на массовой поверхности и начального состояний и амплитуда образования T_{10}, взятая на массовой поверхности конечного состояния (первый индекс). Можно было бы с самого начала для получения уравнения (5.3) ограничиться той частью гриновой функции, которая соответствует распространению только связанных состояний; именно, вместо (4.13) будем иметь:

$$\hat{g}_1 (P_1 \bar{x}_1 \bar{y}_1) = \sum_n \omega^n_{P_1} (\bar{x}_1) \overset{+}{\omega}{}^n_{P_1} (\bar{y}_1) \delta^+ \left(P_{10} - \sqrt{\vec{p}_1^{\,2} + \mu_n^{\prime 2}}\right) . \qquad (5.6)$$

Тогда вместо (5.3) получим

$$T_{11}^{nm} (P \; \tilde{p}_1 \; \tilde{p}'_1) = \langle K - K_1 \rangle_{11}^{nm} (P \; \tilde{p}_1 \; \tilde{p}'_1) + \frac{\sum_{n'}}{2\pi \; (2\pi)^{12}} \int T_{11}^{nn'} (P \; \tilde{p}_1 \; \tilde{p}''_1) \times$$

$$\times \frac{S\left(\frac{m_1}{M} P + \tilde{p}''_1\right) \langle K - K_1 \rangle_{11}^{n'm} (P \; \tilde{p}''_1 \; \tilde{p}'_1)}{\frac{M_1}{M} P_0 + \tilde{p}''_{10} - \sqrt{\left[\frac{M_1}{M} \vec{P} + \vec{p}''_1\right]^2 + \mu_n^{\prime 2}} + i\epsilon} \, d\tilde{p}''_1 . \qquad (5.7)$$

Это уравнение совпадает с многоканальным двухчастичным уравнением Липпмана-Швингера, где одна из частиц является двухчастичным связанным состоянием. Уравнение (4.4) в этом приближении остается неизменным; надо лишь подставить в него T_{11}, взятое из (5.7).

Таким образом, мы получили простые приближенные уравнения для T_{11} и T_{10}, которые, по-видимому, можно будет применять для случая сильной связи внутри связанных состояний.

В заключение мы хотим выразить благодарность Н.Н.Боголюбову, А.А.Логунову, А.Н.Тавхелидзе и И.Т.Тодорову за интерес к работе и ценные обсуждения.

Литература

1. Д.Стоянов. Препринт ОИЯИ, Р-1777, Дубна, 1964.
2. D.Stoyanov, A.N.Tavkhelidze. Phys. Lett., 13, No.1 (1964).
3. V.P.Shelest, D.Stoyanov. Phys. Lett., 13, 253 (1964).
4. Л.Д.Фаддеев. ЖЭТФ, 39, вып. 5(11) 1459 (1960).
5. G.Chew. Phys. Rev., 80, 196 (1950).

Рукопись поступила в издательский отдел
19 марта 1965 г.