

К-138

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна 1965

P - 2061



ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.Г. Кадышевский, Р.М. Мурадян, Я.А. Смородинский

$SU(6)$ -СИММЕТРИЯ В СИЛЬНЫХ
И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

1965

P - 2061

В.Г. Кадышевский, Р.М. Мурадян, Я.А. Смородинский

$SU(6)$ -СИММЕТРИЯ В СИЛЬНЫХ
И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

3120/7
чр.

С о д е р ж а н и е

	Стр.
§ 1. В в е д е н и е	3
§ 2. Представления группы SU(3)	6
§ 3. Массовые формулы в SU(3)	10
§ 4. Магнитные моменты и электромагнитное расщепление масс в SU(3)	13
§ 5. SU(6) -симметрия в пространстве спин-унитарный спин	18
§ 6. Неприводимые представления группы SU(6)	24
§ 7. Мезонный 35-плет	29
§ 8. Барионный 56-плет	33
§ 9. Массовые формулы в SU(6)	37
§ 10. Магнитные моменты в SU(6)	44
§ 11. Электромагнитное расщепление масс 56-плета	48
§ 12. З а к л ю ч е н и е	48
Л и т е р а т у р а	52-53
П р и л о ж е н и я	54

§ 1. В в е д е н и е

Успехи теории унитарной симметрии SU(3) заметно усилили интерес к поискам группы симметрии элементарных частиц.

Естественно, что на очередь дня встал вопрос об учете спина частиц. Теория SU(3) оставляла без внимания спиновую зависимость ядерных взаимодействий, а потому могла обнаружить закономерности лишь внутри мультиплетов с заданным спином. Однако еще в 1937 году в теории ядерных сил Вигнером^{1/} был предложен вариант классификации термов, исходящий из приближения, в котором силы считались независимыми как от спина, так и от заряда частиц (симметрия SU(4)). Эта теория не увенчалась успехом, так как в ядре спин-орбитальное взаимодействие оказалось настолько велико, что даже в самых легких ядрах отделение спина от орбиты (схема LS-связи) было недопустимой операцией. На первый взгляд, в теории элементарных частиц имелось еще меньше оснований пытаться использовать приближение, игнорирующее связь спина с орбитой. Но неожиданно мало понятная игра различных факторов привела к тому, что основные состояния (массы) мезонов и барионов уложились в простую схему двух мультиплетов группы SU(6), объединяющей симметрию спина и унитарного спина подобно тому, как SU(4) объединила спин и изотопический спин. Может быть, здесь имеет смысл кратко напомнить основные этапы развития теории.

1 этап. Изотопическая инвариантность ядерных сил

На этом этапе исходное приближение состояло в том, что в отсутствие электромагнитного (и слабого) взаимодействия нет способа отличить нейтрон от протона или от произвольной линейной комбинации нейтрона и протона. Квантовая механика при этом требует, чтобы существовало два состояния, которые были бы ортогональны и нормированы. Это требование приводит к изотопической группе симметрии - группе SU(2), зависящей от трех параметров (доля протонного состояния, доля нейтронного состояния и фаза между ними).

2 этап. Изотопическая инвариантность сильных взаимодействий

Открытие π -мезона с тремя возможными зарядовыми состояниями π^+ , π^0

^{1/} Обзоры теории SU(3) и библиография даны в работах: Я.А. Смородинский, УФН (1964); Дж. де Сварт, УФН (1964); В.И. Огиевский (Сборник лекций Зимней школы по теоретич. физике, Дубна, 1964); В.Б. Берестецкий, УФН (1965).

и π поставило вопрос о групповых свойствах. В принципе могло оказаться, что все три π -мезонных состояния тоже нельзя различить между собой, и мы пришли бы к унитарной группе в трехмерном пространстве - группе $SU(3)$. В действительности, события развивались иначе. Пионы проявляли себя как тензоры в группе $SU(2)$, т.е. их состояния (в отсутствие слабых и электромагнитных взаимодействий) были определены не с точностью до 8 параметров группы $SU(3)$, а с точностью до трех параметров группы $SU(2)$.

Такое уменьшение неопределенности, очевидно, должно быть связано с какой-то дополнительной информацией, вытекающей из теории. Эта информация следовала из предположения, что взаимодействие пионов с нуклонами описывается формулой типа Юкавы, т.е. диаграммой, в которой нуклон и антинуклон связаны с пионом. Инвариантность взаимодействия Юкавы влечет за собой требование, чтобы волновая функция (или амплитуда рождения) пиона преобразовывалась как произведение волновых функций (или операторов рождения) нуклона и антинуклона, т.е. как тензор в схеме $SU(2)$. Другим выражением того же факта служит описание пиона в модели Ферми-Янга как связанного состояния нуклона и антинуклона. Хотя динамические свойства этой модели не могут претендовать на какое-либо сравнение с опытом, ее свойства симметрия передают соотношения между симметрией нуклонов и пионов.

3 э т а п.

Открытие странности привело к теории, исходящей из приближения, в котором барионы неразличимы. После неудачи первого варианта, в котором неразличимость протона и нейтрона распространялась и на Λ -гиперон (модель Сакаты), успех выпал на долю схемы, где неразличимыми считались все 8 гиперонов. Однако при этом была принята не $SU(8)$ - симметрия, а лишь $SU(3)$ - симметрия, в которой частицам приписывались свойства тензора второго ранга.

4 э т а п, о котором будет рассказано в настоящем обзоре, связан с включением в симметрию спина и переходом к группе $SU(6)$ ^{3-5/}.

5 э т а п - расширение группы $SU(6)$, вызванное требованиями релятивистской инвариантности. Схема $SU(6)$ является существенно нерелятивистской теорией, поскольку в ней полностью пренебрегается спин-орбитальной связью. Если попытаться просто перейти из системы покоя в движущуюся систему координат, то спин частицы (например, в задаче о столкновениях) перестает быть квантовым числом - его заменяет полный угловой момент - и вся симметрия между спином и унитарным спином нарушается. Поэтому простое объединение $SU(3)$ - симметрии с группой Лоренца не приводит к полезным результатам. Нетривиальные способы обобщения группы сейчас изучаются, причем на этом пути уже намечены первые успехи. Более подробно мы говорим о релятивистских обобщениях $SU(6)$ -схемы в заключении.

Современное положение теории требует решения фундаментальной проблемы кварков. Поскольку в схеме $SU(3)$ элементарные частицы выступают как тензоры, то возникает вопрос о существовании более простых образований - трехкомпонентных тип-кварков. Кварки должны иметь необычные свойства: заряды и гиперзаряды их компонент принимают значения $\pm 1/3$ или $\pm 2/3$. Опыты по обнаружению таких частиц пока дали отрицательный результат.

Можно, конечно, предположить, что кварк представляет собой просто математический символ, служащий для описания представлений группы $SU(3)$. Такая возможность предусмотрена и в математике: в этом случае следует говорить, что в природе реализуются только однозначные представления группы $SU(3)/Z_3$.

Допустима и другая возможность, а именно, что дробнозаряженные кварки не могут существовать в свободном состоянии в силу каких-то законов симметрии, требующих, чтобы заряд свободной частицы был кратен заряду протона. Такой закон, например, возникает в теории монополя Дирака, из которой следует, что если монополю существует (хотя бы один на всю вселенную!), то при "обходе" вокруг него заряженной частицы фаза ее волновой функции умножится на $\frac{4\pi em}{c}$, где m - величина монополя. Для однозначности волновой функции необходимо, чтобы эта величина была кратна 2π , т.е. чтобы $\frac{em}{\pi c} = \frac{n}{2}$.

Отсюда вытекает, в частности, что заряды всех частиц в мире должны быть кратны друг другу - иначе это соотношение не могло бы (при заданном m) выполняться для любых частиц. Сказанное, очевидно, справедливо для свободных частиц, а не для виртуальных, так как виртуальную частицу нельзя обнести по реальному контуру вокруг монополя. Поэтому отсутствие свободных кварков не исключает наличия их "внутри" частиц^{хх/}. В схеме $SU(6)$ кварк становится шестикомпонентным из-за включения спиновых переменных (спин кварка равен $1/2$) в число переменных, преобразующихся в группе. При составлении частиц из кварков в схеме $SU(6)$ возникает интересный вопрос о том, какой статистике должны удовлетворять кварки. Обычная теорема о связи спина и статистики не может быть, по-видимому, применена к кваркам, если они не бывают в свободном состоянии (вернее, если дираковский вакуум состоит из нуклонов, а не из кварков). Поэтому образование барионов из трех кварков в S - состоянии с параллельными спинами, по-видимому, не приводит к явному противоречию. Кажущееся противоречие возникает при попытке связать статистику кварков со статистикой барионов, но и оно оказывается несерьезным. Мы обсудим этот вопрос в § 6.

х/ В случае группы $SU(2)$ этому соответствовал бы мир без нуклонов, состоящий только из частиц со спином, равным целому числу. Такой мир был бы очень беден.

хх/ Применяя язык диаграмм, можно сказать, что кварки появляются лишь на внутренних линиях и не могут быть внешними концами диаграмм. Аналогичные свойства имеют частицы в модели Швингера.

Для того, чтобы не отсылать читателя к другим статьям, обзор начинается с краткой сводки результатов SU(3).

Некоторые математические подробности-схемы Юнга и размерности представления SU(3) и SU(6) - вынесены в приложение.

Обзор ограничивается работами, опубликованными до 1 февраля 1965 года; он был доложен на Совещании по теории симметрии в феврале 1965 года.

§ 2. Представления группы SU(3)

Базисами представлений группы SU(3) являются неприводимые тензоры с p верхними (контравариантными) и q нижними (ковариантными) индексами. По определению, неприводимый тензор симметричен в своих верхних и нижних значках, а его следы равны нулю. Тензор с одним верхним и одним нижним значком преобразуется по присоединенному (adjoint) представлению группы.

С помощью полностью антисимметричного тензора третьего ранга

$$\epsilon_{ABC} = \begin{cases} 1 & \text{(четные перестановки)} \\ -1 & \text{(нечетные перестановки)} \\ 0 & \text{(два индекса равны)} \end{cases} \quad (2.1)$$

можно поднять все индексы наверх (превратить тензор в полностью контравариантный). Тогда симметрия тензора описывается схемой Юнга с длиной строк $p+q$ и q соответственно^{x/}:



$$(2.2)$$

Полное число клеток в схеме Юнга равно $p+2q$. Увеличение этого числа по сравнению с числом индексов $p+q$ исходного тензора связано с тем, что тензор (2.1) превращает каждый нижний индекс в два верхних.

Вместо (2.1) можно ввести ковариантный тензор ϵ_{abc} ; тогда тензор можно сделать полностью ковариантным и схема Юнга будет иметь $p+q$ и p клеток в строках. Полное число клеток в этом случае равно $2p+q$. Генераторы группы (их восемь) удобно расположить в виде матрицы:

$$A_B^A = \begin{pmatrix} Q & I- & K- \\ I+ & Y-Q & L- \\ K+ & L+ & -Y \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

^{x/} Напомним, что запись в форме схемы Юнга обычно означает, что волновая функция вначале симметризована по $p+q$ индексам, а потом антисимметризована по q парам индексов.

Из этой матрицы видно, что группа SU(3) содержит три (не независимых) подгруппы SU(2). Таблицы их генераторов получаются из (2.3) вычеркиванием A -ой строки и A -го столбца и обращением в нуль следа полученной матрицы. Таким образом получаем три набора генераторов:

$$I\text{-спин} = \begin{pmatrix} Q - \frac{1}{2}Y & I- \\ I+ & -Q + \frac{1}{2}Y \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$L\text{-спин} = \begin{pmatrix} -Y + \frac{1}{2}Q & L- \\ L+ & Y - \frac{1}{2}Q \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

$$K\text{-спин} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}Y & K- \\ K+ & -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Y \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Если отождествить Q с зарядом, а Y с гиперзарядом, то I -спин становится изотопическим спином. След квадрата матрицы (2.3) или, что то же самое, сумма квадратов модулей ее элементов, носит название оператора Казимира второго порядка (оператор Лапласа)^{x/}

$$C_2^{(8)} = \text{Sp } AA = \sum_{A,B} A_B^A A_A^B = \sum_{A,B} |A_B^A|^2. \quad (2.7)$$

Для представления (p,q) оператор $C_2^{(8)}$ равен числу:

$$C_2^{(8)}(p,q) = \frac{2}{3} [p(p+3) + q(q+3) + pq] = 2 [I(I+1) + K(K+1) + L(L+1) - \frac{1}{2}(Q^2 + Y^2 - QY)]. \quad (2.8)$$

Классификация частиц в терминах унитарных мультиплетов обычно исходит из изотопического дублета, описывающего нуклоны:

$$\Psi^a = \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

и соответственно для ковариантных компонент

$$\Psi_a = (\Psi_1, \Psi_2) = \epsilon_{ab} \Psi^b = (p, -p). \quad (2.10)$$

Тогда основной триплет SU(3), который называют кварком, записывается в виде:

^{x/} Заметим, что квадратичный оператор Казимира группы SU(3) часто определяется с дополнительным множителем $\frac{1}{2}$: $F^2 = \frac{1}{2} C_2^{(8)}$.

$$\Psi^A = \begin{pmatrix} p' \\ p' \\ \Lambda' \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

где компоненты имеют заряды $\frac{2}{3}e$, $-\frac{1}{3}e$, $-\frac{1}{3}e$. Значения зарядов определяют выбор низшего представления оператора Q :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

и оператора Y :

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Соответствие между компонентами произвольного тензора $SU(3)$ и значениями заряда и гиперзаряда устанавливается так. Обозначим через $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$ и соответственно через $q(1)$, $q(2)$ и $q(3)$ число верхних (нижних) индексов, равных 1, 2 и 3. Тогда можно ввести три "магнитных" квантовых числа:

$$\begin{aligned} m_1 &= p(1) - q(1), \\ m_2 &= p(2) - q(2), \\ m_3 &= p(3) - q(3). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Очевидно, что

$$m = m_1 + m_2 + m_3 = p - q, \quad (2.15)$$

причем

$$\begin{aligned} \text{заряд} &= m_1 - \frac{m}{3}, \\ \text{гиперзаряд} &= m_3 + \frac{m}{3}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Отсюда при $m = 1$ получаем формулы (2.12), (2.13). Так как m_1 изменяется в пределах от p до $-q$, то заряд в мультиплете изменяется в пределах от $\frac{2p+q}{3}$ до $-\frac{p+2q}{3}$, принимая $p+q+1$ значений. Те же пределы изменения имеет и гиперзаряд x .

Принятое расположение мезонов в октетах такое:

$x/$ Формула (2.16) определяет диагональные элементы матриц Q и Y в любом представлении.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\rho^0}{\sqrt{2}} + \frac{\phi}{\sqrt{6}} & \rho^+ & K^{*+} \\ \rho^- & -\frac{\rho^0}{\sqrt{2}} + \frac{\phi}{\sqrt{6}} & K^{*0} \\ K^{*-} & \bar{K}^{*0} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\phi \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

К векторному октету примыкает унитарный синглет

$$S = \omega.$$

Мультиплеты P и V эрмитовы: они переходят сами в себя при транспонировании и замене частиц на античастицы (ξ — сопряжение). Барийные мультиплеты этой симметрией не обладают, т.е. антибарии образуют независимые мультиплеты.

Если рассматривать мезонные мультиплеты как системы, состоящие из кварка и антикварка $\xi^A \bar{\xi}_B$, то антикварку надо приписать барионный заряд, равный по величине и противоположный по знаку барионному заряду кварка.

Барии описываются как система из трех кварков: $\epsilon_{ABC} \xi^B \xi^C \xi^A$ для октета и симметризованный тензор $\xi^B \xi^C \xi^D$ для декуплета. Октет бариев можно также записать в виде $\xi^A \bar{\xi}_B$. Ковариантный кварк ξ_A преобразуется в группе $SU(3)$ как антикварк $\bar{\xi}_B$, однако, барионный заряд ξ_A положителен. Так как три кварка составляют барион, то барионный заряд кварка (ковариантного) равен $+1/3$, а барионный заряд антикварка ковариантного равен $-1/3$.

В явном виде барионный октет выглядит следующим образом:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & \Lambda \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Lambda \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\Lambda \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Выпишем также декуплет d^{ABC} барионных резонансов $3/2^+$:

$$d^{222} = \Delta_{\delta}^{-}, \quad d^{222} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_{\delta}^0, \quad d^{112} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_{\delta}^{+}, \quad d^{111} = \Delta_{\delta}^{++},$$

$$d^{223} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Sigma_{\delta}^{-}, \quad d^{123} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Sigma_{\delta}^0, \quad d^{113} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Sigma_{\delta}^{+},$$

$$d^{233} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Xi_{\delta}^{-}, \quad d^{133} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Xi_{\delta}^0,$$

$$d^{333} = \Omega^{-}$$

§ 3. Массовые формулы SU(3)

Если унитарная симметрия выполняется строго, то массы у всех компонент мультиплета одни и те же. Считается, что возмущение, нарушающее SU(3)-симметрию, обладает тензорными свойствами октета M_A^B , причем расщепление масс описывает (3.3) - компонента октета, не имеющая ни изотопического спина, ни странности, ни заряда.

Тензорный оператор M_A^B всегда можно сконструировать из генераторов A_A^B (см. 2.3). Наиболее общее выражение для M_A^B будет иметь вид:

$$M_A^B = \alpha A_A^B + \beta (A_C^B A_A^C - A_A^C A_C^B) +$$

$$+ \gamma (A_C^B A_A^C + A_A^C A_C^B - \frac{2}{3} \delta_A^B A_D^C A_C^D),$$

где α, β, γ - произвольные постоянные. Пользуясь коммутационными соотношениями для операторов A_A^B

$$[A_A^B, A_D^C] = \delta_D^B A_A^C - \delta_A^C A_D^B,$$

тензор (3.1) нетрудно преобразовать к следующей форме:

$$M_A^B = a A_A^B + b [A_C^B A_A^C + A_A^C A_C^B - \frac{2}{3} \delta_A^B A_C^D A_C^D].$$

Согласно сказанному выше, полный массовый оператор M записывается так:

$$M = M_0 + M_3^3, \quad (3.2)$$

где M_0 - "невозмущенный" массовый оператор, M_3^3 - компонента тензора (3.2). С

помощью (2.3) легко установить, что диагональные элементы тензора

$$D_A^B = \frac{1}{2} (A_C^B A_A^C + A_A^C A_C^B - \frac{2}{3} \delta_A^B A_D^C A_C^D)$$

представляются в виде:

$$D_3^3 = \frac{1}{4} Y^2 - I(I+1) + \frac{1}{6} C_2^{(8)},$$

$$D_2^2 = \frac{1}{2} (Q - Y)^2 - K(K+1) + \frac{1}{6} C_2^{(8)},$$

$$D_1^1 = \frac{1}{4} Q^2 - L(L+1) + \frac{1}{6} C_2^{(8)}.$$

В итоге с учетом равенства $A_3^3 = -Y$ и первого соотношения из (3.3) для оператора (3.2) получается следующее выражение:

$$M = M_0 + M_1 Y + M_2 [I(I+1) - \frac{Y^2}{4} - \frac{C_2^{(8)}}{6}] \quad (3.4)$$

Для октета мезонов, у которого при замене $Y \rightarrow -Y$ строки и столбцы меняются местами, линейный член отсутствует, и поэтому

$$M = M_0' + M_1' (I(I+1) - \frac{Y^2}{4} - \frac{C_2^{(8)}}{6}). \quad (3.5)$$

Массовые формулы, как было показано в обзоре SU(3), могут быть получены в предположении, что взаимодействие мультиплета с вакуумом описывается некоторым эффективным октетным полем H_B^A , у которого только диагональные элементы (с $Q=Y=0$) отличны от нуля. Это взаимодействие, следуя Глэшу и Коулмэну, можно наглядно представлять как излучение "головастика" с 4-импульсом, равным нулю, и другими квантовыми числами вакуума. Такая модель будет полезна и для понимания формул в схеме SU(6).

Из (3.4) и (3.5) вытекают соотношения, связывающие массы внутри SU(3)-мультиплетов. Так, для октета барионов N, Λ, Σ, Ξ (3.4) имеем:

$$N + \Xi = \frac{1}{2} (\Sigma + 3\Lambda) \quad (3.6)$$

или, если отсчитывать массы от Σ ,

^{x/} В формуле (3.5), согласно установившейся традиции, оператор M интерпретируется как квадрат массового оператора бозонов. В дальнейшем массы барионов и квадраты масс бозонов будут обозначаться символами соответствующих частиц.

$$(N - \Sigma) + (\Xi - \Sigma) = \frac{3}{2} (\Lambda - \Sigma). \quad (3.7)$$

Точность этой формулы (отношение разности правой и левой частей к правой части) составляет приблизительно 10%.

Для декуплета в силу равенства $Y = 21-2$ в формуле (3.4) остается две постоянных. Поэтому возникает следующее соотношение:

$$\Omega - \Xi_{\delta} = \Xi_{\delta} - \Sigma_{\delta} = \Sigma_{\delta} - \Lambda_{\delta} \quad (3.8)$$

(точность лучше 1%).

Из (3.5) легко получить массовую формулу для псевдоскалярного октета мезонов:

$$K - \pi = \frac{3}{4} (\eta - \pi), \quad (3.9)$$

выполняющуюся с ошибкой 3%.

Однако в рамках SU(3)-схемы не находят объяснения следующие факты:

1. Практическое совпадение масс ρ - и ω -мезонов:

$$\omega - \rho = 0,03 (\text{Bev})^2.$$

2. Неправильность формулы, аналогичной (3.9), для векторных бозонов:

$$K^* - \rho \neq \frac{3}{4} (\phi - \rho).$$

3. Существование "правила интервалов", относящегося к разным мезонным октетам:

$$K^* - \rho = K^* - \pi$$

(ошибка меньше чем 5%).

4. Применимость формулы (3.4) с одними и теми же коэффициентами M_1 и M_2 одновременно и к октету, и к декуплету ($C_2^{(3)} = 6$ и 12 соответственно). Так, если выразить постоянные в (3.4) через массы октета, то для интервала в декуплете получается значение 130 Мэв (вместо 145 Мэв).

Последние два факта указывают, что разумным обобщением теории унитарной симметрии может являться такая схема, в которой оба типа мезонов входят в один мультиплет, а барионы (октет и декуплет) - в другой. При этом в качестве исходной гипотезы естественно принять предположение о независимости масс частиц от спина.

Однако прежде чем перейти к построению новой схемы (основанной, как уже говорилось выше, на группе SU(6)), мы посвятим один параграф методам вычисления магнитных моментов и электромагнитных поправок к массам частиц в формализме

SU(3), имея в виду, что с аналогичными вопросами нам придется иметь дело и в SU(6) - теории.

§ 4. Магнитные моменты и электромагнитное расщепление масс

в SU(3)

Электрический заряд и, следовательно, электромагнитный ток, обладают трансформационными свойствами T_1^1 -компоненты бесшпурового тензорного оператора T_B^A . Поэтому общее выражение для оператора электромагнитного тока имеет вид:

$$J = a' A_1^1 + b' (A_1^1 A_1^0 - \frac{1}{3} \langle AA \rangle), \quad (4.1)$$

где A_B^A - элемент матрицы (2,3), $\langle AA \rangle = C_2^{(3)}$ - квадратичный оператор Казимира группы SU(3). Магнитный момент частицы α , принадлежащей произвольному SU(3)-мультиплету, определяется так:

$$\mu(\alpha) = \langle \alpha | J | \alpha \rangle. \quad (4.2)$$

Пользуясь последним тождеством из (3.3), нетрудно установить, что диагональные по L-спину магнитные моменты описываются формулой

$$\mu(\alpha) = aQ + b \left[\frac{1}{6} C_2^{(3)} + \frac{1}{4} Q^2 - L(L+1) \right]. \quad (4.3)$$

Классификация барионов по L-спину приведена в таблице:

L	Состояния
1/2	Σ^-, Ξ^-
1	$\Lambda, \frac{1}{2}(-\Sigma^0 + \sqrt{3}\Lambda), \Xi^0$
0	$\frac{1}{2}(\sqrt{3}\Sigma^0 + \Lambda)$
1/2	ρ, Σ^+

С помощью этой таблицы из (4.3) находим:

^{x/} Формула (4.2) передает, разумеется, лишь трансформационные свойства магнитного момента, а вовсе не характеризует его величину.

$$\mu(\Sigma^-) = \mu(\Xi^-), \quad \mu(n) = \mu(\Xi^0), \quad \mu(p) = \mu(\Sigma^+), \quad (3.3)$$

$$\mu(\Sigma^-) = -(\mu(p) + \mu(n)).$$

Для получения соотношений между магнитными моментами $\mu(\Lambda)$, $\mu(\Sigma^0)$ и $\mu(\Sigma^0 \rightarrow \Lambda)$, являющимися матричными элементами оператора μ между состояниями недиагональными по L -спину, воспользуемся соотношениями:

$$\begin{aligned} \langle \Lambda | L(L+1) | \Lambda \rangle &= \frac{3}{2}, \\ \langle \Sigma | L(L+1) | \Sigma \rangle &= \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\langle \Lambda | L(L+1) | \Sigma \rangle = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Подставляя средние в (4.2) и исключая постоянные, будем иметь:

$$\begin{aligned} \mu(\Lambda) &= -\mu(\Sigma^0) = \frac{1}{2}\mu(n), \\ 2\mu(\Sigma^0) &= \mu(\Sigma^+) + \mu(\Sigma^-), \\ 6\mu(\Lambda) &= \mu(p) + \mu(\Sigma^-) + 4\mu(n), \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$2\sqrt{3}\mu(\Sigma^0 \rightarrow \Lambda) = 3\mu(\Lambda) + \mu(\Sigma^0) - 2\mu(n) - 2\mu(\Xi^0).$$

Займемся теперь вычислением электромагнитных поправок к массам барионов. В низшем приближении теории возмущений они имеют вид:

$$\delta m(a) = \langle a | T_{11}^{11} | a \rangle, \quad (4.7)$$

где T_{11}^{11} — компонента тензора T_{CD}^{AB} . В общем случае

$$\begin{aligned} T_{11}^{11} &= a' + b' A_1^1 + c' A_B^1 A_1^B + d' A_1^1 A_1^1 + \\ &+ e' A_1^1 (A_B^1 A_1^B) + f' (A_B^1 A_1^B) (A_C^1 A_1^C), \end{aligned} \quad (4.8)$$

откуда для диагональных по L -спину состояний получается следующая формула^{x/}

$$\delta m(a) = a + bQ + c\left(\frac{1}{4}Q^2 - L(L+1)\right) + dQ^2 + \quad (4.9)$$

$$+ eQ\left(\frac{1}{4}Q^2 - L(L+1)\right) + f\left(\frac{1}{4}Q^2 - L(L+1)\right)^2.$$

Из (4.9) вытекает соотношение Коулмена-Глешоу:

$$\begin{aligned} \delta m(\Xi^-) - \delta m(\Xi^0) &= \delta m(\Sigma^-) - \delta m(\Sigma^+) + \\ &+ \delta m(p) - \delta m(n). \end{aligned} \quad (4.10)$$

С помощью (4.5) находим без труда:

$$2\sqrt{3}\delta m(\Sigma^0 \rightarrow \Lambda) = 3\delta m(\Lambda) + \delta m(\Sigma^0) - 2\delta m(n) - 2\delta m(\Xi^0). \quad (4.11)$$

На описании электромагнитного расщепления внутри других $SU(3)$ мультиплетов мы сейчас останавливаться не будем.

Формулы для расщепления (3.4) и (4.9) выведены независимо. Можно дополнительно предположить, что постоянные в них пропорциональны друг другу. Это отвечает описанию расщепления с помощью единого возмущающего поля, или "головастика".

Положим

$$\frac{M_1}{b} = -\frac{M_2}{c}, \quad (4.12)$$

тогда возникает еще одно соотношение:

$$\frac{\Sigma^- - \Sigma^+}{\Xi^0 - n} = \frac{4}{3} \frac{p - n + \Sigma^0 - \Sigma^+}{\Sigma^0 - \Lambda}. \quad (4.13)$$

Левая часть равна $(2,0 \pm 0,1) \cdot 10^{-2}$, правая — $(2,7 \pm 0,5) \cdot 10^{-2}$.

Если теперь дополнительно предположить, что связь с полем N у псевдоскалярных мезонов такая же, как у барионов, то в результате получается еще одно равенство:

^{x/} Нетрудно видеть, что формулы для расщепления масс, выведенные выше, и формулы для электромагнитного расщепления в пренебрежении членами 3-й и 4-й степеней связаны между собой преобразованием $I \rightarrow L$, $Q \rightarrow -Y$. Заметим, что в (4.8) выписаны все члены, существенные для барионов. Более высокие степени изменяют лишь постоянные.

$$\frac{\Sigma^- - \Sigma^+}{\pi^0 - \eta} = \frac{4}{3} \frac{K^+ - K^0 + \pi^0 - \pi^+}{\pi^0 - \eta}, \quad (4.14)$$

правая часть (для квадратов масс) равна $(2,4 \pm 0,3) \cdot 10^{-2}$. Согласно формулы (4.14) с опытом представляется удивительным, поскольку она связывает массы частиц из разных мультиплетов, причем правая и левая части этого равенства содержат массы в разных степенях.

§ 5. SU(6) - симметрия в пространстве спин-унитарный спин

Допустим, что нам ничего не известно о группе SU(6), и мы только приступаем к построению группы симметрии, объединяющей в себе группу SU(3) с группой обычного спина SU(2)_J. Пусть F_μ (μ = 1, ..., 8) и J_k (k = 1, 2, 3) — базисные элементы алгебр Ли этих исходных групп. Простейший способ объединения F- и J-алгебр — образование их прямой суммы. При этом возникает группа, являющаяся прямым произведением первоначальных групп SU(3) и SU(2)_J:

$$SU(3) \times SU(2)_J. \quad (5.1)$$

Ясно, что в группе (5.1) унитарно-спиновая и спиновая инвариантности не связаны друг с другом. Другими словами, несмотря на то, что в данном случае нельзя определить величины компонент обоих спинов (физические свойства частиц не зависят от направления F-спина в унитарном пространстве и J-спина в обычном пространстве), тем не менее можно установить различие между компонентами F_μ и J_k, т.е. указать, какие компоненты какому спину принадлежат. Поэтому мы перейдем к исследованию другой возможности объединения алгебр Ли заданных групп, а именно, рассмотрим их прямое произведение, составленное из элементов типа

$$J_k \times F_\mu. \quad (5.2)$$

Построенные по способу (5.2) операторы будут образовывать алгебру Ли какой-либо группы лишь в том случае, если их коммутаторы линейно выражаются через эти же величины. Поскольку в правой части равенства

$$\{J_k \times F_\mu, J_l \times F_\nu\} = \frac{1}{2} \{J_k, J_l\} \times \{F_\mu, F_\nu\} + \frac{1}{2} \{J_k, J_l\} \times [F_\mu, F_\nu] \quad (5.3)$$

фигурируют антикоммутаторы {F_μ, F_ν} и {J_k, J_l}, не содержащиеся, вообще говоря, в алгебрах Ли групп SU(3) и SU(2)_J, то возникает необходимость в предварительном расширении этих исходных алгебр. В низших представлениях, где J_k = 1/2 σ_k и F_μ = 1/2 λ_μ (σ_k — матрицы Паули, а λ_μ — матрицы Гелл-Манна), это расширение производится наиболее экономным образом. Действительно, "новыми" элементами в антикоммутаторах

$$\{\sigma_k, \sigma_l\} = 2\delta_{kl} \cdot \sigma_0, \quad (5.4)$$

$$\{\lambda_\mu, \lambda_\nu\} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{\mu\nu} \cdot \lambda_0 + d_{\mu\nu\rho} \lambda_\rho$$

являются единичная матрица σ₀ = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и кратная единичной матрица λ₀ = $\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Поэтому только эти элементы и нужно добавить к перемножаемым алгебрам. Последнее фактически означает, что вместо групп SU(2)_J и SU(3) необходимо взять группы U(2) и U(3), а затем из низших представлений алгебр Ли этих групп строить произведения вида (5.2). В результате получается алгебра матриц, замкнутая относительно операции обычного матричного умножения и отвечающая, как будет ясно из дальнейшего, группе U(6).

Наиболее удобно процедуру умножения (5.2) проводить в том случае, когда генераторы групп заданы в тензорном виде. В самом деле, если образовать тензоры^{x/}:

$$J_0 \times \sigma_0 + \sum_{k=1}^3 J_k \times \sigma_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + J_3 & & J_- \\ & J_+ & \frac{1}{2} - J_3 \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

$$F_0 \times \lambda_0 + \sum_{\mu=1}^8 F_\mu \times \lambda_\mu = \begin{pmatrix} 1/3 + Q & I_- & K_- \\ I_+ & 1/3 + Y - Q & L_- \\ K_+ & L_+ & 1/3 - Y \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

то произведению (5.2) будет отвечать тензор:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + J_3 & & J_- \\ & J_+ & \frac{1}{2} - J_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/3 + Q & I_- & K_- \\ I_+ & \frac{1}{3} + Y - Q & L_- \\ K_+ & L_+ & \frac{1}{3} - Y \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

^{x/} По определению, J₀ = 1/2 σ₀ и F₀ = 1/2 λ₀ в низшем представлении.

Раскрывая это прямое произведение и вычитая след из полученной 6×6 - матрицы, мы приходим к тензору "спина" группы SU (6):

$\frac{1}{2}Q + \frac{1}{3}J_3 + J_3 Q$	$(\frac{1}{2} + J_3)I_-$	$(\frac{1}{2} + J_3)K_-$	$J_-(\frac{1}{3} + Q)$	$J_- I_-$	$J_- K_-$
$(\frac{1}{3} + J_3)I_+$	$-\frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}Y + \frac{1}{3}J_3$ $-J_3 Q + J_3 Y$	$(\frac{1}{2} + J_3)L_-$	$J_- I_+$	$L_-(\frac{1}{3} - Q + Y)$	$J_- L_-$
$(\frac{1}{2} - J_3)K_+$	$(\frac{1}{2} + J_3)L_+$	$-\frac{1}{2}Y + (\frac{1}{3} - Y)J_3$	$J_- K_+$	$J_- L_+$	$J_-(\frac{1}{3} - Y)$
$J_+(\frac{1}{3} + Q)$	$J_+ I_-$	$J_+ K_-$	$\frac{1}{2}Q - \frac{1}{3}J_3$ $-J_3 Q$	$(\frac{1}{2} - J_3)I_-$	$(\frac{1}{2} - J_3)K_-$
$J_+ I_+$	$J_3(\frac{1}{3} - Q + Y)$	$J_+ L_-$	$(\frac{1}{2} - J_3)I_+$	$-\frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}Y -$ $-\frac{1}{3}J_3 + J_3 Q - J_3 Y$	$(\frac{1}{2} - J_3)L_-$
$J_+ K_+$	$J_+ L_+$	$J_+(\frac{1}{3} - Y)$	$(\frac{1}{2} - J_3)K_+$	$(\frac{1}{2} - J_3)L_+$	$-\frac{1}{2}Y -$ $-(\frac{1}{3} - Y)J_3$

(5.7)

Действительно, нетрудно убедиться, что для величины A_ν^μ выполняются соотношения, определяющие алгебру Ли группы SU (6)^{x/}:

- а) $(A_\mu^\mu) = 0,$
- б) $(A_\nu^\mu)^\dagger = A_\mu^\nu,$
- в) $[A_\sigma^\rho, A_\nu^\mu] = \delta_\nu^\rho A_\sigma^\mu - \delta_\sigma^\mu A_\nu^\rho,$
- г) $(A_\nu^\mu)_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{6} \delta_{\mu\nu} \delta_{11}.$

(5.8)

Из наших построений видно, что гипотеза SU (6)-симметрии фактически предполагает вместо двух независимых пространств (спинового и унитарного) рассмотрение единого 6- мерного пространства комплексных векторов $\Psi^\alpha (\alpha = 1, \dots, 6)$, в котором затем вводятся унитарные преобразования. Величину Ψ^α , очевидно, следует интерпретировать как волновую функцию кварка в схеме SU (6)^{xx/}.

Удобно вместо одного индекса α ввести парный индекс (a, A) , задавая соответствие между значениями α и (a, A) , следующим образом:

^{x/} Если снять условие а), то величины A_ν^μ будут порождать группу U(6). Равенство г) задает генераторы A_ν^μ лишь в нижнем представлении.

^{xx/} Можно показать, что для построения всех неприводимых представлений SU(6), отвечающих тензорам с произвольной симметрией, необходимо иметь три неэквивалентных кварка.

α	1	2	3	4	5	6
(a, A)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)

При таком способе нумерации первую цифру, очевидно, нужно относить к спиновому пространству группы SU (2)_J, а вторую - к унитарному пространству группы SU (3). В новых обозначениях

$$\Psi^\alpha \equiv \Psi^{a,A}$$

и

$$A_{\beta}^{\alpha} \equiv A_{b,B}^{a,A}, \quad (5.10)$$

причем $A_{a,A}^{a,A} = 0.$

Поскольку след каждого из тензоров (5.4) и (5.5) равен единице, то суммирование в выражение (5.10) по индексам A и B от 1 до 3 приводит к генераторам группы SU(2)_J, а суммирование по индексам a и b от 1 до 2- к генераторам группы SU (3):

$$\begin{pmatrix} J_3 & J_- \\ J_+ & -J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1A}^{1,A} & A_{2A}^{1,A} \\ A_{1A}^{2,A} & A_{2A}^{2,A} \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

$$\|A_{a,B}^{a,A}\| = \begin{pmatrix} A_{a,1}^{a,1} & A_{a,2}^{a,1} & A_{a,3}^{a,1} \\ A_{a,1}^{a,2} & A_{a,2}^{a,2} & A_{a,3}^{a,2} \\ A_{a,1}^{a,3} & A_{a,2}^{a,3} & A_{a,3}^{a,3} \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

При этом указанные группы входят в SU (6) в виде прямого произведения SU (3) x SU (2), так как в силу (5.8в)^{x/}

$$[A_{a,B}^{a,A}, A_{b,C}^{b,C}] = 0. \quad (5.13)$$

^{x/} Соотношение (5.13) непосредственно следует и из (5.3).

С помощью матриц (5.11) и (5.12) по обычным правилам можно построить операторы Казимира подгрупп $SU(2)_J$ и $SU(3)^{x/}$

$$2J(J+1) = A_{b,A}^{a,A} A_{a,B}^{b,B} \quad (5.14)$$

$$C_2^{(s)} = A_{a,B}^{a,A} A_{b,A}^{b,B} \quad (5.15)$$

Рассмотрим далее преобразования группы $SU(6)$, которые затрагивают лишь компоненты $\Psi^{a,3}$ ($a=1,2$) волновой функции кварка, оставляя другие компоненты без изменения. Ясно, что при этом мы выделяем некоторую 2-мерную унитарную группу с матрицей генераторов:

$$\|A_{b,3}^{a,3}\| = \begin{pmatrix} A_{1,3}^{1,3} & A_{2,3}^{1,3} \\ A_{1,3}^{2,3} & A_{2,3}^{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_3(\frac{1}{3} - Y) - \frac{Y}{2} & J_-(\frac{1}{3} - Y) \\ J_+(\frac{1}{3} - Y) & -J_3(\frac{1}{3} - Y) - \frac{Y}{2} \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

После вычета шпура матрица (5.16) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} J_3 & J_- \\ J_+ & -J_3 \end{pmatrix} (\frac{1}{3} - Y) = \begin{pmatrix} S_3 & S_- \\ S_+ & -S_3 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

Тензор (5.17) называется тензором "странного" спина ^{/7,8/}. Происхождение этого термина связано с тем обстоятельством, что величину $s = Y - \frac{1}{3}$ можно интерпретировать как странность кварка, если считать барионный заряд кварка равным 1/3. При действии оператора "странного" спина на волновую функцию Λ' -кварка в силу равенства $s = -1$ имеем:

$$\vec{S} = \vec{J}$$

^{x/} Кубичный оператор Казимира $C_3^{(s)}$ группы $SU(3)$ в дальнейшем нам не понадобится.

и, наоборот, для состояний p' и p' кварков $S = 0$.

Из (5.16) и (5.17) непосредственно вытекает, что

$$S(S+1) = \frac{1}{2}(A_{1,3}^{1,3})^2 + \frac{1}{2}(A_{2,3}^{2,3})^2 + A_{2,3}^{1,3} A_{1,3}^{2,3} + A_{1,3}^{2,3} A_{2,3}^{1,3} - A_{1,3}^{1,3} A_{2,3}^{2,3} \quad (5.18)$$

Полезно рассматривать также оператор "нормального" спина \vec{N} , который, по определению, совпадает с обычным спином \vec{J} для p' и p' -кварков и равен нулю для Λ' -кварка. Другими словами,

$$\vec{N} = \vec{J}(1+s), \quad (5.19)$$

$$\vec{N} + \vec{S} = \vec{J}.$$

В тензорной записи оператор N -спина имеет вид:

$$\begin{pmatrix} N_3 & N_- \\ N_+ & -N_3 \end{pmatrix} = \|A_{b,c}^{a,c} - A_{b,3}^{a,3} + \frac{1}{2}\delta_b^a A_{o,3}^{o,3}\| = \|A_{b,i}^{a,i} + \frac{1}{2}\delta_b^a A_{o,3}^{o,3}\| \quad a,b,c,j=1,2; \quad C=1,2,3, \quad (5.20)$$

откуда

$$2N(N+1) = A_{b,i}^{a,i} A_{a,i}^{b,i} + A_{o,3}^{o,3} A_{o,3}^{o,3} + \frac{1}{2}(A_{o,3}^{o,3})^2 \quad (5.21)$$

Будем считать теперь фиксированными "странные" компоненты $\Psi^{a,3}$ волновой функции кварка и рассмотрим лишь такие матрицы $SU(6)$, которые действуют на не-странные" компоненты $\Psi^{a,j}$ ($a,j=1,2$). Легко видеть, что эти матрицы в совокупности образуют унитарную группу $U(4)$. Накладывая условие унитарности, мы приходим к группе $SU(4)$, которая объединяет в себе спиновую ($SU(2)_J$) и изотопическую $(SU(2))_I$ симметрии. Именно эту группу рассматривал Вигнер в своей попытке классифицировать ядерные термы ^{/1,2/}. Не представляет труда выписать матрицу генераторов группы $SU(4)$ в нижнем представлении:

$$\| A_{b,j}^{a,i} - \frac{1}{4} \delta_b^a \delta_j^i A_{a,k}^{c,k} \| =$$

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2}Q + \frac{1}{3}J_3 + J_3Q - \frac{1}{4}Y & (\frac{1}{2} + J_3)I_- & J_- (\frac{1}{3} + Q) & J_- I_- \\ (\frac{1}{2} + J_3)I_+ & -\frac{1}{2}Q + \frac{1}{4}Y + \frac{1}{3}J_3 - J_3Q + J_3Y & J_- I_+ & J_- (\frac{1}{3} - Q + Y) \\ J_+ (\frac{1}{3} + Q) & J_+ I_- & \frac{1}{2}Q - \frac{1}{3}J_3 - J_3Q - \frac{1}{4}Y & (\frac{1}{2} - J_3)I_- \\ J_+ I_+ & J_+ (\frac{1}{3} - Q + Y) & (\frac{1}{2} - J_3)I_+ & -\frac{1}{2}Q + \frac{1}{4}Y - \frac{1}{3}J_3 + J_3Q - J_3Y \end{array} \quad (5.22)$$

Если положить в (5.22) $Y = \frac{1}{3}$ (значение гиперзаряда "пестранного" кварка), то этот тензор принимает именно ту форму, которая получилась бы для него из прямого произведения:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + J_3 & J_- \\ J_+ & \frac{1}{2} - J_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + I_3 & I_- \\ I_+ & \frac{1}{2} - I_3 \end{pmatrix}$$

(ср. с (5.8)).

Ниже, при получении массовых формул, нам понадобится квадратичный оператор Казимира $SU(4)$. Из (5.22) находим

$$C_2^{(4)} = (A_{b,j}^{a,i} - \frac{1}{4} \delta_b^a \delta_j^i A_{a,k}^{c,k})(A_{a,i}^{b,j} - \frac{1}{4} \delta_a^b \delta_i^j A_{d,m}^{c,m}) =$$

(5.23)

$$= A_{b,j}^{a,i} A_{a,i}^{b,j} - \frac{1}{4} A_{a,i}^{a,i} A_{b,j}^{b,j}$$

Геометрически преобразование $SU(4)$ и рассмотренные выше преобразования группы "странного" спина $SU(2)_s$ являются независимыми друг от друга. Поэтому эти группы входят в $SU(6)$ в виде прямого произведения $SU(4) \times SU(2)_s$. Классификация мультиплетов группы $SU(6)$ по представлениям подгруппы $SU(4) \times SU(2)_s$ оказывается особенно полезной при рассмотрении векторных резонансов ω и ϕ (см. § 7).

По самому способу построения матрицы A_{ν}^{μ} группы $SU(6)$ на главной диагонали тензора (5.7) располагаются только те генераторы, которые диагональны в дан-

ном представлении. Поскольку $A_{\mu}^{\mu} = 0$, то число независимых диагональных генераторов равно 5 (ранг группы $SU(6)$). Конкретно мы выбираем следующий набор:

$$J_3, Y, Q = I_3 + \frac{Y}{2}, J_3 (\frac{1}{3} - Y) = S_3, \mu_3 = g Q J_3. \quad (5.24)$$

Физический смысл первых четырех величин очевиден: это соответственно 3-я проекция обычного спина, гиперзаряд, электрический заряд и 3-я проекция "странного" спина. Что же касается оператора $\mu_3 = g Q J_3$, то его можно интерпретировать как 3-ю проекцию вектора магнитного момента кварка (g - коэффициент пропорциональности, играющий роль множителя Ланде). Давая такое теоретико-групповое определение оператора магнитного момента, мы получаем возможность вычислять его матричные элементы в любых представлениях группы $SU(6)$ (см. § 10).

Выпишем теперь в виде таблицы значения диагональных элементов генераторов (5.24) для каждой из компонент кварка и антикварка.

Кварк (барионный заряд 1/3)

Компонента	J_3	Y	Q	μ_3/g	S_3
(1,1)	1/2	1/3	2/3	1/3	0
(1,2)	1/2	1/3	-1/3	-1/6	0
(1,3)	1/2	-2/3	-1/3	-1/6	1/2
(2,1)	-1/2	1/3	2/3	-1/3	0
(2,2)	-1/2	1/3	-1/3	1/6	0
(2,3)	-1/2	-2/3	-1/3	1/6	-1/2

Антикварк (барионный заряд - 1/3)

Компонента	J_3	Y	Q	μ_3/g	S_3
(1,1)	-1/2	-1/3	-2/3	1/3	0
(1,2)	-1/2	-1/3	1/3	-1/6	0
(1,3)	-1/2	2/3	1/3	-1/6	-1/2
(2,1)	1/2	-1/3	-2/3	1/3	0
(2,2)	1/2	-1/3	1/3	1/6	0
(2,3)	1/2	2/3	1/3	1/6	1/2

Здесь следует заметить, что для других представлений оператор μ_3 не выражается в виде произведения операторов Q и J_3 , так как Q и J_3 по отдельности являются аддитивными квантовыми числами, а вообще говоря,

$$\Sigma Q J_3 \neq \Sigma Q \cdot \Sigma J_3.$$

То же самое относится, очевидно, и к генератору S_3 .

В заключение этого параграфа сделаем одно замечание общего характера. Если написать для кварка лагранжиан, то массовый член его равен:

$$L_M = m_0 \bar{\Psi}_{a,A} \Psi^{a,A}, \quad (5.25)$$

где суммирование распространяется на все значения индексов. Очевидно, что (5.25) инвариантно относительно любого унитарного преобразования в компонент между собой. Однако лагранжиан, кроме L_M , содержит еще член взаимодействия L_I и кинетическую энергию L_0 . Симметрия L_I определяется конкретной моделью и, в частности, может быть согласована с симметрией L_M . Симметрия L_0 различна в нерелятивистской и релятивистской теориях. В нерелятивистской теории L_0 не содержит спина, а поэтому L_0 не нарушает симметрию. В релятивистской теории L_0 содержит члены, описывающие спин-орбитальное взаимодействие, но не зависит от унитарного спина. Поэтому в релятивистской теории L_0 нарушает симметрию $SU(6)$, которая, таким образом, имеет смысл лишь в нерелятивистской теории.

§ 6. Неприводимые представления группы $SU(6)$

Вообще говоря, неприводимые представления $SU(6)$ характеризуются значениями 6 операторов Казимира. Это значит, что допустимые в $SU(6)$ схемы Юнга имеют не более 5 строк. Пять чисел — длины этих строк — также можно выбрать в качестве параметров, задающих представление.

Рассмотрим несколько простых представлений. Кварк и антикварк, как мы уже знаем, имеют по 6 компонент. Поскольку соответствующие представления являются комплексно-сопряженными, то их размерности мы будем обозначать числами 6 и $6^{*x/}$.

^{x/} Напомним, что операция комплексного сопряжения включает в себя изменение знака барионного заряда. Ковариантные компоненты могут относиться и к кваркам, и к антикваркам. В случае представлений $SU(6)$, с которыми мы будем встречаться, удобно считать ковариантные компоненты построенными из антикварков, так как ковариантными кварками мы пользоваться не будем.

Следующий тензор имеет два значка. Если оба они стоят наверху, то следует различать 2 случая, когда тензор симметричен по обоим индексам и когда он антисимметричен. В первом случае он имеет $\frac{1}{2}6 \cdot 7 = 21$ компоненту, а во втором $\frac{1}{2}6 \cdot 5 = 15$ компонент. Аналогично для двух индексов внизу находим два представления: 21^* и 15^* . Если один индекс контравариантный, а другой — ковариантный, то, обращая след в нуль, получим тензор из $6 \times 6 - 1 = 35$ компонент.

При записи неприводимых тензоров обычно принято переносить все индексы наверх с помощью полностью антисимметричного тензора шестого ранга $\epsilon^{abcd\alpha\beta}$, так что каждый нижний индекс превращается в 5 антисимметричных верхних индексов, два антисимметричных нижних — в 4 антисимметричных верхних и т.п.; полученные в результате полностью контравариантные тензоры и изображаются, как известно, схемами Юнга.

Кварку отвечает схема Юнга, состоящая из одной клетки:

$$\Psi^a = \square, \quad (6.1)$$

антикварку ^{x/} — схема из 5 антисимметричных клеток:

$$\Psi_a^* = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \quad (6.2)$$

Рассмотренные выше тензоры второго ранга изображаются так:

$$\begin{array}{l} \Psi^{\alpha\beta} = \square \square \quad \Psi^{\alpha\beta} = \square \square \\ \Psi_{\alpha\beta} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad \Psi_{\alpha\beta} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad \Psi_{\alpha\beta} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (6.3)$$

Симметричные индексы подчеркнуты, под антисимметричными поставлен уголок.

Число столбцов с i — клетками мы будем обозначать буквой λ_i , так что, например, схеме Юнга для тензора $\Psi_{\alpha\beta}^{\alpha}$

^{x/} Точнее, ковариантному кварку (ср. предыдущее примечание).

отвечает набор^{x/} (1,0,0,0,1); схеме антикварка - набор (0,0,0,0,1).

Перейдем теперь к тензорам третьего ранга. Их может быть несколько типов. Начнем с полностью контравариантных тензоров. Симметричный тензор $\Psi^{ab\gamma}$ имеет $\frac{8!}{3!5!} = 56$ компонент. Его схема Юнга:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = (3,0,0,0,0). \quad (8.4)$$

Полностью антисимметричный тензор насчитывает $\frac{6!}{3!3!} = 20$ компонент:

$$\Psi^{ab\gamma} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = (0,0,1,0,0) \quad (8.5)$$

Существуют еще тензоры, симметричные по двум индексам и антисимметричные по двум другим. Таких тензоров, очевидно, будет два:

$$\xi^{ab\gamma} \quad \text{и} \quad \xi^{a\beta\gamma} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = (1,1,0,0,0). \quad (8.6)$$

Число компонент у каждого из них равно 70. Это проще всего установить, замечая, что у всех четырех рассмотренных тензоров должно быть в сумме $6 \times 6 \times 6 = 216$ компонент:

$$216 = 56 + 20 + 70 + 70. \quad (8.7)$$

Ковариантные тензоры 3-го ранга определяются аналогично. Смешанные тензоры получаются добавлением одного значка к тензорам второго ранга и обращением в нуль следа. Таким образом найдем, что тензор Ψ^{ab}_{γ} содержит $21 \times 6 - 6 = 120$ компонент, а тензор Ψ^{ab}_{γ} - $15 \times 6 - 6 = 84$ компоненты.

При работе с кварками мы встречаемся со следующим затруднением. Если тождественные кварки коммутируют, то из них можно сделать симметричный тензор, но нельзя сделать антисимметричный. Поэтому, чтобы построить антисимметричные представления 15 и 20, необходимо иметь по меньшей мере три неэквивалентных кварка. Если предположить, что кварки антикоммутируют, то нельзя будет сконструировать симметричные тензоры.

В связи с этим Гринберг^{/14/} вводит для кварков смешанную (пара-) статистику. В предположении, что существует три сорта неэквивалентных кварка, постулируется, что одинаковые кварки антикоммутируют, а разные коммутируют. Такая схема, однако, позволяет построить лишь тензоры, отвечающие схемам Юнга с длинами строк не больше трех.

^{x/} Как уже отмечалось, неприводимое представление можно характеризовать длинами строк Λ_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) схемы Юнга. Очевидно, имеет место равенство $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) = (\Lambda_1 - \Lambda_2, \Lambda_2 - \Lambda_3, \Lambda_3 - \Lambda_4, \Lambda_4 - \Lambda_5, \Lambda_5)$.

Мы видим, что слишком реалистическое толкование кварков не свободно от трудностей.

Размерность и значения чисел λ_i для всех неприводимых представлений, отвечающих тензорам ранга не выше 3-го, сведены в таблицу (см. также приложение). В последнем столбце указано содержание мультиплетов по представлениям подгруппы $SU(3) \times SU(2)$, причем первая цифра в скобках отвечает размерности $SU(3)$ мультиплета, вторая - размерности мультиплета по обычному спину. Мультиплетности прежде всего устанавливаются, если последовательно фиксировать один из индексов пары (a, A) и рассматривать возможные значения другого.

Т а б л и ц а 1

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$	Размерность	Мультиплетность по унитарному и обычному спинам (n, m)
(0,0,0,0,0)	1	(1,1)
(1,0,0,0,0)	6	(3,2)
(0,0,0,0,1)	6*	(3*,2)
(0,1,0,0,0)	15	(3*,3), (6,1)
(0,0,0,1,0)	15*	(3,3), (6,1)
(2,0,0,0,0)	21	(6,3), (3*,1)
(0,0,0,0,2)	21*	(6*,3), (3,1)
(1,0,0,0,1)	35	(8,3), (8,1), (1,3)
(0,0,1,0,0)	20 (или 20*)	(8,2), (1,4)
(3,0,0,0,0)	56	(10,4), (8,2)
(1,1,0,0,0)	70	(10,2), (8,4), (8,2), (1,2)
(0,0,0,0,3)	56*	(10*,4), (8,2)
(0,0,0,1,1)	70*	(10*,2), (8,4), (8,2), (1,2)

Приведем также аналогичные сведения о мультиплетах, встречающихся в разложениях $35 \times 35 = 1 + 35 + 35 + 189 + 280 + 280^* + 405$, $56^* \times 56 = 1 + 35 + 405 + 2695$ и $70^* \times 70 = 1 + 35 + 35 + 189 + 280 + 280^* + 405 + 3675$.

§ 7. Мезонный 35-плет

В схеме SU (6) псевдоскалярные (0⁻) и векторные (1⁻) мезоны помещаются в мультиплет размерности 35, отвечающий присоединенному представлению группы. В модели кварков этот факт получает простое и наглядное объяснение. Действительно, если считать мезоны связанными состояниями кварка и антикварка, то в силу соотношения

$$6 \times 6^* = 1 + 35 \quad (7.1)$$

35-плет является единственным нетривиальным самосопряженным тензором, который можно сконструировать из волновых функций Ψ^a и Ψ_a^* . При этом 0⁻ и 1⁻ мезоны отличаются взаимным направлением спинов кварка и антикварка, от которого, по условию, масса в первом приближении не зависит.

Обозначим мезонный 35-плет через $M_{\beta}^{\alpha} = M_{b,v}^{a,A}$ и напишем очевидное тождество:

$$M_{b,v}^{a,A} = M_{b,v}^{a,A} - \frac{1}{2} \delta_b^a M_{c,v}^{c,A} + \frac{1}{2} \delta_{c,v}^a M_{c,v}^{c,A} \quad (7.2)$$

Поскольку след $M_{b,v}^{a,A}$ равен нулю:

$$M_{a,A}^{a,A} = 0, \quad (7.3)$$

то последнее слагаемое в (7.2) преобразуется по представлению (8.1), а первое - по представлению (8 + 1,3) группы SU (3) x SU (2). Следовательно, тензор

$$\frac{1}{2} \delta_b^a M_{c,v}^{c,A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(M_{1,v}^{1,A} + M_{2,v}^{2,A}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(M_{1,v}^{1,A} + M_{2,v}^{2,A}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} P_B^A & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} P_B^A \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

описывает октет псевдоскалярных мезонов, а тензор

$$M_{b,v}^{a,A} - \frac{1}{2} \delta_b^a M_{c,v}^{c,A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(M_{1,v}^{1,A} - M_{2,v}^{2,A}) & M_{2,v}^{1,A} \\ M_{1,v}^{2,A} & -\frac{1}{2}(M_{1,v}^{1,A} - M_{2,v}^{2,A}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} V_{0v}^A & V_{+1v}^A \\ V_{-1v}^A & -\frac{1}{2} V_{0v}^A \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

^{x/}Синглет в (7.1) резервируется для η' -мезона (спин-четность 0⁻, масса 957 МэВ).

нужно сопоставить нонету мезонов 1⁻ (числами 0, ± 1 в последней матрице указана величина проекции спина). Всему выражению (7.2), очевидно, соответствует следующая 2 x 2 матрица:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(P + V_0) & V_{+1} \\ V_{-1} & \frac{1}{2}(P - V_0) \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

Отсюда особенно хорошо видно, что условие (7.3) сводится к равенству

$$\text{Sp } P = P_A^A = 0$$

и вовсе не требует обращения в нуль следа тензора V_B^A . Именно поэтому в 35-плет M_{β}^{α} входят все 9 векторных мезонов: SU (3) - октет и SU(3) - синглет.

В этой связи возникает вопрос о расположении в нонете V_B^A нейтральных частиц ω и ϕ . Напомним, что в схеме SU (3) ω -мезон считался унитарным синглетом, а ϕ -мезон входил в диагональные компоненты октета:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \rho^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \phi, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \rho^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \phi, \quad -\frac{2}{\sqrt{6}} \phi.$$

Теперь нет никаких оснований полагать, что унитарная классификация должна сохраниться, а естественно думать, что физические ω - и ϕ - мезоны, отвечающие классификации по группе SU (6), являются некоторыми линейными комбинациями прежних ω и ϕ (ниже эти последние будут отмечаться штрихами):

$$\begin{aligned} \phi &= \cos \alpha \phi' + \sin \alpha \omega', \\ \omega &= -\sin \alpha \phi' + \cos \alpha \omega'. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Преобразование (7.7), очевидно, можно интерпретировать как поворот в плоскости ($\phi' \omega'$) на угол α .

Для определения величины α необходима дополнительная физическая информация. Она следует из предположения, что ϕ - и ω - мезоны принадлежат к разным представлениям группы "странного" спина SU (2)_S, рассмотренной в § 5, или, что эквивалентно, к разным представлениям группы Вигнера SU (4). Именно, для ϕ -мезона полагают S = 1, а для ω -мезона - S = 0. Поскольку преобразование группы SU (2)_S действуют лишь на индексы (a, 3), то ϕ может находиться в матрице V_B^A только в правом нижнем углу, а ω , наоборот, нельзя помещать в этот угол. В итоге V_B^A записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\omega & & \rho^+ & & K^{*+} \\ & \rho^- & & -\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\omega & K^{*0} \\ & & K^{*-} & & \phi \\ & & & K^{*0} & \end{pmatrix}, \quad (7.8)$$

что соответствует $\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

По трансформационным свойствам относительно $SU(2)_S$ - группы все частицы, входящие в тензор (7.8), делятся на три категории:

1. Скаляры - $\rho, \omega,$
2. Вектор - $\phi,$
3. Спиноры - $K^*, K^{*0}.$

В модели кварков этому разбиению отвечает тот факт, что ω и ρ могут быть построены только из "нестранных" компонент $p', \bar{p}', n', \bar{n}', \phi$ - мезон - только из странных Λ' - и $\bar{\Lambda}'$ - компонент, а K^* - мезоны - из тех и других. Можно сказать, что частицы 1, 2 и 3 группы в (7.8) образуют, соответственно, "нестранный", "странный" и "полустранный" миры.

Возвращаясь к псевдоскалярным мезонам, мы можем легко установить, что для π - и η - мезонов $S = 0$, а для K - мезонов $S = \frac{1}{2}$. Однако уже нельзя сказать, что η - мезон принадлежит к "нестранному" миру, поскольку в модели кварков он строится из всех 3-х компонент:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{3}}(p'\bar{p}' + n'\bar{n}' + \bar{\Lambda}'\Lambda').$$

Тем не менее странный спин η - мезона равен нулю, а поэтому и для него эта классификация является приемлемой.

Понятие "странного" спина оказывается ценным при анализе распадов ϕ - мезона. Именно, подавленность распадов $\phi \rightarrow \pi\rho$ по отношению к распадам $\phi \rightarrow K\bar{K}$ можно объяснить, например, той причиной, что в первом случае S - спин не сохраняется, а во втором - сохраняется.

Заканчивая рассмотрение 35-плета мезонов, выпишем его явно в виде 6×6 матрицы со всеми множителями нормировки x^i .

x^i Авторы благодарны Д. Факирову за помощь в составлении матрицы (7.9).

Т а б л и ц а 2

	Размерность по $SU(6)$	Мультиплетность по $SU(3)$	Мультиплетность по $SI(2)$		
(01010)	189	1	1,5		
		8	1,3 (2 раза), 5		
		10	3		
		10*	3		
		27	1		
(20010)	280	1	3		
		8	1,3 (2 раза), 5		
		10	1,3,5		
		10*	1		
		27	3		
(20002)	405	1	1,5		
		8	1,3 (2 раза), 5		
		10	3		
		10*	3		
		27	1,3,5		
(30003)	2895	1	3,7		
		8	1,3(2 раза), 5(2 раза), 7		
		10	1,3,5		
		10*	1,3,5		
		27	1,3 (3 раза), 5(2 раза), 7		
		35	3,5		
		35*	3,5		
		(11011)	3875	1	1,3 (2 раза), 5,7
				8	1 (3 раза), 3 (7 раз) 5 (6 раз), 7(2 раза)
				27	1 (3 раза), 3 (6 раз) 5 (4 раза), 7
10	1 (2 раза), 3 (4 раза), 5 (3 раза), 7				
10*	1 (2 раза), 3(4 раза) 5 (3 раза), 7				
35	1,3 (2 раза), 5				
35*	1,3 (2 раза), 5				

$\frac{1}{2}[\pi^0 + \frac{\eta}{\sqrt{3}} + \omega(0) + \rho^0(0)]$	$\frac{1}{\sqrt{2}}[\pi^+ + \rho^+(0)]$	$\frac{1}{\sqrt{2}}[K^+ + K^{*+}(0)]$	$\frac{1}{\sqrt{2}}[\rho^0(1) + \omega(1)]$	$\rho^+(1)$	$K^{*+}(1)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}[\pi^- + \rho^-(0)]$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}[\pi^0 - \frac{\eta}{\sqrt{3}} - \omega(0) + \rho^0(0)]$	$\frac{1}{\sqrt{2}}[K^0 + K^{*0}(0)]$	$\rho^-(1)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}[\rho^0(1) - \omega(1)]$	$K^{*0}(1)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}[K^- + K^{*-}(0)]$	$\rho^+(-1)$	$-\frac{\eta}{\sqrt{3}} + \frac{\phi(0)}{\sqrt{2}}$	$K^{*-}(1)$	$K^{*0}(1)$	$\phi(1)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}[\rho^0(-1) + \omega(-1)]$	$\rho^+(-1)$	$K^{*+}(-1)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}[\pi^0 + \frac{\eta}{\sqrt{3}} - \omega(0) - \rho^0(0)]$	$\frac{1}{\sqrt{2}}[\pi^+ - \rho^+(0)]$	$\frac{1}{\sqrt{2}}[K^+ - K^{*+}(0)]$
$\rho^-(-1)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}[\rho^0(-1) + \omega(-1)]$	$K^{*0}(-1)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}[\pi^- - \rho^-(0)]$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}[\pi^0 - \frac{\eta}{\sqrt{3}} + \omega(0) - \rho^0(0)]$	$\frac{1}{\sqrt{2}}[K^0 - K^{*0}(0)]$
$K^{*-}(-1)$	$K^{*0}(-1)$	$\phi(-1)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}[K^{*-} - K^{*-}(0)]$	$\frac{1}{\sqrt{2}}[K^0 - K^{*0}(0)]$	$-\frac{\eta}{\sqrt{3}} - \frac{\phi(0)}{\sqrt{2}}$

§ 8. Барийный 56-плет

Барьоны в SU(6) - схеме описываются полностью симметричным контравариантным тензором 3-го ранга V^{aby} , имеющим 56 компонент.

В этот мультиплет входят декуплет со спином 3/2 и октет со спином 1/2:

$$(10, 4) + (8, 2) = 56 \quad (8.1)$$

Чтобы убедиться в справедливости (8.1), введем опять двузначные обозначения $\alpha = (A, a), \beta = (B, b), \gamma = (C, c)$. Компоненты тензора SU(3), описываемые индексами A, B, C, должны иметь ту же симметрию, что и компоненты тензора SU(2) (спиновой функции). Только тогда тензор SU(6) будет полностью симметричен по всем трем индексам. Спиновая волновая функция третьего ранга (по симметрии - система из трех кварков) может быть либо полностью симметричной, что отвечает спину 3/2, либо быть антисимметричной по двум индексам - спин 1/2. В соответствии с этим тензор SU(3) должен быть также либо симметричным по всем трем индексам и отвечать декуплету, либо же антисимметричным по двум индексам и, в силу формулы $b^b_a = \epsilon_{acd} V^{cdB}$, сводиться к октету.

В явном виде компоненты V^{aby} выражаются через компоненты тензоров SU(3) и SU(2) следующим образом:

$$V^{aby} = \phi^{abc} d^{ABC} + \frac{1}{3\sqrt{2}} [\epsilon^{ab} \chi^o \epsilon^{ABD} b^c_D + \epsilon^{bo} \chi^a \epsilon^{BCD} b^A_D + \epsilon^{oa} \chi^b \epsilon^{CAD} b^B_D], \quad (8.2)$$

где d^{ABC} - декуплет барийных резонансов, ϕ^{abc} - его спиновая функция, χ^o - спиновая функция октета барьонов b^c_D . Обе спиновые функции ϕ^{abc} и χ^o нормированы на единицу. Числовой множитель перед октетной частью в (8.2) выбран с таким расчетом, чтобы квадрат модуля тензора V^{aby} сводился к сумме квадратов модулей волновых функций всех частиц.

Иногда октетную часть записывают несколько иначе:

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} [(2\epsilon^{ab} \chi^o + \epsilon^{bo} \chi^a) \epsilon^{ABD} b^c_D + (\epsilon^{ab} \chi^o + 2\epsilon^{bo} \chi^a) \epsilon^{BCD} b^A_D],$$

что связано с существованием тождеств

$$\epsilon^{ab} \chi^o + \epsilon^{bo} \chi^a + \epsilon^{oa} \chi^b = 0 \quad (8.3)$$

(полностью антисимметричный спиновый тензор 3-го ранга тождественно равен нулю) и

$$\epsilon^{ABD} b_D^C + \epsilon^{BCD} b_D^A + \epsilon^{CAD} b_D^B = 0 \quad (8.4)$$

(полностью антисимметричный унитарный тензор 3-го ранга эквивалентен скаляру, который в данном случае есть $b_A^A = 0$).

Распределение частиц по компонентам 56-плета описывается кубом $6 \times 6 \times 6$. Мы не будем пытаться изображать этот куб, а просто перечислим все различные элементы тензора $V^{ab\gamma}$ (в скобках рядом с символами частиц указаны величины проекций спина):

$a\beta\gamma$	С о с т о я н и я
111	$\Delta_{\delta}^{++} (3/2)$
112	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_{\delta}^{+} (3/2)$
113	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Sigma_{\delta}^{+} (3/2)$
114	$\Delta_{\delta}^{++} (1/2)$
115	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_{\delta}^{+} (1/2) + \frac{\sqrt{2}}{3} p (1/2)$
116	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Sigma_{\delta}^{+} (1/2) - \frac{\sqrt{2}}{3} \Sigma^{+} (1/2)$
122	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_{\delta}^{0} (3/2)$
123	$\frac{1}{\sqrt{6}} \Sigma_{\delta}^{0} (3/2)$
124	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_{\delta}^{+} (1/2) - \frac{1}{3\sqrt{2}} p (1/2)$
125	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_{\delta}^{0} (1/2) + \frac{1}{3\sqrt{2}} n (1/2)$
126	$\frac{1}{\sqrt{6}} \Sigma_{\delta}^{0} (1/2) + \frac{1}{3} \Sigma^{0} (1/2)$
133	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Xi_{\delta}^{0} (3/2)$
134	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Sigma_{\delta}^{+} (1/2) + \frac{1}{3\sqrt{2}} \Sigma_{\delta}^{+} (1/2)$
135	$\frac{1}{\sqrt{6}} \Sigma_{\delta}^{0} (1/2) - \frac{1}{6} [\Sigma^{0} (1/2) + \sqrt{3} \Lambda (1/2)]$
136	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Xi_{\delta}^{0} (1/2) + \frac{1}{3\sqrt{2}} \Xi^{0} (1/2)$
144	$\Delta_{\delta}^{++} (-1/2)$
145	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_{\delta}^{+} (-1/2) + \frac{1}{3\sqrt{2}} p (-1/2)$
146	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Sigma_{\delta}^{+} (-1/2) - \frac{1}{3\sqrt{2}} \Sigma^{+} (-1/2)$

155	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_{\delta}^{0} (-1/2) + \frac{\sqrt{2}}{3} n (-1/2)$
156	$\frac{1}{\sqrt{6}} \Sigma_{\delta}^{0} (-1/2) + \frac{1}{6} [\Sigma^{0} (-1/2) - \sqrt{3} \Lambda (-1/2)]$
166	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Xi_{\delta}^{0} (-1/2) + \frac{\sqrt{2}}{3} \Xi^{0} (-1/2)$
222	$\Delta_{\delta}^{-} (3/2)$
223	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Sigma_{\delta}^{-} (3/2)$
224	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_{\delta}^{0} (1/2) - \frac{\sqrt{2}}{3} n (1/2)$
225	$\Delta_{\delta}^{-} (1/2)$
226	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Sigma_{\delta}^{-} (1/2) + \frac{\sqrt{2}}{3} \Sigma^{-} (1/2)$
233	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Xi_{\delta}^{-} (3/2)$
234	$\frac{1}{\sqrt{6}} \Sigma_{\delta}^{0} (1/2) - \frac{1}{6} [\Sigma^{0} (1/2) - \sqrt{3} \Lambda (1/2)]$
235	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Sigma_{\delta}^{-} (1/2) - \frac{1}{3\sqrt{2}} \Sigma^{-} (1/2)$
236	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Xi_{\delta}^{-} (1/2) + \frac{1}{3\sqrt{2}} \Xi^{-} (1/2)$
244	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_{\delta}^{+} (-1/2) - \frac{\sqrt{2}}{3} p (-1/2)$
245	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_{\delta}^{0} (-1/2) - \frac{1}{3\sqrt{2}} n (-1/2)$
246	$\frac{1}{\sqrt{6}} \Sigma_{\delta}^{0} (-1/2) + \frac{1}{6} [\Sigma^{0} (-1/2) + \sqrt{3} \Lambda (-1/2)]$
255	$\Delta_{\delta}^{-} (-1/2)$
256	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Sigma_{\delta}^{-} (-1/2) + \frac{1}{3\sqrt{2}} \Sigma^{-} (-1/2)$
266	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Xi_{\delta}^{-} (-1/2) + \frac{\sqrt{2}}{3} \Xi^{-} (-1/2)$
333	$\Omega^{-} (3/2)$
334	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Xi_{\delta}^{0} (1/2) - \frac{\sqrt{2}}{3} \Xi^{0} (1/2)$

335	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Xi^- (\frac{1}{2}) - \frac{\sqrt{2}}{3} \Xi^- (\frac{1}{2})$	
336	$\Omega^- (\frac{1}{2})$	
344	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Sigma^+ (\frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{3} \Sigma^+ (\frac{1}{2})$	
345	$\frac{1}{\sqrt{6}} \Sigma^0 (\frac{1}{2}) - \frac{1}{3} \Sigma^0 (\frac{1}{2})$	
346	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Xi^0 (\frac{1}{2}) - \frac{1}{3\sqrt{2}} \Xi^0 (\frac{1}{2})$	466 $\frac{1}{\sqrt{3}} \Xi^0 (-\frac{3}{2})$
355	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Sigma^+ (\frac{1}{2}) - \frac{\sqrt{2}}{3} \Sigma^+ (\frac{1}{2})$	555 $\Delta^+ (\frac{1}{2})$
356	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Xi^- (\frac{1}{2}) - \frac{1}{3\sqrt{2}} \Xi^- (\frac{1}{2})$	556 $\frac{1}{\sqrt{3}} \Sigma^- (\frac{1}{2})$
366	$\Omega^- (\frac{1}{2})$	566 $\frac{1}{\sqrt{3}} \Xi^- (-\frac{3}{2})$
444	$\Delta^+ (\frac{1}{2})$	666 $\Omega^- (-\frac{3}{2})$
445	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Delta^+ (\frac{1}{2})$	
446	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Sigma^+ (\frac{1}{2})$	
455	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Delta^0 (\frac{1}{2})$	
456	$\frac{1}{\sqrt{6}} \Sigma^0 (\frac{1}{2})$	

При классификации 56-плета по S -спину необходимо помнить, что группа $SU(2)_S$ действует лишь на индексы вида $(a,3)$. Поэтому все компоненты $\Psi^{A,B,C}$, у которых $A, B, C \neq 3$, обладают $S = 0$, компоненты с одной тройкой среди индексов A, B, C соответствуют $S = \frac{1}{2}$ и т.д. Например, у протона $S = 0$, у Ω^- -гиперона $S = \frac{3}{2}$.

Если строить 56-плет в модели кварков, то, как мы говорили, возникает формальная трудность, связанная с принципом Паули: все три кварка не могут одновременно находиться в S -состоянии. Поэтому либо должна быть нарушена теорема о связи спина и статистики, либо должны существовать разные типы кварков, причем такие, операторы рождения которых коммутируют друг с другом. Стремлением обойти эту трудность вызвана попытка отнесения барионов к полностью антисимметричному 20-компонентному тензору $\Psi^{AB\gamma}$, а также предположение об особой статистике кварков (пара-статистика $^{14}/x/$).

Все эти заботы отпадают, если кварки не существуют в свободном состоянии. В этом случае предположение о симметричном состоянии трех кварков не приводит к противоречию, так как квантование частиц со спином половина по Бозе означает лишь, что для них невозможно построить вакуум (сделать энергию положительной).

^{x/} См. также §§ 1 и 6.

Если, однако, предположить, что кварки коммутируют, то возникает новая трудность. В системе из двух протонов их перестановка должна приводить к изменению знака волновой функции. В то же время перестановка трех пар кварков, согласно предположению, не меняет знака. Выход из этого парадокса состоит в том, что обмен кварками может совершаться только в форме связанного состояния - обмена мезоном. Поэтому волновая функция двух протонов не обязана быть симметричной относительно перестановки двух кварков, принадлежащих разным протонам. Она обладает свойствами симметрии только относительно перестановок кварков "внутри" одного протона. Во всяком случае описанный парадокс не приводит ни к каким реальным трудностям.

§ 9. Массовые формулы в $SU(6)$

Поскольку наблюдаемые массы частиц, входящих в один и тот же $SU(6)$ -мультиплет, вообще говоря, различны, то $SU(6)$ -симметрия является лишь приближением к действительности и с необходимостью должна нарушаться. Возникает вопрос о тензорных свойствах возмущения, ответственного за это нарушение и приводящего к расщеплению масс.

Сразу ясно, что такое возмущение обязано быть скаляром относительно группы $SU(2)_J$, так как частицы должны обладать определенным спином J . Поэтому симметрия возмущенной системы не может быть выше, чем $SU(3)_X \times SU(2)_J$.

Чтобы получить расщепление внутри унитарных мультиплетов, предположим, как обычно, что возмущение является смесью $SU(3)$ -синглета и $(3,3)$ -компоненты октета. Это приводит к группе симметрии $U(1)_Y \times SU(2)_I \times SU(2)_J$. Таким образом, заключаем, что возмущение, ответственное за расщепление масс внутри $SU(6)$ -мультиплетов, т.е. добавка к первоначальному массовому оператору, имеет трансформационные свойства состояния с $J = Y = I = 0$.

Состояния этого типа содержатся в самосопряженных представлениях 1, 35, 189, 405 и т.д., что можно увидеть непосредственно, если выписать содержание названных представлений по подгруппе $SU(3)_X \times SU(2)_J$ (см. таблицу II § 6):

$$\begin{aligned}
 35 &= (1,3) + (8,3) + (8,1), \\
 189 &= (1,1) + (8,1) + (27,1) + 2(8,3) + (10,3) + (10^*,3) + (1,5) + (8,5), \\
 405 &= (1,1) + (8,1) + (27,1) + 2(8,3) + (10,3) + (10^*,3) + (27,3) + (1,5) + \\
 &\quad (8,5) + (27,5).
 \end{aligned} \tag{9.1}$$

Выясним вначале, какой вклад в массовый оператор вносит представление 35. В самом общем случае тензорный оператор M_{ν}^{μ} , имеющий симметрию 35-плета, можно записать в виде:

$$M_{\nu}^{\mu} = a_1 A_{\nu}^{\mu} + a_2 (A \cdot A)_{\nu}^{\mu} + \dots + a_5 (AAAAA)_{\nu}^{\mu}, \quad (9.2)$$

где A_{ν}^{μ} - генераторы $SU(6)$ (см. § 5). Нетрудно установить, что состоянию $J = Y = I = 0$ в (9.2) отвечает комбинация:

$$M_3^3 + M_6^6 = M_{2,3}^{3,3}. \quad (9.3)$$

Подставляя (9.2) в (9.3), с точностью до квадратичных по A_{ν}^{μ} членов будем иметь

$$M_{35} = M_3^3 + M_6^6 = a_1 (A_3^3 + A_6^6) + a_2 [(AA)_3^3 + (AA)_6^6]. \quad (9.4)$$

После простых вычислений, для проведения которых необходимо привлечь лишь некоторые определения из § 5, формула (9.4) принимает вид:

$$M_{35} = M_1 Y + M_2 (2S(S+1) - C_2^{(4)} + \frac{Y^2}{4}), \quad (9.5)$$

где S - оператор "странного" спина, $C_2^{(4)}$ - квадратичный оператор Казимира группы $SU(4)$, Y - гиперзаряд. В целом, с учетом вклада от $SU(6)$ - синглета, получаем следующее выражение для массового оператора ^{xx/7,8/}:

$$M = M_0 + M_1 Y + M_2 (2S(S+1) - C_2^{(4)} + \frac{Y^2}{4}). \quad (9.6)$$

В применении к 35-плету мезонов ^{xx/} (9.6) дает (ср. с § 3):

1. Прежнее соотношение для псевдоскалярных мезонов

$$K - \pi = 3(\eta - \pi).$$

2. Равенство масс ρ и ω , а также соотношение

$$\phi + \rho = 2K^*.$$

3. "Правило интервалов":

$$K^* - \rho = K - \pi;$$

^{x/} Мы по-прежнему считаем, что в случае мезонов получаются формулы для квадратов масс, а в случае барионов - для масс в первой степени. Кроме того, в первом случае, конечно, $M_1 = 0$.

^{xx/} В представлении 35 формула (9.2) точно содержит лишь два первых слагаемых, поскольку в этом случае степени $(AAA)_{\nu}^{\mu}$, $(AAAA)_{\nu}^{\mu}$ и $(AAAAA)_{\nu}^{\mu}$ сводятся к первым двум степеням.

Но не дает зависимости масс от обычного спина.

Формула (9.6) оказывается неудовлетворительной и для описания расщепления масс в 56-плете. Действительно, поскольку для 56-плета, имеет место тождество

$$2S(S+1) - C_2^{(4)} + \frac{Y^2}{2} = -8Y - \frac{15}{2}, \quad (9.7)$$

соотношение (9.6) становится совсем простым:

$$M = a + bY, \quad (9.8)$$

что явно плохо, т.к. отсутствует член формулы (3.4), содержащий $I(I+1) - \frac{Y^2}{4}$ и существенный для описания масс. Попробуем разобраться, почему формула (9.6) получилась менее эффективной, чем соответствующая формула $SU(3)$ с октетным возмущением. Слагаемое в произведении $56^* \times 56$, отвечающее току, состоит только из одного F - произведения (антисимметричного относительно замены $N \rightarrow \bar{N}$), в то время как в схеме $SU(3)$ ток содержал произвольную комбинацию F - и D - произведений. Поэтому в схеме $SU(6)$ возникает только один тип связи и соответственно в формуле (9.8) появляется только один член (описывающий линейную зависимость от гиперзаряда).

Возвращаясь снова к мезонному случаю, заметим, что в схеме $SU(3)$ мультиплеты P и V выступали порознь, и поэтому вопрос о зависимости их масс от спина просто не возникал. Такая зависимость могла бы появиться, если бы мы, кроме октетного возмущения (поля N_{ν}^A), рассмотрели бы еще и унитарный синглет, связанный по-разному с обоими мультиплеттами.

Таким образом, для усовершенствования массовых формул необходимо включить связь с тензорами $SU(6)$ более высокого ранга, имеющими в рамках $SU(3)$ октетный характер, а, кроме того, добавить еще возмущение от $SU(3)$ синглета.

Рассмотрим в связи с этим самосопряженные представления 189 и 405. Отвечающие им неприводимые тензорные операторы имеют вид:

$$\begin{aligned} M_{\gamma\delta}^{a\beta} & - (189) - \text{плет}, \\ M_{\gamma\delta}^{a\beta} & - (405) - \text{плет}, \end{aligned} \quad (9.9)$$

причем все шпуры считаются равными нулю.

Теперь, вводя необходимое число произвольных постоянных, строим операторы (9.9) из генераторов A_{β}^{α} , выделяем из них комбинации, преобразующиеся по представлениям (1.1) и (8.1) группы $SU(3) \times SU(2)$, (см. (9.1) и полагаем унитарные индексы равными 3.

В результате ^{18/} октетная часть, содержащаяся в представлении 189, приводит к массовой формуле:

$$M_{(189)}^{(8)} = a + b\{[2J(J+1) - C_2^{(8)}] + 3[2I(I+1) - \frac{1}{2}Y^2 - 2N(N+1) + 2S(S+1)] - \frac{3}{4}[2S(S+1) - C_2^{(4)} + \frac{1}{4}Y^2]\} \quad (9.10)$$

Принадлежащий этому же представлению унитарный синглет дает:

$$M_{(189)}^{(1)} = d + e[2J(J+1) - C_2^{(8)}] \quad (9.11)$$

Октетная часть и унитарный синглет представления 405 вносят соответственно следующие вклады:

$$M_{(405)}^{(8)} = f + g\{[2J(J+1) + C_2^{(8)}] + \frac{21}{8}[2S(S+1) - C_2^{(4)} + \frac{Y^2}{4}] + 3[2I(I+1) - \frac{1}{2}Y^2 + 2N(N+1) - 2S(S+1)]\} \quad (9.12)$$

$$M_{(405)}^{(1)} = k + \ell[2J(J+1) + C_2^{(8)}] \quad (9.13)$$

где a, \dots, ℓ — произвольные коэффициенты, зависящие лишь от операторов Казимира группы $SU(6)$. Смысл квантовых чисел, фигурирующих в (9.10), разъяснен выше. Общая массовая формула, представляющая собой сумму выражений (9.6), (9.10) — (9.13), содержит 7 произвольных постоянных и выглядит так:

$$M = M_0 + M_1 C_2^{(8)} + M_2 J(J+1) + M_3 Y + M_4 [2S(S+1) - C_2^{(4)} + \frac{1}{4}Y^2] + M_5 [N(N+1) - S(S+1)] + M_6 [I(I+1) - \frac{1}{2}Y^2] \quad (9.14)$$

В представлении 56, учитывая тождества

$$2J(J+1) - C_2^{(8)} = -9/2,$$

$$I(I+1) - \frac{1}{2}Y^2 - N(N+1) + S(S+1) = -Y + \frac{1}{2}$$

и выписанное ранее тождество (9.7), формуле (9.12) можно придать следующий простой вид:

$$M = M_0 + M_1 Y + M_2 [I(I+1) - \frac{1}{2}Y^2] + M_3 J(J+1). \quad (9.15)$$

Ясно, что из (9.14) получаются все соотношения $SU(3)$ — схемы между массами барионов, а кроме того, вытекает дополнительная информация о равенстве коэффициентов M_1 и M_2 в массовой формуле для октета и декуплета (см. § 3). Роль последнего слагаемого в (9.14), очевидно, сводится к тому, чтобы давать расщепление масс частиц по спине.

Значительно менее эффективной формула (9.12) оказывается в том случае, когда мы применяем ее к представлению 35. Из-за слишком большого числа произвольных постоянных здесь удается получить лишь одно соотношение между массами псевдоскалярных мезонов, известное и в $SU(3)$ -теории (см. § 3):

$$K = \frac{1}{2}(3\eta + \pi).$$

Для улучшения формулы (9.14) было предложено^{18/} не учитывать в выражении вклад от представления (9.10), ограничиваясь лишь вкладом от синглета (9.11). Если стать на эту точку зрения, то в формуле (9.14) следует приравнять друг другу коэффициенты M_5 и M_6 , так что в результате она примет вид^{х/}:

$$M = a + bC_2^{(8)} + cJ(J+1) + dY + e[2S(S+1) - C_2^{(4)} + \frac{1}{4}Y^2] + f[I(I+1) - \frac{Y^2}{4} + N(N+1) - S(S+1)]. \quad (9.15)$$

Из (9.15) для 35-плета получается новое соотношение, связывающее массы псевдоскалярных и векторных мезонов:

$$\omega\phi = \frac{1}{2}(\pi + K^* - K)(3K^* - \rho + K - \pi) - \frac{1}{6}(4K^* - \rho)(5K^* - \rho + \pi - K - 2\omega - 2\phi). \quad (9.16)$$

Равенство (9.16) выполняется с хорошей точностью. Это видно хотя бы из того, что после применения к (9.16) "правила интервалов"

$$K^* - \rho = K - \pi$$

данное соотношение превращается в известную квадратичную формулу Швингера:

$$(\omega - \rho)(\phi - \rho) = \frac{4}{3}(K^* - \rho)(\omega + \phi - 2K^*), \quad (9.18)$$

хорошо согласующуюся с опытом. Однако само "правило интервалов", в отличие от ра-

^{х/} Для 56-плета формула (9.16) эквивалентна (9.15).

нее рассмотренного случая (см. (9.8)), никак не следует из общей формулы (9.15).

Теперь дадим некоторые пояснения к выводу соотношения (9.16). Вначале необходимо заметить, что массовый оператор (9.15) из-за наличия в нем слагаемого $C_2^{(8)}$ не является диагональным в подпространстве (ϕ, ω) , поскольку эти частицы теперь определяются как линейные комбинации унитарного синглета ω' и (3,3) - компоненты октета ϕ (см. § 7)

$$\begin{aligned}\omega &= -\sqrt{\frac{1}{3}}\phi' + \sqrt{\frac{2}{3}}\omega', \\ \phi &= \sqrt{\frac{2}{3}}\phi' + \sqrt{\frac{1}{3}}\omega'.\end{aligned}\quad (9.19)$$

Поэтому массы "реальных" ω и ϕ - мезонов должны вычисляться из секулярного уравнения:

$$\begin{vmatrix} \langle \omega | M | \omega \rangle - \lambda & \langle \omega | M | \phi \rangle \\ \langle \phi | M | \omega \rangle & \langle \phi | M | \phi \rangle - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (9.20)$$

$$(\lambda_1 = \omega, \lambda_2 = \phi).$$

Однако вместо того, чтобы решать (9.20), можно выписать известные тождества

$$\omega + \phi = \langle \omega | M | \omega \rangle + \langle \phi | M | \phi \rangle,$$

$$\omega \phi = \det \begin{vmatrix} \langle \omega | M | \omega \rangle & \langle \omega | M | \phi \rangle \\ \langle \phi | M | \omega \rangle & \langle \phi | M | \phi \rangle \end{vmatrix} \quad (9.21)$$

из которых затем исключить постоянные a, b, c, \dots , привлекая для этого остальные матричные элементы оператора M . В результате и получается формула (9.16).

К выводу формулы для масс 35-плета можно подойти и несколько иначе. Именно, предположим, что характер нарушения симметрии (взаимодействие с вакуумом) вообще не связан с представлением $SU(8)$, а определяется лишь представлениями $SU(3)$. Такое предположение довольно естественно, так как взаимодействие с вакуумом не переносит спина, а потому не может отражать никакой спиновой симметрии. Как бы то ни было, допустим, что возмущение имеет характер октета $SU(3)$ и синглета $SU(3)$. Октет $SU(3)$ не является представителем какого-либо одного мультиплета $SU(6)$, а может быть разложен по сумме представлений 35 и 405 (добавление более высоких представлений не меняет дела). Аналогично синглет $SU(3)$ связан с суммой пред-

ставлений 189 и 405 (еще раз напомним, что только второй из них вносит вклад в массу 56). Представление 405, как это можно показать прямым вычислением, приводит к току, в котором и F и D часть смешаны в отношении $5/8$. Рассматриваемая сумма 189 и 405 пропорциональна просто $J(J+1)$. Поэтому добавление новых членов "развязывает" F и D токи и обеспечивает нужную зависимость от спина. В результате мы приходим к формулам (9.15) для барионов и формуле

$$M = M_0 + M_2 [2S(S+1) - C_2^{(4)} + \frac{Y^2}{4}] + M_3 J(J+1)$$

для мезонов. Таким образом, в $SU(6)$ формулы для расщепления масс можно описать в терминах двух спирионов, имеющих трансформационные свойства $SU(3)$ -октета и $SU(3)$ -синглета. Независимо от модельных представлений эти формулы можно рассматривать для описания реальных масс частиц.

Для пользования массовыми формулами в $SU(6)$ - теории полезно иметь сводную таблицу значений квантовых чисел частиц, входящих в рассматриваемые мультиплеты. Такая таблица приводится ниже.

Частицы	I	N	S	J	$C_2^{(8)}$	$C_2^{(4)}$
π	1	0	0	0	6	8
ρ	1	1	0	1	6	8
ω	0	1	0	1	...	8
ϕ'	0	1	6	8
η	0	0	0	0	6	0
K	1/2	1/2	1/2	0	6	15/4
K*	1/2	1/2	1/2	1	6	15/4
\bar{K}	1/2	1/2	1/2	0	6	15/4
\bar{K}^*	1/2	1/2	1/2	1	6	15/4
ϕ	0	0	1	1	...	0
ω'	0	1	0	...
N	1/2	1/2	0	1/2	6	63/4
Δ_δ	3/2	3/2	0	3/2	12	63/4
Σ	1	1	1/2	1/2	6	9
Λ	0	0	1/2	1/2	6	9
Σ_δ	1	1	1/2	3/2	12	9
Ξ	1/2	1/2	1	1/2	6	15/4
Ξ_δ	1/2	1/2	1	3/2	12	15/4
Ω	0	0	3/2	3/2	12	0

Примечание.

Точки означают, что частица не является "собственным состоянием" соответствующего оператора.

§ 10. Магнитные моменты в SU (6)

Одно из наиболее ярких достижений в теории SU (6) – симметрии связано с получением отношения магнитных моментов нейтрона и протона. Именно, теория дает

$$\beta = \frac{\mu(n)}{\mu(p)} = -\frac{2}{3}, \quad (10.1)$$

в то время как экспериментальное значение β равно $-0,684$.

Соотношение (10.1) может быть установлено различными способами.

В основе одного из них /10,11/ лежит предположение о том, что полный электромагнитный ток барионов и барионных резонансов, входящих в 56-плет $V^{ab\gamma}$, принадлежит 35-мерному представлению группы SU (6). Поскольку, с другой стороны, группа SU(6) соответствует нерелятивистскому рассмотрению, то указанный ток должен иметь вид

$$\vec{j} = Q[\psi^* \vec{\nabla} \psi - (\vec{\nabla} \psi^*) \psi] + \mu \text{rot } \psi^* \vec{\sigma} \psi,$$

где первый член отвечает электрическому току (Q – электрический заряд), а второй – току намагничения (μ – магнитный момент). Нетрудно заметить, что эти два члена обладают различными трансформационными свойствами относительно группы

SU (3) \times SU (2). Так, электрический ток отвечает представлению (8,1) этой группы, а ток намагничения – представлению (8,3). Следовательно, если мы построим из функций $V^{ab\gamma}$ и $V^*_{ab\gamma}$ ковариантный относительно группы SU (6) тензор тока $J^{\alpha}_{a'}$, а затем выделим из него ту часть, которая преобразуется по представлению (8.3) подгруппы SU (3) \times SU (2), то вклад в это выражение от различных частиц будет пропорционален величинам их магнитных моментов.

Теперь произведем конкретные вычисления. Ясно, что

$$J^{\alpha}_{a'} = V^*_{a'\beta\gamma} V^{ab\gamma} - \frac{1}{6} \delta^{\alpha}_{a'} \langle V^* V \rangle, \quad (10.2)$$

где

$$\langle V^* V \rangle \equiv V^*_{ab\gamma} V^{ab\gamma}.$$

Подставляя в (10.2) явный вид волновых функций $V^{ab\gamma}$ и $V^*_{ab\gamma}$ (см. (8.2)), будем иметь:

$$J^{\alpha}_{a'} = J^{\alpha}_{a'A'} = d^*_{A'BC} d^{ABC} \phi^*_{a'bc} \phi^{abc} - \frac{1}{6} \delta^{\alpha}_{a'} \delta^{\Lambda}_{A'} d^*_{BCD} d^{BCD} +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{3} [\epsilon^{ab} \epsilon^{ABD} d^*_{A'BC} b^c_D \phi^*_{a'bc} \chi^0 + \epsilon_{A'BD} d^*_{a'bc} b^D_C \phi^{abc} \chi^0_C] + \frac{1}{6} \{ \delta^{\alpha}_{a'} (b^* b_F)_{A'}^{\Lambda} + \frac{2}{3} (\vec{\sigma}^{\alpha})_{a'}^{\Lambda} [3(b^* \vec{\sigma} b_D)_{A'}^{\Lambda} + 2(b^* \vec{\sigma} b_F)_{A'}^{\Lambda} + \delta^{\Lambda}_{A'} b^*_{BC} b^C_B] \}. \quad (10.3)$$

Здесь

$$(b^* b_F)_{A'}^{\Lambda} = b^*_{A'} b^{\Lambda}_F - b^*_{B'} b^{\Lambda}_F,$$

$$(b^* b_D)_{A'}^{\Lambda} = b^*_{A'} b^{\Lambda}_D + b^*_{B'} b^{\Lambda}_D - \frac{2}{3} \delta^{\Lambda}_{A'} b^*_{BC} b^C_B.$$

Легко сообразить, что представлению (8,3) в формуле (10.3) отвечает слагаемое

$$\frac{1}{9} (\vec{\sigma}^{\alpha})_{a'}^{\Lambda} [3(b^* \vec{\sigma} b_D)_{A'}^{\Lambda} + 2(b^* \vec{\sigma} b_F)_{A'}^{\Lambda}]. \quad (10.4)$$

Из (10.4) видно, что барионные токи F - и D -типов входят в полный ток в отношении 2 : 3. Поскольку величина $(\vec{p} \vec{\sigma} p)$ встречается в (10.4) "минус два" раза, в $(\vec{p} \vec{\sigma} p)$ – три раза, то согласно сказанному выше

$$\frac{\mu(n)}{\mu(p)} = -\frac{2}{3}.$$

Аналогичным образом могут быть найдены соотношения между магнитными моментами остальных частиц из 56-плета, а также соотношения между магнитными моментами переходов октет-декуплет. При этом, кроме равенств, полученных ранее в чистой SU (3)-схеме (см. § 4), возникают некоторые дополнительные связи. Например,

$$\mu(\Omega) = -\mu(p),$$

$$\langle p | \mu | \Delta_{\delta} \rangle = \frac{2}{3} \sqrt{2} \mu(p). \quad (10.5)$$

Для вычисления магнитных моментов частиц, диагональных по L -спину, в SU(6) схеме можно применять также формулу (4.3). Однако теперь в силу соотношения

$$\frac{F\text{-ток}}{D\text{-ток}} = \frac{2}{3}$$

постоянные a и b в (4.3) уже не являются независимыми. Поэтому для октета барионов будем иметь:

$$\mu_8 = \frac{2}{3} [(1/2 Q + 1)^2 - L(L+1)] \mu(p), \quad (10.6)$$

а для декуплета, благодаря равенству $L = 1 - 1/2 Q$,

$$\mu_{10} = Q \mu(p). \quad (10.7)$$

С помощью (10.6) и таблицы 8.4 нетрудно убедиться в справедливости (10.1).

Теперь опишем еще один способ вывода соотношений типа (10.1) и (10.5)^{19/}. Он целиком опирается на интерпретацию генератора $\mu_3 = gQJ_3$ в нижнем представлении как оператора третьей компоненты магнитного момента кварка (85). Для вычисления магнитного момента частицы, принадлежащей какому-либо высшему представлению и обладающей волновой функцией ϕ , необходимо лишь построить генератор μ_3 в этом представлении, а затем найти среднее значение $\langle \phi | \mu_3 | \phi \rangle$.

Прояллюстрируем сказанное рассмотренным выше примером с протоном и нейтроном. С помощью (8.2) легко установить, что волновые функции этих частиц имеют вид:

$$p = \sqrt{\frac{2}{3}} B^{11,11,22} - \frac{1}{\sqrt{3}} B^{11,12,21}, \quad (10.8)$$

$$n = \sqrt{\frac{2}{3}} B^{12,12,21} - \frac{1}{\sqrt{3}} B^{11,12,22}.$$

С другой стороны, по определению, генератор μ_3 в 56-мерном представлении записывается так:

$$\mu_3^{(56)} = \mu_3 \times I \times I + I \times \mu_3 \times I + I \times I \times \mu_3 \quad (10.9)$$

(I - единичная 6×6 -матрица).

Из (10.9) следует, что среднее значение оператора $\mu_3^{(56)}$ в состоянии $B^{a,A,b,B,c,C}$ равно:

$$\mu = \frac{g}{3} (1/2 p(1,1) - p(1,2) - p(1,3) - \frac{3}{2} p(2,1) + \frac{3}{2}), \quad (10.10)$$

где $p(a,A)$ есть число индексов (a,A) среди набора (a,A) , (b,B) , (c,C) . Составляя средние $\mu(p) = \langle p | \mu_3^{(56)} | p \rangle$, $\mu(n) = \langle n | \mu_3^{(56)} | n \rangle$ и принимая во внимание соотношения (10.8) и (10.10), получим окончательно:

$$\mu(p) = 1/2 g, \quad (10.11a)$$

$$\mu(n) = -1/3 g, \quad (10.11b)$$

откуда следует соотношение (10.1). Вычисляя аналогичным образом матричные элементы генератора μ_3 в 35-мерном представлении^{xx/}, можно с учетом (10.11a) выразить магнитные моменты векторных мезонов и магнитные моменты переходов между векторными и псевдоскалярными мезонами через $\mu(p)$:

$$\mu(\rho^+) = \mu(K^{*+}) = \mu(p) = 3 \langle \pi^+ | \mu | \rho^+ \rangle \quad (10.12)$$

и т.п. Равенства (10.12) подлежат проверке на опыте.

Последний из описанных нами методов вычисления μ физически соответствует сложению магнитных моментов кварков по правилам векторной модели^{10,16/}. Из (5.4) и (10.11a) вытекает, что магнитный момент кварка $\mu(q)$ и магнитный момент протона $\mu(p)$ связаны равенством:

$$\mu(q) = Q_q(p). \quad (10.13)$$

Если допустить, что кварк является обычной дираковской частицей и положить его магнитный момент $\mu(q)$ равным "магнетону" $\beta_q = \frac{Q_q}{2M_q}$, то, принимая во внимание экспериментальное значение $\mu(p) = 2,79 \beta$ ядер., можно оценить величину массы кварка M_q :

$$M_q = \frac{M_p}{2,79} = 336. \quad (10.14)$$

Предполагая теперь, что протон и нейтрон есть связанные состояния трех кварков, мы формально, в силу (10.14), имеем право считать эти системы очень "рыхлыми", а кварки - почти свободными^{xx/}. Тогда магнитные моменты $\mu(p)$ и $\mu(n)$ просто складываются из магнитных моментов кварков.

Существует другой, более предпочтительный (в условиях отсутствия экспериментальных данных о кварках) вариант интерпретации составной модели барионов в $SU(6)$ -схеме. А именно, можно предположить, что масса свободного кварка очень велика (например, больше 10 Гэв) и, соответственно, его дираковский магнитный момент мал, но,

^{xx/} Мы предполагаем, что g факторы кварка и антикварка одинаковы (знак заряда учитывается в μ_3). Если рассматривать мультиплеты, для которых необходимо использование неэквивалентных кварков, то предположение о том, что магнитный момент определяется матричным элементом генератора, эквивалентно допущению, что все кварки имеют один и тот же фактор Ланде. Вообще говоря, это не обязательно, и поэтому в общем случае в теорию будут входить произвольные постоянные: два отношения трех факторов Ланде.

При этом более тяжелые барионы следует описывать как системы кварков с положительной кинетической энергией, находящиеся внутри потенциального барьера. Очевидно, что время жизни такого квазистационарного состояния должно быть больше времени жизни самого бариона.

находясь в сильно связанном состоянии, эта частица обладает эффективно малой массой и увеличенным магнитным моментом. Такая точка зрения развивается в работе /15/, где на примере простой динамической модели показано, что описанный механизм действительно возможен, причем "увеличение" магнитного момента кварка, пребывающего в связанном состоянии, оказывается весьма значительным.

§ 11. Электромагнитное расщепление масс 56-плета

Если пренебречь разностью масс внутри изотопического мультиплета, то расщепление масс 56-плета хорошо описывается полученной выше формулой: Ω

$$M = M_0 + M_1 Y + M_2 [I(I+1) - \frac{1}{4} Y^2] + M_3 J(J+1). \quad (11.1)$$

Формула для электромагнитного расщепления /17,28,29/ выводится так же, как и формула (11.1), только при этом спин I надо заменить на спин L , гиперзаряд Y на $-Q$. В результате будем иметь:

$$\delta M_{EM} = -m_1 Q + m_2 [L(L+1) - \frac{1}{4} Q^2] + m_3 Q^2. \quad (11.2)$$

Мы не выписали слагаемое с $J(J+1)$, так как в нем может измениться лишь числовой коэффициент, но добавили член $= Q^2$, который связан с обычными механизмом поглощения и излучения фотона. Формула (11.2) описывает с помощью трех постоянных десять электромагнитных разностей масс: 4 в октете и 6 в декуплете. Таким образом, должно существовать 7 соотношений. Для октета получается лишь одно соотношение Глэшоу-Коулмана:

$$(\Xi^- - \Xi^0) + (n - p) = \Sigma^- - \Sigma^+. \quad (11.3)$$

Заметим, что поскольку Σ^0 не имеет определенного L спина (эта частица является смесью состояний с $L=0$ и $L=1$), то для $\Sigma^0 - \Sigma^+$ и $\Sigma^- - \Sigma^0$ никаких соотношений не возникает. Если положить $m_2 = 0$, то $\Sigma^- - \Sigma^0 = \Sigma^0 - \Sigma^+$ что противоречит опыту /30/:

$$\Sigma^- - \Sigma^0 = 4,87 \pm 0,12, \quad \Sigma^0 - \Sigma^+ = 3,38 \pm 0,28$$

Для декуплета из (11.2) находим три соотношения:

$$\begin{aligned} \Delta^+ - \Delta^0 &= \Sigma^{*+} - \Sigma^{*0}, \\ \Delta^0 - \Delta^- &= \Sigma^{*0} - \Sigma^{*-} = \Xi^{*0} - \Xi^{*-}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Три соотношения связывают также интервалы в октете и декуплете:

$$\begin{aligned} \Delta^0 - \Delta^+ &= n - p, \\ \Delta^- - \Delta^0 &= (n - p) + (\Sigma^- + \Sigma^+ - 2\Sigma^0), \\ \Delta^- - \Delta^+ &= 3(n - p). \end{aligned} \quad (11.5)$$

Соотношение (11.3) выполняется очень хорошо (ссылка /29/)

$$\begin{aligned} \Xi^- - \Xi^0 &= 6,5 \pm 1,0, \\ n - p &= 1,29, \\ \Sigma^- - \Sigma^+ &= 8,25 \pm 0,25. \end{aligned}$$

Экспериментальные данные для разности $\Sigma^{*-} - \Sigma^{*+}$ неопределенны (17 ± 7 и $4,3 \pm 2,2$). Из (11.4) следует:

$$\Sigma^{*-} - \Sigma^{*+} = 2(n - p) + (\Sigma^- + \Sigma^+ - 2\Sigma^0), \quad (11.6)$$

что равно 4,47 Мэв.

Измерена также разность /31/

$$\Delta^{*+} - \Delta^0 = -0,45 \pm 0,85.$$

Из формул (11.5) для той же разности получаем

$$\Delta^{*+} - \Delta^0 = -2(n - p) + (\Sigma^- + \Sigma^+ - 2\Sigma^0). \quad (11.7)$$

Правая часть равна -0,69.

Таким образом, мы видим, что схема симметрии $SU(6)$ дает вполне разумное описание электромагнитного расщепления масс барионов $1/2^+$ и барионных резонансов $3/2^+$.

§ 12. Заключение

Мы уже неоднократно отмечали, что $SU(6)$ - схема представляет собой нерелятивистскую теорию, в которой полностью игнорируется существование спин-орбитально-го взаимодействия. В настоящее время попытки включения группы $SU(6)$ в более широкую группу симметрии, согласующуюся с требованиями теории относительности, уже образовали целое направление /18/. Ясно, что для релятивистской формулировки $SU(6)$ -схемы прежде всего необходимо интерпретировать ее спиновую подгруппу $SU(2)$ как "малую группу" $SU(2)$, группы Пуанкаре \mathcal{P} , так как в противном случае спин не будет определен ковариантно. Следующий шаг, естественно, должен состоять в объединении всей группы \mathcal{P} с группой $SU(3)$. Такое объединение возникает в

результате тензорного умножения генераторов исходных групп, подобного описанному выше в § 5/18/. Разумеется, как и раньше, процедуре умножения должно предшествовать расширение алгебр Ли групп SU(3) и \mathcal{P} до таких алгебр, в которых умножение является обычным. Это приводит, во-первых (см. § 5), к необходимости рассмотрения алгебры Ли группы U(3) вместо SU(3). Что же касается генераторов группы Пуанкаре^{x/}

$$P^a, M^{mn} \quad (m = 0, 1, 2, 3), \quad (12.1)$$

то здесь ситуация оказывается сложнее. В самом деле, если исходить из "физического" (унитарного, бесконечномерного) представления группы \mathcal{P} , то для расширения соответствующей алгебры Ли до алгебры относительно обычного умножения потребовалось бы бесконечно много новых элементов. В итоге мы получили бы столь громоздкую конструкцию, что она вряд ли могла бы представлять физический интерес.

Поэтому целесообразно взять за основу четырехмерное (наивысшее) представление — ние группы Пуанкаре, в котором генераторы (12.1) задаются матрицами^{xx/}

$$M^{mn} = \frac{i}{4} (\gamma^m \gamma^n - \gamma^n \gamma^m), \quad P^a = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1 + i\gamma^5) \gamma^a, \quad (12.3)$$

где

$$\gamma^m \gamma^n + \gamma^n \gamma^m = 2g^{mn}, \quad \gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3,$$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\sigma} - \text{матрицы Паули.}$$

Легко убедиться, что для искомого расширения алгебры (12.3) необходимы два дополнительных элемента:

$$I = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \gamma^5.$$

Теперь рассмотрим алгебру, порождаемую всевозможными произведениями:

$$\Lambda_\mu^m = P^m \times F_\mu, \quad \Lambda_\mu^{(m,n)} = M^{mn} \times F_\mu, \quad \Lambda_\mu^{(5)} = \gamma^5 \times F_\mu,$$

$$\Lambda_\mu = I \times F_\mu \quad (12.4)$$

$$(F_\mu = \frac{1}{2} \lambda_\mu, \quad \mu = 0, 1, \dots, 8).$$

^{x/} Коммутационные соотношения для операторов (12.1), как известно, имеют вид:

$$[P^m, P^n] = 0; \quad [M^{lm}, P^n] = i(g^{mn} P^l - g^{ln} P^m), \quad (12.2)$$

$$[M^{mn}, M^{rs}] = i(g^{nr} M^{ms} - g^{mr} M^{ns} + g^{ns} M^{rm} - g^{ms} M^{rn}).$$

^{xx/} Реализация коммутационных соотношений (12.2) рассматривалась в /25/.

Этому случаю соответствует 108-параметрическая группа G, объединяющая группу Пуанкаре с группой внутренних симметрий SU(3). Нетрудно понять, что группу G можно записать в виде полупрямого произведения

$$G = GL(6, C) \cdot A_{36}, \quad (12.5)$$

где A_{36} — инвариантная 36-параметрическая абелева подгруппа, порождаемая генераторами Λ_μ^m , $GL(6, C)$ — общая линейная однородная группа в шести измерениях, имеющая 72 параметра. Если наложить условие унитарности, то $GL(6, C)$ заменится 70-параметрической группой $SL(6, C)$.

Введем в рассмотрение операторы $W_{k,\mu}$ и $W_{\mu'}$, полагая по определению

$$W_{k,\mu} = \frac{1}{2} \epsilon_{klmn} \Lambda_\mu^{(l,m)} \Lambda_0^n \quad (\mu = 0, 1, \dots, 8), \quad W_{\mu'} = \Lambda_{\mu'} \quad (\mu' = 1, \dots, 8) \quad (12.6)$$

где ϵ_{klmn} — абсолютно антисимметричный единичный тензор четвертого ранга. Очевидно, $W_{k,\mu}$ удовлетворяют условиям ортогональности: $W_{k,\mu} \Lambda_0^k = 0$. Легко сообразить, что 35 независимых величин W из (12.6) порождают группу, изоморфную SU(6), причем ее спиновая подгруппа SU(2) является "малой группой" группы \mathcal{P} . Таким образом, в рамках \mathcal{P}_U можно построить ковариантное обобщение SU(6) — схемы, рассмотренной в предыдущих параграфах.

В серии работ /21/ развивается другой подход к проблеме релятивистского расширения SU(6). Именно на роль фундаментальной группы симметрии, подобной группе \mathcal{P}_U , здесь выдвигается некоторая некомпактная 144-параметрическая группа $\tilde{U}(12)$, возникающая в результате тензорного умножения, аналогичного (5.2), алгебры всех шестнадцати γ -матриц на алгебру группы U(3). Очевидно, группа \mathcal{P}_U является подгруппой $\tilde{U}(12)$ и находится к ней примерно в том же отношении, в котором группа Пуанкаре \mathcal{P} находится к группе конформных преобразований четырехмерного пространства $\tilde{U}(4)$.

В нашем распоряжении сейчас имеется еще мало аргументов, чтобы утверждать — наверняка, в рамках какой группы ($\tilde{U}(12)$, \mathcal{P}_U или совсем другой) должна развиваться ковариантная теория симметрии. Однако, несомненно, что в ближайшее время в этом бурно развивающемся направлении можно ожидать больших успехов и многих интересных результатов, которые приблизят нас к завершению построения теории элементарных частиц.

Л и т е р а т у р а

1. E.P.Wigner, Phys. Rev., 51, 106 (1937).
2. E.P.Wigner and E.Feenberg, Rept. Progr. Phys., 8, 274 (1941).
3. F.Gürsey and L.A.Radicali, Phys. Rev. Lett., 13, 173 (1964).
4. A.Pais, Phys. Rev. Lett., 13, 175 (1964).
5. B.Sakita, Phys. Rev., 136B, 1756 (1964).
6. F.Gürsey, A.Pais and L.A.Radicali, Phys. Rev. Lett., 13, 299 (1964).
7. T.K.Kuo and T.Yao, Phys. Rev. Lett., 13, 415 (1964).
8. M.A.Bég and V.Singh, Phys. Rev.Lett., 13, 418 (1964).
9. M.A.Bég and V.Singh, Phys. Rev.Lett., 13, 509 (1964).
10. M.A.Bég, B.W.Lee and A.Pais, Phys. Rev. Lett., 13, 514 (1964).
11. B.Sakita, Phys.Rev.Lett., 13, 643 (1964).
12. C.H.Chan and A.Q.Sarker, Phys. Rev.Lett., 13, 731 (1964).
13. J.M.Charap and P.T.Mattews, Phys. Lett., 13, 346 (1964).
14. O.W.Greenberg, Phys. Rev.Lett., 13, 598 (1964).
15. Н.Н. Боголюбов, Б.В. Струминский, А.Н. Тавхелидзе. К вопросу о составных моделях в теории элементарных частиц. Препринт ОИЯИ, Д-1868, Дубна, 1965.
16. Б.В. Струминский. Магнитные моменты барионов в модели кварков. Препринт ОИЯИ, Р-1838, Дубна, 1965.
17. А.Д. Долгов, Л.Б. Окунь, И.Я. Померанчук и В.В. Соловьев. Электромагнитные разности масс барионов и $SU(6)$ симметрия. Препринт ИТЭФ, 313, Москва, 1965.
18. T.Fulton and L.Wess, Phys.Lett., 14, 57 (1965); Mass Relations and the "Super-Lorentz Group". Preprint, Vienna, 1964.
19. В.Г. Кадышевский, Р.М. Мурадян, И.Т. Тодоров, А.Н. Тавхелидзе. $SU(6)$ -симметрия и ее возможные обобщения. Препринт ОИЯИ, Д-1828, Дубна, 1964.
20. H.Bacry and L.Nuyts, Remarks on an Enlarged Poincaré Group: Inhomogeneous $SL(6,C)$ Group. Preprint CERN 10-068/TH.506, Geneva, 1964.
21. R.Delbourgo, A.Salam and J.Strathdee. $\tilde{U}(12)$ and the Baryon form factor. Preprint, Trieste, 1965.
22. R.Feynman, M.Gell-Mann and G.Zweig, Phys. Rev.Lett., 13, 678 (1964).
23. K.Bardakci, I.M.Cornwall, P.G.O.Freund and B.W.Lee, Phys.Rev.Lett., 13, 698 (1964).
24. W.Rühl, A. Relativistic Generalization of the $SU(6)$ -Symmetry Group. Preprint 10058/TH, 505 CERN, Geneva, 1964.
25. Ю.М. Широков. Диссертация, физический факультет МГУ, Москва, 1959.
26. P.Roman, J.J.Aghassi, Physics Letters, 14, 68 (1965).

27. Нгуен Ван Хьеу. Группа симметрии $SL(6)$ и релятивистское обобщение группы симметрии $SU(6)$. Препринт ОИЯИ, Р-1854, Дубна, 1965.
28. L.A.Radicali, L.E.Picasso, D.P.Zanello and J.J.Sakurai, Phys.Rev.Lett., 14, 160 (1965).
29. T.K.Kuo and Tsu Yao, Phys.Rev.Lett., 14, 79 (1965).
30. H.G.Dosch, R.Engelmann, H.Filthuth, V.Hepp, E.Kluge, K.Marish, A.Minguzzi-Ranzi, Phys.Rev.Lett., 14, 239 (1965).
31. M.G.Olsson, Phys.Rev.Lett., 14, 118 (1965).
32. R.H.Dalitz, F. von Hippel, Phys. Lett., 10, 155 (1964).

Рукопись поступила в издательский отдел
16 марта 1965 г.

Схемы Юнга и размерности представлений SU (3)

Размерность N представления (P, q) находится по формуле

$$N = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2),$$

где p - число столбцов из одной клетки

q - - - - - из двух клеток





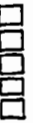




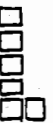




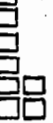










	3		6		10		15		21
	3*		8		15'		24		35
	6*		15**		27		72		80
	10*		24*		72*		84		90
	15*		35*		60*		90*		125

Таблица умножения представлений SU (3)
до 27 × 27

	8	10	10*	27	
1+8+8+10+10* +27		8+10+27+35	8+10* +27+35*	8+10+10* 27+27+35+ 35* +64	8
		10* +27+28+35	1+8+27+64	8+10 +10* +27+ 35+35*+64+ 81	10
			10+27+28*+ 35*	8+10+10* +27+ 35+35* +64+81*	10*
				1+8+8+ 10+10* 27+27+27+ 28+28* + 35+35+35* +35* + 64+64+ 81+81+ 125	27

Схема Юнга и размерности представлений SU(6)

Размерность N представлений $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ находится по формуле:

$$N = \frac{1}{5!2^3 3^2 4} (\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)(\lambda_3 + 1)(\lambda_4 + 1)(\lambda_5 + 1) (\lambda_1 + \lambda_2 + 2)(\lambda_2 + \lambda_3 + 2)(\lambda_3 + \lambda_4 + 2)(\lambda_4 + \lambda_5 + 2)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 3)(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + 3) (\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + 3)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + 4)(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + 4)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + 5)$$

	6		21		56		126		252	189
	15		70		210		504		3200	1134
	20		105		336		840		1800	896
	16*		84		280		720		1575	405
	6*		35		120		210		700	2895

Таблица умножения представлений SU(6)
до 70 x 70

	35	56	56*	70	70*	
1+35+35 189+280+280* + 405		56+70+ 700+1134	56* + 70* + 700* + 1134*	20+56+70+70+ 540+580+ 1134	20* +56* +70*+70* 540*+580*+ 1134*	35
		462+490+ 1050+1134	1+35+405+ 2895	840+896+1050+ 1134	35+280+ 405+3200	56
			462* +490* + 1050* +1134*	35+280*+ 405+3200*	840*+896*+1050*+ 1134*	56*
				175+189+280+ 490+840 896+896 +1134	1+35+35+189+ 280+280* 405+3675	70
					175*+189 +280* + 490* + 840* + 896*+896* 1134*	70*