

18  
K-73  
206

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория высоких энергий

P-206

В. И. Котов, Ю. Л. Обухов, В. А. Пуштарик.

**СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В КОЛЬЦЕВОМ ФАЗОТРОНЕ  
С РАДИАЛЬНЫМИ СЕКТОРАМИ**

*Т. ЯЭ, 1959, №5, стр. 19-22.*

г. Дубна, 1958 год

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория высоких энергий

P-206

В. И. Котов, Ю. Л. Обухов, В. А. Пуштарик

**СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В КОЛЬЦЕВОМ ФАЗОТРОНЕ  
С РАДИАЛЬНЫМИ СЕКТОРАМИ**

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

г. Дубна, 1958 год

## В в е д е н и е

В настоящее время в литературе широко обсуждается вопрос об ускорителях с сильной фокусировкой и постоянным во времени магнитным полем. Впервые такой ускоритель был предложен в 1953 году А.А.Коломенским, М.С.Рабиновичем и В.А.Петуховым [1]. В 1955 году эта же идея была высказана Саймоном [2]. Сильная фокусировка в ускорителе осуществляется за счет того, что заряженные частицы, обращаясь, проходят участки с магнитным полем, имеющим противоположное направление в соседних секторах и сильно растущим (прямой вариант) или убывающим (обращенный вариант) по абсолютной величине с радиусом. Наличие секторов с обратным направлением поля, удаляющих частицы от центра установки, приводит к значительно большим (приблизительно в 5 раз) размерам ускорителя по сравнению с обычным сильнофокусирующим ускорителем на ту же энергию. Такое увеличение размеров установки является одним из существенных ее недостатков. Однако, наряду с этим недостатком новый ускоритель обладает рядом преимуществ, стимулирующих его развитие, главное из которых — большая интенсивность ускоренного пучка. В самом деле, использование постоянного во времени магнитного поля дает возможность увеличить частоту циклов ускорения и, следовательно, повысить эффективность установки по сравнению с обычными сильнофокусирующими ускорителями. Другие преимущества этого ускорителя носят чисто инженерный характер: отпадает необходимость точного согласования частоты ускоряющего напряжения с магнитным полем, использования шихтованного железа; появляется возможность инжектировать частицы с меньшими энергиями, чем в ускорителях с переменным магнитным полем; искажения поля не зависят от времени и легче исправляются и т.п.

Новый ускоритель получил название кольцевого фазотрона, так как в нем используется, как и в фазотроне, постоянное магнитное поле, а магнит выполнен в виде кольца. Движение частиц в кольцевом фазотроне обладает рядом особенностей. Знание законов движения частиц является совершенно необходимым для успешного конструирования и запуска ускорителя. В частности, знание законов свободного движения частиц позволяет, во-первых, так выбрать характеристики магнитного поля и геометрию установки, чтобы движение частиц было устойчивым; во-вторых, позволяет задать допуски на характеристики поля и сборку установки, выбрать правильно апертуру камеры ускорителя и т.п.

В связи с важностью этого вопроса при написании работы мы преследовали цель подробного исследования свободного движения частиц в кольцевом фазотроне. Конкретное применение полученных формул проиллюстрировано на примере модели кольцевого фазотрона, сооружаемой в Объединенном институте ядерных исследований.



§ I. Вывод уравнений свободных колебаний в первом приближении

В сильнофокусирующих системах, как правило, мгновенные орбиты имеют довольно сложную форму. Поэтому для описания свободных колебаний около мгновенной орбиты в таких системах используют обычно натуральную систему координат [3,4,5,6], связанную с мгновенной орбитой. Уравнения движения при этом получаются однородными и физически более наглядными.

При выводе уравнений будем предполагать, что частицы обращаются в ускорителе с постоянной энергией (ускорение отсутствует) и мгновенная орбита расположена в средней плоскости, т.е. представляет плоскую кривую. Свяжем с мгновенной орбитой сопровождающий трёхгранник  $\vec{t}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ .  $\vec{t}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  представляет тройку единичных взаимно перпендикулярных векторов, причем  $\vec{t}$  направлено по касательной к орбите,  $\vec{\beta}$  - по нормали,  $\vec{\gamma}$  - перпендикулярно плоскости, в которой расположена координатная кривая (см. рис. I). Как известно, эта тройка векторов связана между собой формулами Френе, которые в случае плоской координатной кривой принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{t}}{d\sigma} &= -\frac{\vec{\beta}}{\rho}, \\ \frac{d\vec{\beta}}{d\sigma} &= \frac{\vec{t}}{\rho}, \\ \frac{d\vec{\gamma}}{d\sigma} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (I.I)$$

где  $\sigma$  - длина вдоль координатной кривой,  
 $\rho$  - радиус кривизны.

В используемой системе координат радиус-вектор, проведенный из центра установки до местонахождения частицы, можно записать

$$\vec{r} = \vec{R}(\sigma) + x\vec{\beta} + z\vec{\gamma} \quad (I.2)$$

Здесь  $\vec{R}(\sigma)$  - радиус-вектор координатной кривой,  
 $x$  - отклонение по нормали от мгновенной орбиты,  
 $z$  - отклонение по вертикали от средней плоскости.

Дифференцируя (I.2) по  $\sigma$  и используя (I.I), найдем

$$\frac{d\vec{r}}{d\sigma} = \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\vec{t} + x'\vec{\beta} + z'\vec{\gamma} \quad (I.3)$$

Отсюда видно, что метрическими коэффициентами введенной координатной системы являются величины

$$h_1 = \left(1 + \frac{x}{\rho}\right), \quad h_2 = 1, \quad h_3 = 1 \quad (I.4)$$

Метрические коэффициенты входят в выражения  $div$  и  $rot$  и в дальнейшем широко используются.

Поскольку энергия частиц предполагается постоянной, то для вывода уравнений движения можно воспользоваться вариационным принципом Мопертки:

$$\delta \int (\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}) \frac{d\vec{z}}{d\epsilon} d\epsilon = \delta \int L d\epsilon = 0, \quad (I.5)$$

где

$\vec{A}$  - векторный потенциал,  $\vec{p}$  - импульс частицы,  $L$  - обобщенная функция Лагранжа. Подставляя в (I.5) значение  $\frac{d\vec{z}}{d\epsilon}$  из (I.3) и производя скалярное перемножение, найдем отсюда функцию Лагранжа:

$$L(x, x', z, z', \epsilon) = \sqrt{(1 + \frac{x}{\rho})^2 + x'^2 + z'^2} + \frac{e}{c\rho} [(1 + \frac{x}{\rho})A_z + x'A_\rho + z'A_y]. \quad (I.6)$$

Уравнения Лагранжа в нашем случае запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} \left( \frac{\partial L}{\partial x'} \right) &= \frac{\partial L}{\partial x}, \\ \frac{d}{d\epsilon} \left( \frac{\partial L}{\partial z'} \right) &= \frac{\partial L}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (I.7)$$

Подставляя сюда (I.6) и выражая производные от компонент вектор-потенциала  $\vec{A}$  через компоненты магнитного поля  $\vec{H}$ , получим уравнения движения в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} \left\{ \frac{x'}{[(1 + \frac{x}{\rho})^2 + x'^2 + z'^2]^{1/2}} \right\} &= \frac{1}{\rho} \frac{1 + \frac{x}{\rho}}{[(1 + \frac{x}{\rho})^2 + x'^2 + z'^2]^{1/2}} - \frac{e}{c\rho} [(1 + \frac{x}{\rho})H_y - z'H_z], \\ \frac{d}{d\epsilon} \left\{ \frac{z'}{[(1 + \frac{x}{\rho})^2 + x'^2 + z'^2]^{1/2}} \right\} &= -\frac{e}{c\rho} [x'H_z - (1 + \frac{x}{\rho})H_y]. \end{aligned} \quad (I.8)$$

При выводе уравнений (I.8) мы не делали никаких предположений относительно отклонений  $x$ ,  $z$  и их производных. Однако, в таком виде уравнения являются нелинейными и аналитически не решаются. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что отклонения  $x$ ,  $z$  и их производные малы, так что можно пренебрегать квадратами и произведениями этих величин. Магнитное поле также разложим в ряд около его значения на мгновенной орбите и пренебрежем членами второго порядка и выше по  $x$ ,  $z$ . Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} H_z &= H_z^0 + \left( \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)_0 x + \left( \frac{\partial H_z}{\partial z} \right)_0 z, \\ H_\rho &= H_\rho^0 + \left( \frac{\partial H_\rho}{\partial x} \right)_0 x + \left( \frac{\partial H_\rho}{\partial z} \right)_0 z, \\ H_y &= H_y^0 + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} \right)_0 x + \left( \frac{\partial H_y}{\partial z} \right)_0 z. \end{aligned} \right\} \quad (I.9)$$

Величины с индексом нуль относятся к мгновенной орбите.

Компоненты поля и их производные не являются независимыми, а связаны между собой соотношениями:

$$\text{div } \vec{H} = 0, \quad \text{rot } \vec{H} = 0. \quad (I.10)$$

Используя (I.10), выразим все величины через независимые:

$$\left. \begin{aligned} H_z &= H_z^0 + \left[ \left( \frac{\partial H_\rho}{\partial \epsilon} \right)_0 - \frac{1}{\rho} H_z^0 \right] x + \left( \frac{\partial H_y}{\partial \epsilon} \right)_0 z, \\ H_\rho &= H_\rho^0 + \left( \frac{\partial H_\rho}{\partial x} \right)_0 x + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} \right)_0 z, \\ H_y &= H_y^0 + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} \right)_0 x - \left[ \left( \frac{\partial H_z}{\partial \epsilon} \right)_0 + \left( \frac{\partial H_\rho}{\partial x} \right)_0 + \frac{1}{\rho} H_z^0 \right] z. \end{aligned} \right\} \quad (I.11)$$

Так как в идеальном случае, рассмотрением которого мы здесь ограничиваемся,  $H_t^0 = 0, H_r^0 = 0$

и  $\left(\frac{\partial H_p}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial H_p}{\partial \epsilon}\right)_0 = \left(\frac{\partial H_t}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial H_t}{\partial \epsilon}\right)_0 = 0$  то (I.II) сильно упрощается:

$$\left. \begin{aligned} H_t &= \left(\frac{\partial H_s}{\partial \epsilon}\right)_0 z, \\ H_p &= \left(\frac{\partial H_s}{\partial x}\right)_0 z, \\ H_r &= H_r^0 + \left(\frac{\partial H_s}{\partial x}\right)_0 x. \end{aligned} \right\} \quad (I.I2).$$

Если подставить (I.I2) в (I.8) и учесть, что

$$\frac{e H_r^0}{c p} = \frac{1}{p}$$

то в первом приближении получим следующие уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} x'' + \frac{1}{p^2} (1-n) x &= 0, \\ z'' + \frac{n}{p^2} z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (I.I3)$$

Здесь введено обозначение

$$n = - \frac{p}{H_r^0} \left(\frac{\partial H_r}{\partial x}\right)_0. \quad (I.I4)$$

$n$  является локальным показателем поля на мгновенной орбите.

Преобразуем теперь выражение для  $n$ . С этой целью перепишем  $\frac{\partial H_r}{\partial x}$  в виде:

$$\frac{\partial H_r}{\partial x} = \frac{\partial H_r}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial H_r}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x}. \quad (I.I5)$$

Из рис.2 следует, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\cos \varphi}, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial x} = \operatorname{tg} \varphi, \quad \frac{dR}{d\theta} = R \operatorname{tg} \varphi, \quad (I.I6)$$

где  $\varphi$  - угол между нормалью к мгновенной орбите и радиусом вектором  $\vec{R}$ .

Магнитное поле в средней плоскости определим функцией

$$H = H_r = - H_0 \left(\frac{z}{z_0}\right)^K f(\theta) = - H_0 F(\epsilon) \left(\frac{z}{R}\right)^K. \quad (I.I7)$$

Здесь  $K > 0$  - постоянная величина, имеющая смысл среднего показателя поля [7],  $F(\epsilon) = \left(\frac{R(\epsilon)}{z_0}\right)^K f(\theta)$  и определяет вариацию поля вдоль магнитной орбиты,  $z_0$  - некоторый фиксированный радиус,  $H_0$  - значение поля на этом радиусе при некотором значении  $\theta = \theta_0$ . Переход от независимой переменной  $\theta$  к  $\epsilon$  вполне обоснован, так как они однозначно связаны соотношением:

$$\epsilon(\theta) = \int_0^\theta \sqrt{R^2(\theta) + \left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2} d\theta. \quad (I.I8)$$

Относительно выбора поля в форме (I.I7) будет сказано в § 2.

Подставляя (I.I7) и (I.I6) в (I.I5), найдем

$$\frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\kappa}{\cos \varphi} \left( \frac{1}{z} - \frac{\sin^2 \varphi}{R} \right) + \frac{1}{F(\epsilon)} \frac{dF}{d\epsilon} \operatorname{tg} \varphi. \quad (1.19)$$

Наконец, подставляя в (I.I4) значения  $H$  и  $\frac{\partial H}{\partial x}$ , взятые на мгновенной орбите, т.е. при  $z=R$  определим  $n$ :

$$n = - \frac{\rho}{F(\epsilon)} \left\{ \frac{\kappa}{R} F(\epsilon) \cos \varphi + \frac{dF}{d\epsilon} \operatorname{tg} \varphi \right\}. \quad (1.20)$$

Уравнения движения (I.I3) теперь перейдут в

$$\left. \begin{aligned} x'' + \left[ \frac{1}{\rho^2} + \frac{\kappa}{R\rho} \cos \varphi + \frac{1}{\rho F(\epsilon)} \frac{dF}{d\epsilon} \operatorname{tg} \varphi \right] x &= 0, \\ z'' - \left[ \frac{\kappa}{R\rho} \cos \varphi + \frac{1}{\rho F(\epsilon)} \frac{dF}{d\epsilon} \operatorname{tg} \varphi \right] z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Локальный показатель поля, как следует из (I.20), зависит от формы мгновенной орбиты  $(R, \varphi)$  и характеристик поля  $(\kappa, F(\epsilon))$ . В частности, полагая в (I.20) и (I.21)  $\varphi = 0$ ,  $R = \rho = \text{const}$ ,  $F(\epsilon) = 1$  и считая  $\kappa > 0$  в одном секторе и  $\kappa < 0$  в соседнем секторе магнита, мы приходим к обычным уравнениям в сильнофокусирующих ускорителях. Дополнительный член  $\frac{1}{\rho F(\epsilon)} \frac{dF}{d\epsilon} \operatorname{tg} \varphi$ , который появляется в (I.20) и (I.21), определяет краевую фокусировку, зависящую от углов влета частицы в секторы. Этот член отрицателен и способствует дополнительной фокусировке в  $z$ -направлении и дефокусировке в  $x$ -направлении.

## § 2. Определение характеристик мгновенных орбит и динамическое подобие.

Для определения  $n$  в уравнениях (I.I3) необходимо, как было показано выше, уметь находить характеристики мгновенных орбит  $R(\epsilon)$  и  $\varphi(\epsilon)$  при заданной конфигурации магнитного поля.

Предположим сначала, что имеется произвольная плоская кривая. Выведем для нее уравнения связывающие ее характеристики  $R$  и  $\varphi$ . Радиус-вектор кривой  $\vec{R}$  можно записать как

$$\vec{R} = R \cos \varphi \cdot \vec{\beta} + R \sin \varphi \cdot \vec{t}, \quad (2.1)$$

где  $R \cos \varphi$  и  $R \sin \varphi$  соответствующие проекции на оси сопровождающего трехгранника. Продифференцировав это выражение по длине дуги и воспользовавшись формулами Френе (I.I), найдем:

$$\frac{d\vec{R}}{d\epsilon} = \vec{t} = \left[ \frac{d}{d\epsilon} (R \cos \varphi) - \frac{R \sin \varphi}{\rho} \right] \vec{\beta} + \left[ \frac{d}{d\epsilon} (R \sin \varphi) + \frac{R \cos \varphi}{\rho} \right] \vec{t}. \quad (2.2)$$

Приравнявая справа и слева коэффициенты при  $\vec{t}$  и  $\vec{\beta}$ , получим уравнения для  $R$  и  $\varphi$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{d\zeta} &= \frac{2}{\rho}, \\ \frac{d\eta}{d\zeta} &= -\frac{\varepsilon}{\rho} + 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Здесь введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= R \cos \varphi, \\ \eta &= R \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Система (2.3) легко приводится к одному уравнению первого порядка относительно переменной

$$u = \varepsilon + i\eta. \quad (2.5)$$

$$u' + \frac{i}{\rho} u = i. \quad (2.6)$$

Решение уравнения (2.6) имеет вид:

$$u = A e^{-i \int \frac{d\zeta}{\rho}} + i e^{-i \int \frac{d\zeta}{\rho}} \int e^{i \int \frac{d\zeta}{\rho}} d\zeta, \quad (2.7)$$

где  $A$  - комплексная постоянная интегрирования. Если считать, что произвольная кривая замкнута и для нее имеет место равенство

$$c\rho = eH\rho = -eH_0 F(\zeta) \rho, \quad (2.8)$$

то (2.7) и будет определять характеристики мгновенной орбиты. Условие (2.8) удобно переписать в виде:

$$\rho_0 = F(\zeta) \rho, \quad (2.9)$$

где  $\rho_0 = -\frac{c\rho}{eH_0}$  - радиус кривизны мгновенной орбиты, например, в точке  $\zeta = 0$ . Тогда (2.7) переходит в

$$u = A e^{-i \int \frac{F(\zeta) d\zeta}{\rho_0}} + i e^{-i \int \frac{F(\zeta) d\zeta}{\rho_0}} \int e^{i \int \frac{F(\zeta) d\zeta}{\rho_0}} d\zeta. \quad (2.10)$$

Таким образом, задача по определению характеристик орбиты и, следовательно, локального показателя поля  $n$  (см. (I.20)) в принципе решена.

$n$  в ускорителе определяет частоты свободных колебаний и является одной из основных характеристик свободного движения. Если  $n$  от орбиты к орбите меняется, то и частоты свободных колебаний будут изменяться в процессе ускорения. При этом частоты могут приближаться к резонансным значениям или даже проходить их. В результате резонансной раскачки свободных колебаний значительная доля частиц может выпасть из ускорения. Поэтому очень важно сконструировать кольцевой фазотрон так, чтобы частоты свободных колебаний в процессе ускорения оставались постоянными, т.е.  $n$  для каждой орбиты было одним и тем же при соответствующих  $\theta$ . Совокупность орбит, обладающих таким свойством называют динамически подобными.

Для того чтобы обеспечить динамическое подобие орбит, оказывается достаточным:

I) Геометрическое подобие орбит относительно центра установки;



2) Магнитное поле вида (I.17) с постоянным значением среднего показателя поля  $K$ .  
Для геометрического подобия орбит необходимо, чтобы

$$\frac{R}{R_1} = const, \quad \frac{P}{P_1} = const. \quad (2.II)$$

где индекс I относится к другой орбите. Тогда  $\frac{v}{v_1} = const, \varphi = \varphi_1$  и уравнения (2.3), как нетрудно проверить, для обеих орбит остаются теми же. Если к условиям (2.II) добавить еще одно условие:

$$K = const,$$

то в этом случае согласно (I.20)  $n = n_1$  и уравнения свободных колебаний (I.2I) для обеих орбит будут одинаковы.

Из приведенных рассуждений, в частности, следует, что в обычных сильнофокусирующих ускорителях, а также в слабофокусирующих ускорителях с прямолинейными промежутками динамическое подобие орбит отсутствует. Подробно вопрос о подобии орбит в ускорителях рассмотрен в работе [8].

### § 3. Решение уравнения свободных колебаний.

Уравнения свободных колебаний (I.2I) являются уравнениями типа Хилла. В общем случае решить их аналитически не удастся. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением частного случая, имеющего непосредственное отношение к модели кольцевого фазотрона, сооружаемой в Объединенном институте ядерных исследований.

Прежде чем приступить к решению, остановимся кратко на конструктивных особенностях кольцевого фазотрона и его геометрии.

Магнит ускорителя состоит из  $N$  положительных и отрицательных секторов, разделенных между собой прямолинейными промежутками. Края секторов срезаны по радиусам из центра установки, так что длина прямолинейных промежутков увеличивается пропорционально радиусу. Для того, чтобы действие краевого поля не нарушало динамического подобия орбит, зазор между полюсами магнита увеличивается также пропорционально радиусу, в то время как поле растет с радиусом по закону (I.17). Таким образом, в кольцевом фазотроне несколько необычное положение по сравнению со слабофокусирующими ускорителями и обычными сильнофокусирующими ускорителями, в которых меньшему зазору между полюсами магнита соответствует большее поле. Естественно, что создание магнитного поля в кольцевом фазотроне представляет довольно сложную задачу. Подробное описание действующей модели кольцевого фазотрона, ускоряющей электроны до энергии 400 КэВ, приведено в работах [6] и [9].

Допустим, что удалось создать поле постоянное по абсолютной величине вдоль мгновенной орбиты. Тогда функция  $F(\epsilon)$  в (I.17) будет равна

$$F(\epsilon) = \begin{cases} I & \text{в положительном секторе} \\ 0 & \text{в промежутке} \\ -I & \text{в отрицательном секторе} \end{cases} \quad (3.I)$$

Мгновенная орбита в этом случае состоит из дуги окружности радиуса  $\rho_0$  в положительном секторе, прямой линии в промежутке и дуги окружности радиуса  $-\rho_0$  в отрицательном секторе. Обозначим через  $\beta_1$  и  $\beta_2$  углы поворота частиц относительно центров кривизны в положительном и отрицательном секторах соответственно. Угловые раззоры секторов относительно центра установки пусть будут  $\theta_1$  (положительного) и  $\theta_2$  (отрицательного); угловой раззор прямолинейного промежутка обозначим через  $\theta_0$ . Введем еще два угла: угол  $\varphi_1$  между касательной к орбите на краю сектора и нормалью к срезу положительного сектора и аналогично для отрицательного сектора - угол  $\varphi_2$ . Все приведенные величины указаны на рис.3.

Между углами нетрудно установить следующие соотношения:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} (\beta_1 - \theta_1), \quad (3.2)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} (\beta_2 + \theta_2), \quad (3.3)$$

$$\theta_0 = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (3.4)$$

$$\beta_1 - \beta_2 = \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_0. \quad (3.5)$$

Как следует из (3.5)  $(\beta_1 - \beta_2)$  определяет угол поворота частицы относительно центра ускорителя за элемент периодичности (положительный сектор + промежуток + отрицательный сектор + промежуток). Следовательно, число элементов периодичности  $N$  равно:

$$N = \frac{2\pi}{\beta_1 - \beta_2}. \quad (3.6)$$

Наряду с углами введем также величины, характеризующие относительную длину орбиты в положительном ( $q_1$ ), отрицательном ( $q_2$ ) секторах и прямолинейном промежутке ( $q_0$ ) так, что

$$q_1 + q_2 + 2q_0 = 1. \quad (3.7)$$

В рассматриваемом случае  $q_1$ ,  $q_0$ ,  $q_2$  определяются простыми формулами:

$$q_1 = \frac{\beta_1 \rho_0}{(\beta_1 + \beta_2) \rho_0 + 2(\zeta_2 - \zeta_1)}, \quad q_2 = \frac{\beta_2 \rho_0}{(\beta_1 + \beta_2) \rho_0 + 2(\zeta_2 - \zeta_1)}, \quad q_0 = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{(\beta_1 + \beta_2) \rho_0 + 2(\zeta_2 - \zeta_1)}. \quad (3.8)$$

где  $(\zeta_2 - \zeta_1)$  - длина орбиты в промежутке.

Для дальнейшего нам потребуется еще одна характеристика кольцевого фазотрона: коэффициент увеличения установки  $C$ . Коэффициент увеличения называют отношение радиуса окружности, эквивалентной по длине мгновенной орбите, к минимальному радиусу кривизны орбиты. В нашем случае эквивалентный радиус равен

$$\bar{R} = \frac{N [(\beta_1 + \beta_2) \rho_0 + 2(\zeta_2 - \zeta_1)]}{2\pi} = \frac{(\beta_1 + \beta_2) \rho_0 + 2(\zeta_2 - \zeta_1)}{\beta_1 - \beta_2}, \quad (3.9)$$

а радиус кривизны  $\rho_0$  во всех секторах одинаков по абсолютной величине. Следовательно, коэффициент увеличения установки будет определяться формулой

$$C = \frac{(\beta_1 + \beta_2) \rho_0 + 2(\sigma_2 - \sigma_1)}{(\beta_1 - \beta_2) \rho_0}, \quad (3.10)$$

или, учитывая (3.8), найдем

$$C = \frac{1}{q_1 - q_2}. \quad (3.11)$$

Если умножить (3.10) на (3.8), то будем иметь

$$Cq_1 = \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2}, \quad Cq_2 = \frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2}, \quad Cq_0 = \frac{\delta}{\beta_1 - \beta_2} \quad (3.12)$$

где  $\delta = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\rho_0}$

Заменяя здесь  $(\beta_1 - \beta_2)$  из (3.6), получим

$$\beta_1 = \frac{2\pi C q_1}{N}, \quad \beta_2 = \frac{2\pi C q_2}{N}, \quad \delta = \frac{2\pi C q_0}{N}. \quad (3.13)$$

После такого краткого перечня формул, связывающих геометрические параметры кольцевого фазотрона, перейдем к решению уравнений свободных колебаний (1.21). При решении будем предполагать, что локальный показатель поля  $n$  постоянен в пределах каждого сектора и равен значению, соответствующему середине данного сектора. Чтобы определить эти значения  $n$  в положительном и отрицательном секторах, необходимо найти характеристики орбиты  $R$  и  $\varphi$  в соответствующих точках.

Подставляя (3.1) в (2.10) и интегрируя, получим следующие выражения для  $\varepsilon$  и  $\eta$ :

$$\varepsilon = \begin{cases} A \cos \frac{\sigma'}{\rho_0} + B \sin \frac{\sigma'}{\rho_0} + \rho_0, & \text{в положительном секторе} \\ D, & \text{в промежутке} \\ F \cos \frac{\sigma'_2 - \sigma'_1}{\rho_0} - M \sin \frac{\sigma'_2 - \sigma'_1}{\rho_0} - \rho_0, & \text{в отрицательном секторе} \end{cases} \quad \eta = \begin{cases} B \cos \frac{\sigma'}{\rho_0} - A \sin \frac{\sigma'}{\rho_0}, & \text{в положительном секторе} \\ E + (\sigma' - \sigma'_1), & \text{в промежутке} \\ M \cos \frac{\sigma'_2 - \sigma'_1}{\rho_0} + F \sin \frac{\sigma'_2 - \sigma'_1}{\rho_0}, & \text{в отрицательном секторе} \end{cases} \quad (3.14)$$

$A, B, D, E, F, M$  - константы, связанные условиями непрерывности  $\varepsilon, \eta$  на границах секторов и промежутков. За начало отсчета выбрана середина положительного сектора, так что здесь  $\sigma'_1 = \frac{\sigma_1}{2}$ ,  $\sigma'_2 - \sigma'_1$  по-прежнему длина орбиты в промежутке. Совершенно ясно (см. рис. 3), что в середине положительного сектора  $R = R_{\max}$ , в середине отрицательного  $-R = R_{\min}$ . Обе эти величины можно определить, зная  $\varepsilon$  и  $\eta$  только в середине отрицательного сектора. Действительно, для центра отрицательного сектора из (3.14) получим

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= (\varepsilon_0 - \rho_0) \cos \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} + \eta_0 \sin \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} + 2\rho_0 \cos \frac{\beta_2}{2} - (\sigma_2 - \sigma_1) \sin \frac{\beta_2}{2} - \rho_0, \\ \eta_1 &= -(\varepsilon_0 - \rho_0) \sin \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} + \eta_0 \cos \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} + 2\rho_0 \sin \frac{\beta_2}{2} + (\sigma_2 - \sigma_1) \cos \frac{\beta_2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

$\epsilon_0$  и  $\eta_0$  - начальные условия при  $\sigma' = 0$ , т.е. в середине положительного сектора. Так как при  $R = R_{\max}$  угол  $\varphi = 0$ , то  $\epsilon_0 = R_{\max}$ ,  $\eta_0 = 0$ . В центре отрицательного сектора также  $\varphi = 0$  и, следовательно,  $\epsilon_1 = R_{\min}$ ,  $\eta_1 = 0$ . Подставляя значения  $\epsilon_1$ ,  $\eta_1$  и  $\epsilon_0$ ,  $\eta_0$  в (3.15), для  $R_{\max}$  и  $R_{\min}$  будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} R_{\max} &= \rho_0 + \frac{2\rho_0 \sin \frac{\beta_2}{2} + (\epsilon_2 - \epsilon_1) \cos \frac{\beta_2}{2}}{\sin \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}}, \\ R_{\min} &= -\rho_0 + \frac{2\rho_0 \sin \frac{\beta_1}{2} + (\epsilon_2 - \epsilon_1) \cos \frac{\beta_1}{2}}{\sin \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Прибавляя и вычитая слева в (3.16) величину  $C\rho_0$  и используя затем (3.6), (3.7), (3.11) и (3.13), окончательно получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_{\max}}{C\rho_0} &= 1 - 2q_2 \left( 1 - \frac{\sin \frac{\pi C q_2}{N}}{C q_2 \sin \frac{\pi}{N}} \right) - 2q_0 \left( 1 - \frac{\cos \frac{\pi C q_2}{N}}{(N/\pi) \sin \frac{\pi}{N}} \right) = \alpha_1, \\ \frac{R_{\min}}{C\rho_0} &= 1 - 2q_1 \left( 1 - \frac{\sin \frac{\pi C q_1}{N}}{C q_1 \sin \frac{\pi}{N}} \right) - 2q_0 \left( 1 - \frac{\cos \frac{\pi C q_1}{N}}{(N/\pi) \sin \frac{\pi}{N}} \right) = \alpha_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Если подставить теперь (3.17) в (1.20) и положить  $\varphi = 0$ , то для абсолютных величин локальных показателей поля в серединах положительного и отрицательного секторов будем иметь

$$n_1 = \frac{\kappa}{C\alpha_1}, \quad n_2 = \frac{\kappa}{C\alpha_2}. \quad (3.18)$$

Используя эти значения  $n$ , перепишем уравнения движения (1.21) в виде:

$$\left. \begin{aligned} x'' + \left[ \frac{(F(\sigma) + n_{1,2})F(\sigma)}{\rho_0^2} + \frac{dF}{d\sigma} \frac{t\varphi}{\rho_0} \right] x &= 0, \\ z'' - \left[ \frac{n_{1,2}F(\sigma)}{\rho_0^2} + \frac{dF}{d\sigma} \frac{t\varphi}{\rho_0} \right] z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Индекс 1 у  $n$  относится к положительному, а индекс 2 к отрицательному секторам. Производная от  $F(\sigma)$  в нашем случае отлична от нуля только на краях секторов, где она равна  $\delta$ -функции с соответствующим знаком.

Согласно теории Флоке [10], существует, вообще говоря, такие два нормальных решения уравнений (3.19), что

$$\left. \begin{aligned} x(\sigma + \sigma_0) &= e^{i\mu_x} x(\sigma) , & z(\sigma + \sigma_0) &= e^{i\mu_z} z(\sigma) , \\ x'(\sigma + \sigma_0) &= e^{i\mu_x} x'(\sigma) , & z'(\sigma + \sigma_0) &= e^{i\mu_z} z'(\sigma) , \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

где  $\sigma_0$  - длина орбиты на одном элементе периодичности  $\mu_x, \mu_z$  - характеристические числа, определяющие изменение фазы бетатронных колебаний за элемент периодичности. В согласии с (3.20), общее решение уравнений (3.19) можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= A e^{i\mu_x m} \psi_x(\sigma) + \text{к.с.} \\ z &= B e^{i\mu_z m} \psi_z(\sigma) + \text{к.с.} \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Здесь  $A$  и  $B$  - произвольные комплексные постоянные, зависящие от начальных условий,  $\psi_x(\sigma)$  и  $\psi_z(\sigma)$  - функции Флоке, имеющие период равный элементу периодичности,  $m$  - номер элемента периодичности,  $\sigma$  в каждом элементе периодичности меняется от нуля до  $\sigma_0$ .

Для нахождения  $\mu$  и  $\psi(\sigma)$  распишем (3.19) по участкам элемента периодичности:

$$\left\{ \begin{aligned} x'' + \frac{1}{\rho^2} (n_1 + 1) x &= 0, & z'' - \frac{n_1}{\rho^2} z &= 0, & \text{в положительном секторе} \\ x'' = \delta(\sigma - \sigma_i) \frac{t_1 \rho}{\rho} x, & z'' = -\delta(\sigma - \sigma_i) \frac{t_2 \rho}{\rho} z, & \text{на краях секторов ( } \sigma_i - & \text{координата края)} \\ x' &= 0, & z' &= 0, & \text{в промежутках} \\ x'' - \frac{1}{\rho^2} (n_2 - 1) x &= 0, & z'' + \frac{n_2}{\rho^2} z &= 0. & \text{в отрицательном секторе.} \end{aligned} \right. \quad (3.22)$$

Решения уравнений (3.22) в матричной форме имеют вид:

а) в положительном секторе

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = M_x^+(\sigma) \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(n_1 + 1)^{1/2} \frac{\sigma}{\rho_0} & \rho_0 (n_1 + 1)^{-1/2} \sin(n_1 + 1)^{1/2} \frac{\sigma}{\rho_0} \\ -\frac{(n_1 + 1)^{1/2}}{\rho_0} \sin(n_1 + 1)^{1/2} \frac{\sigma}{\rho_0} & \cos(n_1 + 1)^{1/2} \frac{\sigma}{\rho_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

$$\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix} = M_z^+(\sigma) \begin{pmatrix} z_0 \\ z'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} n_1^{1/2} \frac{\sigma}{\rho_0} & \rho_0 n_1^{-1/2} \operatorname{sh} n_1^{1/2} \frac{\sigma}{\rho_0} \\ \frac{n_1^{1/2}}{\rho_0} \operatorname{sh} n_1^{1/2} \frac{\sigma}{\rho_0} & \operatorname{ch} n_1^{1/2} \frac{\sigma}{\rho_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z'_0 \end{pmatrix}$$

$x_0, x_0'$  - начальные условия при  $\sigma = 0$ ;

б) На выходе из положительного сектора

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = K_x^+ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{p_0} \tan \varphi_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = K_x^+ M_x^+(\sigma_1) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} z_2 \\ z_2' \end{pmatrix} = K_z^+ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{p_0} \tan \varphi_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_1' \end{pmatrix} = K_z^+ M_z^+(\sigma_1) \begin{pmatrix} z_0 \\ z_0' \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

через  $x_1, x_1'$  и  $z_1, z_1'$  обозначены величины на краю положительного сектора при  $\sigma = \sigma_1$  ;

в) в прямолинейном промежутке

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \Pi_x(\sigma) \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sigma - \sigma_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = \Pi_x(\sigma) K_x^+ M_x^+(\sigma_1) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix} = \Pi_z(\sigma) \begin{pmatrix} z_2 \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sigma - \sigma_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 \\ z_2' \end{pmatrix} = \Pi_z(\sigma) K_z^+ M_z^+(\sigma_1) \begin{pmatrix} z_0 \\ z_0' \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

г) на входе в отрицательный сектор.

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_4' \end{pmatrix} = K_x^- \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{p_0} \tan \varphi_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3' \end{pmatrix} = K_x^- \Pi_x(\sigma_2) K_x^+ M_x^+(\sigma_1) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} z_4 \\ z_4' \end{pmatrix} = K_z^- \begin{pmatrix} z_3 \\ z_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{p_0} \tan \varphi_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_3 \\ z_3' \end{pmatrix} = K_z^- \Pi_z(\sigma_2) K_z^+ M_z^+(\sigma_1) \begin{pmatrix} z_0 \\ z_0' \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

$x_3, x_3'$  и  $z_3, z_3'$  соответствуют концу промежутка, т.е.  $\sigma = \sigma_2$  ;

д) в отрицательном секторе

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = M_x^-(\sigma) K_x^- \Pi_x(\sigma_2) K_x^+ M_x^+(\sigma_1) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix} = M_z^-(\sigma) K_z^- \Pi_z(\sigma_2) K_z^+ M_z^+(\sigma_1) \begin{pmatrix} z_0 \\ z_0' \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$



где

$$M_x^-(\sigma) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(n_2-1)^{1/2} \frac{\sigma-\sigma_2}{\rho_0} & \rho_0(n_2-1)^{1/2} \operatorname{sh}(n_2-1)^{1/2} \frac{\sigma-\sigma_2}{\rho_0} \\ \frac{(n_2-1)^{1/2}}{\rho_0} \operatorname{sh}(n_2-1)^{1/2} \frac{\sigma-\sigma_2}{\rho_0} & \operatorname{ch}(n_2-1)^{1/2} \frac{\sigma-\sigma_2}{\rho_0} \end{pmatrix},$$

$$M_z^-(\sigma) = \begin{pmatrix} \cos n_2^{1/2} \frac{\sigma-\sigma_2}{\rho_0} & \rho_0 n_2^{-1/2} \sin n_2^{1/2} \frac{\sigma-\sigma_2}{\rho_0} \\ -\frac{n_2^{1/2}}{\rho_0} \sin n_2^{1/2} \frac{\sigma-\sigma_2}{\rho_0} & \cos n_2^{1/2} \frac{\sigma-\sigma_2}{\rho_0} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

На оставшихся участках элемента периодичности (на выходе из отрицательного сектора, во втором промежутке, на входе в положительный сектор) решения составляются по аналогии с (3.26), (3.25), (3.24) соответственно. Очевидно, решения в конце элемента периодичности будут равны:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\sigma=\sigma_0} = Q \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

$$\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_{\sigma=\sigma_0} = P \begin{pmatrix} z_0 \\ z'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z'_0 \end{pmatrix},$$

причем матрицы  $Q$  и  $P$  определяются из соотношений:

$$\left. \begin{aligned} Q &= K_x^+ \Pi_x(\sigma_2) K_x^- M_x^-(\sigma_3) K_x^- \Pi_x(\sigma_2) K_x^+ M_x^+(\sigma_1), \\ P &= K_z^+ \Pi_z(\sigma_2) K_z^- M_z^-(\sigma_3) K_z^- \Pi_z(\sigma_2) K_z^+ M_z^+(\sigma_1), \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

$\sigma_3$  - координата, соответствующая концу отрицательного сектора. Поскольку детерминанты матриц, входящих в  $Q$  и  $P$ , как нетрудно убедиться, равны единице, то и детерминанты самих  $Q$  и  $P$  тоже будут единицами. Выражения для элементов матриц  $Q$  и  $P$  приведены в приложении.

Теперь воспользуемся уравнениями (3.20). Полагая в них  $\sigma = 0$  и подставляя (3.28), получим для определения  $M_x$  и  $M_z$  следующие соотношения:

$$\begin{cases} (Q_{11} - e^{iM_x}) x_0 + Q_{12} x'_0 = 0, \\ Q_{21} x_0 + (Q_{22} - e^{iM_x}) x'_0 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (P_{11} - e^{iM_z}) z_0 + P_{12} z'_0 = 0, \\ P_{21} z_0 + (P_{22} - e^{iM_z}) z'_0 = 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

Чтобы системы (3.31) имели нетривиальные решения, детерминанты их должны равняться нулю.

Отсюда для  $\mu_x$  и  $\mu_z$  найдем

$$e^{2i\mu_x} - (Q_{11} + Q_{22}) e^{i\mu_x} + 1 = 0, \quad e^{2i\mu_z} - (P_{11} + P_{22}) e^{i\mu_z} + 1 = 0, \quad (3.32)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \cos \mu_x &= \frac{1}{2} (Q_{11} + Q_{22}) = \frac{1}{2} \text{Sp } Q, \\ \cos \mu_z &= \frac{1}{2} (P_{11} + P_{22}) = \frac{1}{2} \text{Sp } P. \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

Естественно, что движение частиц будет устойчивым по обоим направлениям, если одновременно выполняются неравенства

$$|\cos \mu_x| < 1, \quad |\cos \mu_z| < 1. \quad (3.34)$$

Подставляя в (3.33) значения  $Q_{11}$ ,  $Q_{22}$  и  $P_{11}$ ,  $P_{22}$  (см. приложение) получим для  $\cos \mu_x$  и  $\cos \mu_z$  довольно громоздкие формулы, совпадающие с приведенными в работе [7]:

$$\begin{aligned} \cos \mu_x &= [1 + 2\delta(\text{tg } \varphi_1 + \text{tg } \varphi_2) + 2\delta^2 \text{tg } \varphi_1 \text{tg } \varphi_2] \cos \alpha_1 \text{ch } \alpha_2 + \\ &+ [(n_1+1)^{-1/2} (\text{tg } \varphi_1 + \text{tg } \varphi_2 + 2\delta \text{tg } \varphi_1 \text{tg } \varphi_2 + \delta \text{tg}^2 \varphi_1 + \delta^2 \text{tg}^2 \varphi_1 \text{tg } \varphi_2) - \\ &- (n_1+1)^{1/2} (\delta + \delta^2 \text{tg } \varphi_1)] \sin \alpha_1 \text{ch } \alpha_2 + \\ &+ [(n_2-1)^{-1/2} (\text{tg } \varphi_1 + \text{tg } \varphi_2 + 2\delta \text{tg } \varphi_1 \text{tg } \varphi_2 + \delta^2 \text{tg}^2 \varphi_1 \text{tg } \varphi_2) + (n_2-1)^{1/2} (\delta + \delta^2 \text{tg } \varphi_1)] \cos \alpha_2 \text{sh } \alpha_2 + \\ &+ \frac{1}{2} [-(n_2-1)^{1/2} (n_1+1)^{1/2} \delta^2 - (n_2-1)^{-1/2} (n_1+1)^{1/2} (1 + \delta \text{tg } \varphi_2)^2 + (n_2-1)^{-1/2} (n_1+1)^{-1/2} (1 + \delta \text{tg } \varphi_1)^2 + \\ &+ (n_2-1)^{-1/2} (n_1+1)^{1/2} (\text{tg } \varphi_1 + \text{tg } \varphi_2 + \delta \text{tg } \varphi_1 \text{tg } \varphi_2)^2] \sin \alpha_1 \text{sh } \alpha_2, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \cos \mu_z &= [1 - 2\delta(\text{tg } \varphi_1 + \text{tg } \varphi_2) + 2\delta^2 \text{tg } \varphi_1 \text{tg } \varphi_2] \cos \alpha_4 \text{ch } \alpha_3 + \\ &+ [n_2^{-1/2} (-\text{tg } \varphi_1 - \text{tg } \varphi_2 + \delta \text{tg}^2 \varphi_2 - \delta^2 \text{tg } \varphi_1 \text{tg}^2 \varphi_2 + 2\delta \text{tg } \varphi_1 \text{tg } \varphi_2) - \\ &- n_2^{1/2} (\delta - \delta^2 \text{tg } \varphi_1)] \sin \alpha_4 \text{ch } \alpha_3 + \\ &+ [n_1^{1/2} (-\text{tg } \varphi_1 - \text{tg } \varphi_2 + \delta \text{tg}^2 \varphi_1 - \delta^2 \text{tg}^2 \varphi_1 \text{tg } \varphi_2 + 2\delta \text{tg } \varphi_1 \text{tg } \varphi_2) + n_1^{1/2} (\delta - \delta^2 \text{tg } \varphi_2)] \cos \alpha_4 \text{sh } \alpha_3 + \\ &+ \frac{1}{2} [-n_2^{1/2} n_1^{1/2} \delta^2 - n_2^{1/2} n_1^{1/2} (1 - \delta \text{tg } \varphi_1)^2 + n_2^{1/2} n_1^{1/2} (1 - \delta \text{tg } \varphi_2)^2 + \\ &+ n_2^{1/2} n_1^{1/2} (-\text{tg } \varphi_1 - \text{tg } \varphi_2 + \delta \text{tg } \varphi_1 \text{tg } \varphi_2)^2] \sin \alpha_4 \text{sh } \alpha_3. \end{aligned} \quad (3.36)$$

В (3.35) и (3.36) введены следующие обозначения:

$$\alpha_1 = (n_1+1)^{1/2} \beta_1, \quad \alpha_2 = (n_2-1)^{1/2} \beta_2, \quad \alpha_3 = n_1^{1/2} \beta_1, \quad \alpha_4 = n_2^{1/2} \beta_2. \quad (3.37)$$

Поскольку анализ формул для  $\cos \mu_x$  и  $\cos \mu_z$  в общем виде затруднителен, то мы остановимся на одном частном случае: а именно, на кольцевом фазотроне с  $K \gg C$  и без прямолинейных промежутков. В этом случае

$$\begin{aligned} \delta = 0, \quad \varkappa_1 \approx \varkappa_2 \approx 1 \quad (\text{см. (3.17)}), \quad n_1 \approx n_2 \approx \frac{K}{C} \gg 1, \\ \text{tg } \varphi_1 = \text{tg } \varphi_2 = 0, \end{aligned} \quad (3.38)$$

и, как следует из (3.35), (3.36),

$$\cos \mu_x = \cos \alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_2, \quad \cos \mu_z = \cos \alpha_2 \operatorname{ch} \alpha_1 \quad (3.39)$$

Пологая в (3.39)  $\cos \mu_x = \pm 1$ ,  $\cos \mu_z = \pm 1$ , легко найти границы областей устойчивости. На рис. 4 приведено по две (из бесконечного числа) области устойчивости для  $X$  и  $Z$  - движений. Совместная устойчивость осуществляется в областях, заштрихованных на рисунке. Как видно из рис. 4, наибольшая из совместных областей (I.I) образована пересечением первых областей устойчивости для  $X$  и  $Z$  - движений. Коэффициент увеличения  $C$  в (I.I) составляет приблизительно 5-6. Другие совместные области (I.П), (П.I) и (П.П) существенно меньше первой. Из них, по-видимому, могут представлять интерес области (I.П) и (П.I). На примере этих областей отчетливо видна неравноправность  $X$  и  $Z$  - направлений. Коэффициент увеличения установки в (I.П), (П.I) порядка 2.

Из сравнения формул (3.35), (3.36) и (3.39) следует, что при небольших значениях среднего показателя поля  $K$  краевая фокусировка вносит существенный вклад, сильно влияя на частоты свободных колебаний. В частности, за счет краевой фокусировки можно значительно уменьшить азимутальные размеры отрицательных секторов, не нарушая устойчивости в  $Z$  - направлении, что в свою очередь приводит к уменьшению коэффициента увеличения установки (вместо 5-6 можно получить 3-2,5).

Чтобы закончить исследование решений уравнений (3.19), нам остается выписать функции Флоке. Для этого снова вернемся к уравнениям (3.31) с помощью них легко установить связь между  $X_0$  и  $X'_0$ ,  $Z_0$  и  $Z'_0$ .

$$X'_0 = \frac{e^{iN_x} - Q_{11}}{Q_{12}} X_0 = \int_x X_0, \quad Z'_0 = \frac{e^{iN_z} - P_{11}}{P_{12}} Z_0 = \int_z Z_0. \quad (3.40)$$

Подставляя (3.40) в (3.23) - (3.27) и сравнивая с (3.21), для функций Флоке найдем:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_{x,z} \\ \psi'_{x,z} \end{pmatrix} &= M_{x,z}^+(\sigma) \begin{pmatrix} 1 \\ f_{x,z} \end{pmatrix}, && \text{в положительном секторе} \\ \begin{pmatrix} \psi_{x,z} \\ \psi'_{x,z} \end{pmatrix} &= \Pi_{x,z}(\sigma) K_{x,z}^+ M_{x,z}^+(\sigma_1) \begin{pmatrix} 1 \\ f_{x,z} \end{pmatrix}, && \text{в первом промежутке} \\ \begin{pmatrix} \psi_{x,z} \\ \psi'_{x,z} \end{pmatrix} &= M_{x,z}^-(\sigma) K_{x,z}^- \Pi_{x,z}(\sigma_2) K_{x,z}^+ M_{x,z}^+(\sigma_1) \begin{pmatrix} 1 \\ f_{x,z} \end{pmatrix}, && \text{в отрицательном секторе} \\ \begin{pmatrix} \psi_{x,z} \\ \psi'_{x,z} \end{pmatrix} &= \Pi_{x,z}(\sigma) K_{x,z}^- M_{x,z}^-(\sigma_2) K_{x,z}^- \Pi_{x,z}(\sigma_2) K_{x,z}^+ M_{x,z}^+(\sigma_1) \begin{pmatrix} 1 \\ f_{x,z} \end{pmatrix} && \text{во втором промежутке} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Таким образом, решение уравнений свободных колебаний полностью найдено. Знание этих

решений позволяет приступить к анализу влияния возмущений магнитного поля на движение частиц, к установлению допусков на точность сборки магнита и характеристики поля, к вопросу о рассеянии частиц на остаточном газе в камере ускорителя и т.д. Однако, этот вопрос требует самостоятельного анализа и здесь затрагиваться не будет.

§ 4. Схема расчета параметров кольцевого фазотрона.

Математический аппарат, изложенный в предыдущих параграфах, позволяет произвести расчет геометрических параметров кольцевого фазотрона. Под геометрическими параметрами мы понимаем угловые растворы секторов и промежутков, коэффициент увеличения установки, число элементов периодичности и, наконец, частоты бетатронных колебаний, т.е. рабочую точку на области устойчивости. Наиболее разумной кажется следующая схема расчета.

Выбирается число пар секторов  $N$  и значения  $q_1, q_2, q_0$ , причем  $q_1$  задается приблизительно раза в 2-3 большим, чем  $q_2$ , а  $q_0$  сравнимым с  $q_2$ . Именно такой выбор  $q_1, q_2, q_0$  приводит к приемлемым значениям коэффициента увеличения установки  $C$ . Действительно, согласно (3.7) и (3.II) в этом случае получим

$$C \approx 5 - 3.$$

Используя значения  $N, C$  и  $q_1, q_2, q_0$ , по формулам (3.I3) находим  $\beta_1, \beta_2, \delta$  и затем из (3.I7)  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Знание этих величин позволяет определить угловые растворы секторов и промежутков, а также углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

У Угловые растворы секторов, как нетрудно показать, определяются выражениями:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} = \frac{\sin \frac{\beta_1}{2}}{C \alpha_1 - 1 + \cos \frac{\beta_1}{2}}, \quad (4.1)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2} = \frac{\sin \frac{\beta_2}{2}}{C \alpha_2 + 1 - \cos \frac{\beta_2}{2}}. \quad (4.2)$$

Находя отсюда  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , из (3.2), (3.3) и (3.4) получим  $\varphi_1, \varphi_2$  и  $\theta_0$ . Таким образом, первая часть расчета проведена; остается лишь найти частоты бетатронных колебаний  $\nu_x$  и  $\nu_z$ . Для определения  $\nu_x$  и  $\nu_z$  кроме уже известных величин требуется значение среднего показателя поля  $K$ .  $K$  выбирается в соответствии с заданными начальной и конечной энергиями частиц и с желаемой радиальной апертурой камеры ускорителя. Поэтому мы будем считать  $K$  заданным. Определяя  $n_1$  и  $n_2$  из (3.I8) и затем подставляя их и  $\beta_1, \beta_2, \delta, \varphi_1, \varphi_2$  в (3.35) и (3.36), получим значения  $\mu_x, \mu_z$ , а, следовательно, частоты бетатронных колебаний:

$$\left. \begin{aligned} \nu_x &= \frac{N \mu_x}{2\pi}, \\ \nu_z &= \frac{N \mu_z}{2\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Если в процессе расчета значения  $\cos \mu_x$  и  $\cos \mu_z$  оказываются по абсолютной величине меньше единицы, т.е. если мы попали в совместную область устойчивости, то на этом расчет заканчивается. В противном случае приходится выбирать новые значения  $q_1, q_2, q_0$  и проводить весь расчет заново.

По изложенной схеме рассчитывать параметры модели кольцевого фазотрона на энергию электронов 2 Mev, сооружаемую в Объединенном институте ядерных исследований. Для этой установки  $N$  было выбрано равным 8,  $q_1 = \frac{1}{2}$ ,  $q_2 = q_0 = \frac{1}{6}$ , а  $K = 4$ . Полученные характеристики модели приведены в таблице I.

Т а б л и ц а I

ориентировочные параметры модели кольцевого фазотрона

$N$	$K$	$C$	$n_1$	$n_2$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_0$	$\mu_x$	$\mu_z$	$\nu_x$	$\nu_z$
8	4	3	1,32	1,45	22°	8°2	7°29	2,48	1,32	3,16	1,68

В ходе изготовления секторов их угловые растворы были несколько изменены и соответственно изменились частоты бетатронных колебаний.

Истинные параметры модели приведены в таблице II.

Т а б л и ц а II.

Действительные параметры модели кольцевого фазотрона

$N$	$K$	$C$	$n_1$	$n_2$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_0$	$\mu_x$	$\mu_z$	$\nu_x$	$\nu_z$
8	4	3	1,32	1,45	22°30	7°30	7°30	2,49	1,30	3,17	1,66

Приложение № I

Значения элементов матриц  $P$  и  $Q$ .

$$P_{11} = [1 - 2\delta(\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2) + 2\delta^2 \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2] \cos \alpha_4 \operatorname{ch} \alpha_3 + \\ + [n_2^{-1/2} (-\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2 + \delta \operatorname{tg}^2 \varphi_2 + 2\delta \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 - \delta^2 \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg}^2 \varphi_2) - n_2^{-1/2} (\delta - \delta^2 \operatorname{tg} \varphi_1)] \operatorname{sh} \alpha_4 \operatorname{ch} \alpha_3 + \\ + 2n_1^{1/2} (\delta - \delta^2 \operatorname{tg} \varphi_2) \cos \alpha_4 \operatorname{sh} \alpha_3 + [n_2^{-1/2} n_1^{1/2} (1 - \delta \operatorname{tg} \varphi_2)^2 - n_2^{-1/2} n_1^{1/2} \delta^2] \operatorname{sh} \alpha_4 \operatorname{sh} \alpha_3 \quad (I.1)$$

$$P_{12} = q_0 \left\{ 2(\delta - \delta^2 \operatorname{tg} \varphi_2) \cos \alpha_4 \operatorname{ch} \alpha_3 + n_1^{1/2} [1 - 2\delta(\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2) + 2\delta^2 \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2] \cos \alpha_4 \operatorname{sh} \alpha_3 + \right. \\ + [n_2^{-1/2} (1 - \delta \operatorname{tg} \varphi_2)^2 - n_2^{-1/2} \delta^2] \operatorname{sh} \alpha_4 \operatorname{ch} \alpha_3 + \\ + [n_1^{-1/2} n_2^{1/2} (-\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2 + \delta \operatorname{tg}^2 \varphi_2 + 2\delta \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 - \delta^2 \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg}^2 \varphi_2) - \\ \left. - n_1^{-1/2} n_2^{1/2} (\delta - \delta^2 \operatorname{tg} \varphi_1)] \operatorname{sh} \alpha_4 \operatorname{sh} \alpha_3 \right\} \quad (I.2)$$





Л и т е р а т у р а

1. А.А.Коломенский, М.С.Рабинович, В.А.Петухов, Сборник "Некоторые вопросы теории циклических ускорителей", изд. АН СССР, Москва 1955 г. также ПТЭ № 2, 26, (1956)
2. K.R. Symon, *Phys. Rev.*, 98, 1152 (1955).
3. G. Lüders, *Nuovo Cimento, Supplemento, Ser.10, 2* (4), 1075 (1955).
4. А.А.Коломенский, ЖТФ, 26, 1969 (1956).
5. А.А.Коломенский, Диссертация, Москва ФИАН СССР (1957)
6. F.T. Cole, R.O.Horby, L.W. Jones and all, *Rev. Sci. Instr.*, 28, 403 (1957)
7. K.R. Symon, D.W. Kerst and all, *Phys. Rev.*, 103, 1837 (1956) (см. также перевод в УФН, LXI, 613 (1957))
8. А.А.Коломенский, Атомная энергия 12, 492, (1957).
9. L.W. Jones, K.M. Terwilliger and all, *Rev. Sci. Instr.*, 27, 651 (1956).
10. Дж.Стокер, Нелинейные колебания в механических и электрических системах, ИЛ.Москва (1953).

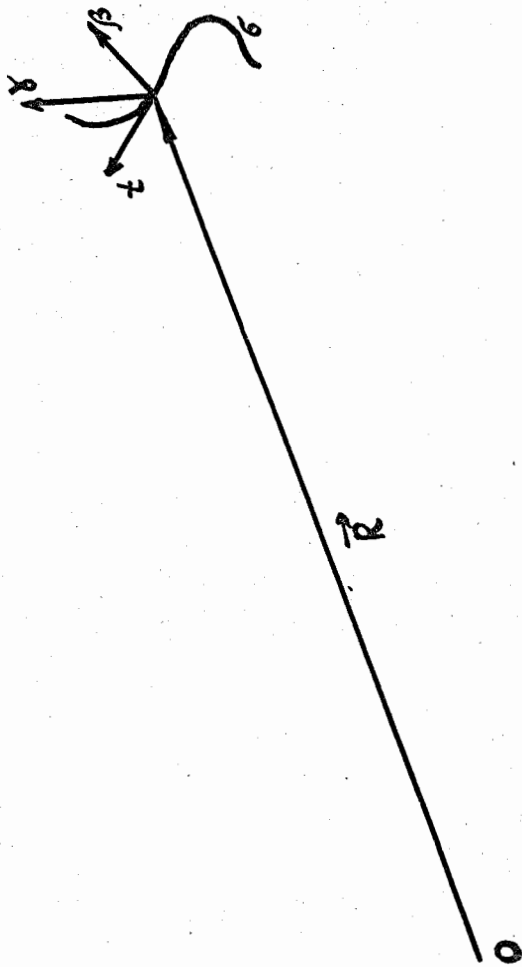


Рис. I

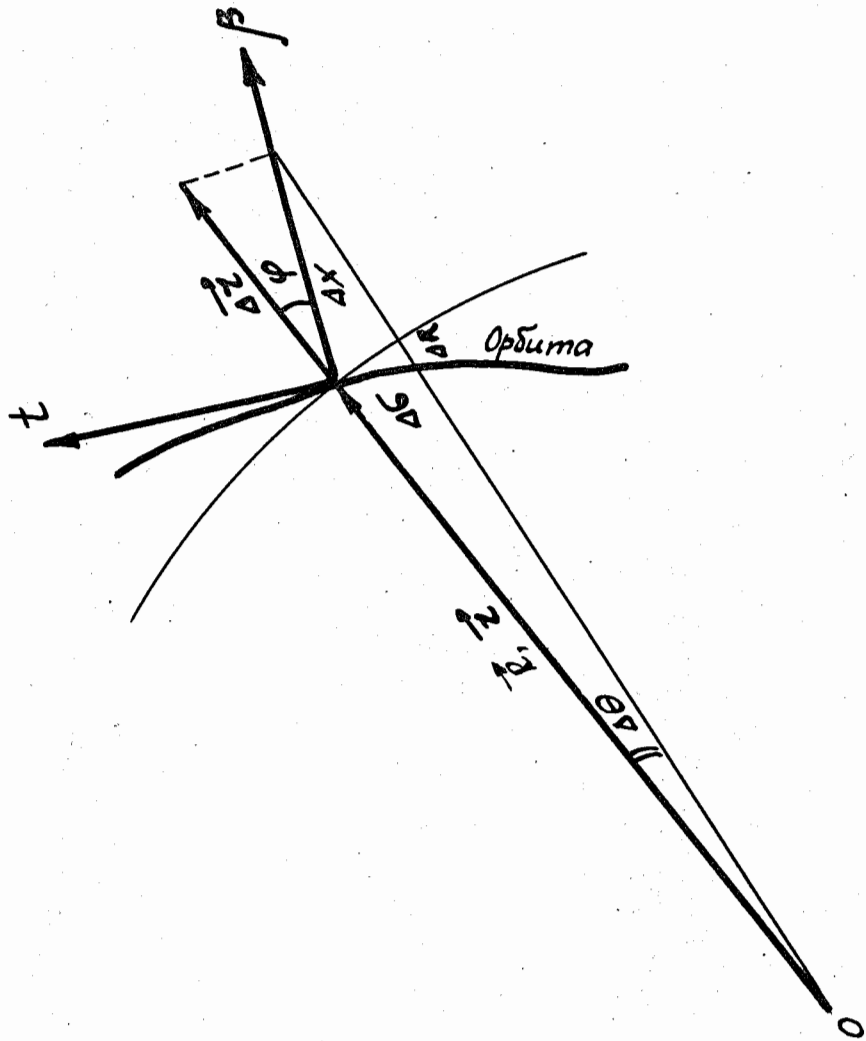
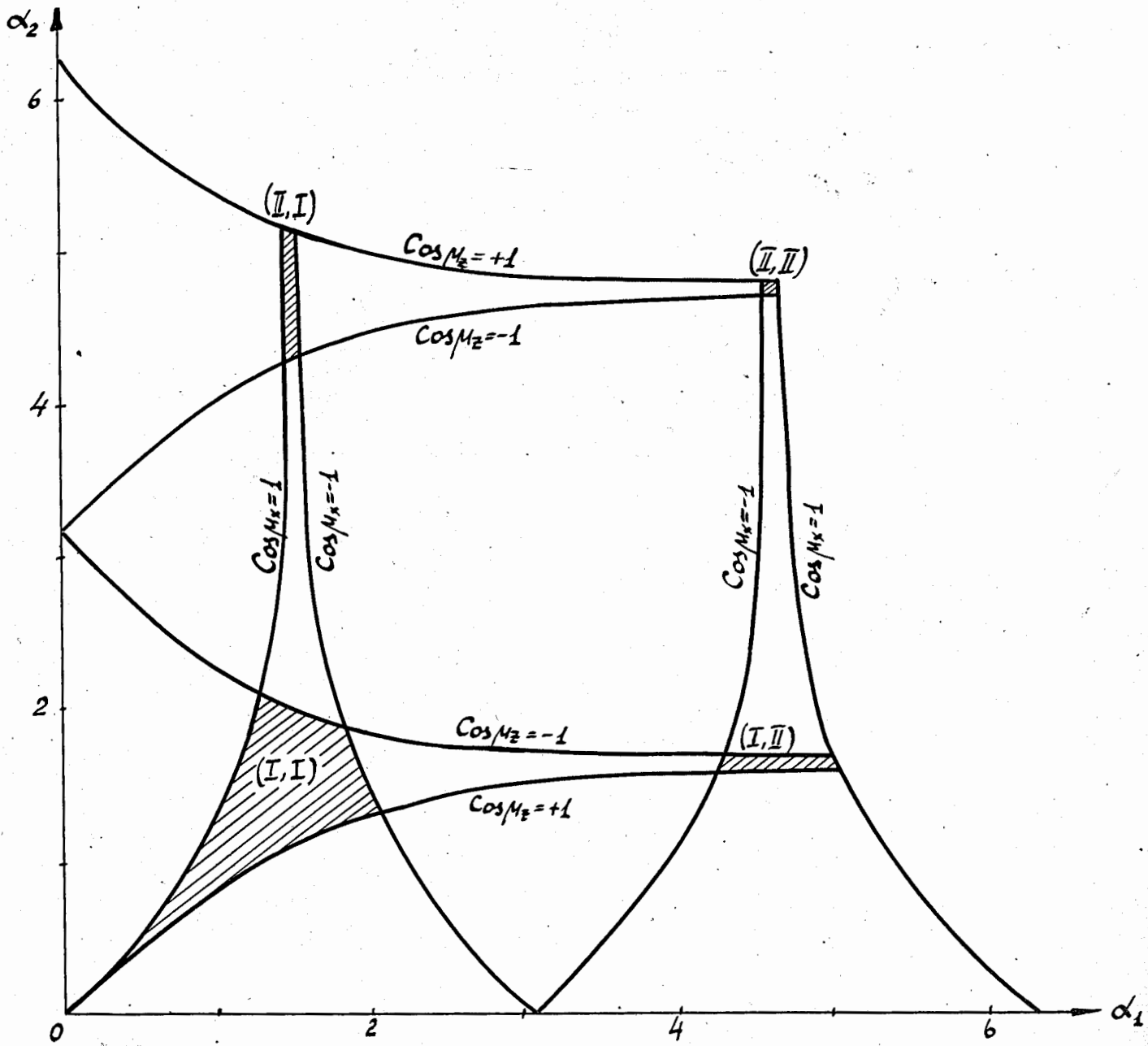


Рис. 2

Рис.4



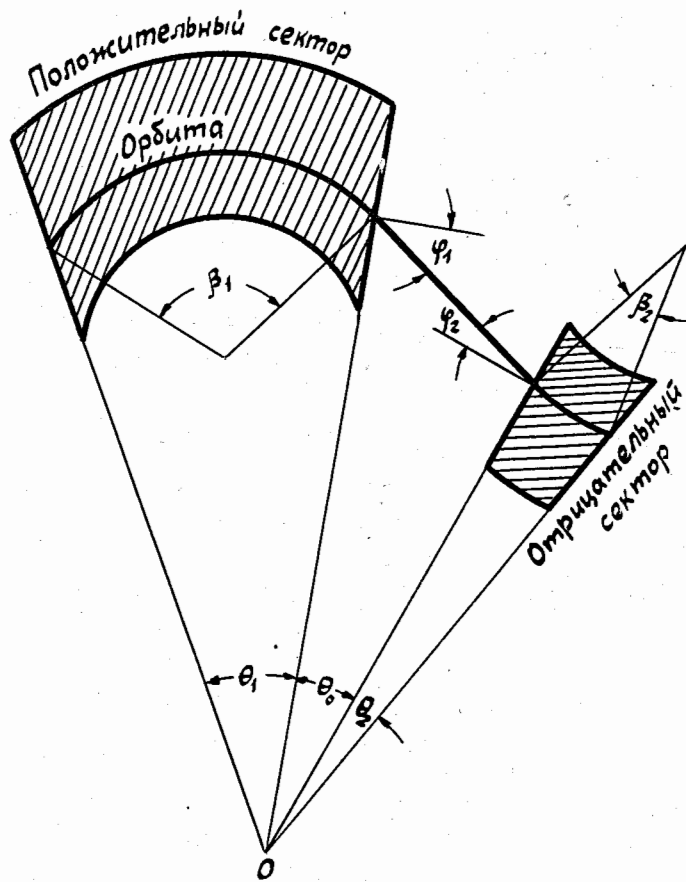


Рис. 3