

8
K-65 7.3.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

P-205

Г. И. Копылов

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА
МНОЖЕСТВЕННОГО РОЖДЕНИЯ**

ж.ЭТФ, 1958, т 35, в 6, с 1426 - 1434.

Дубна, 1958.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

P—205

Г. И. Копылов

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА
МНОЖЕСТВЕННОГО РОЖДЕНИЯ**

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Дубна, 1958.

А н н о т а ц и я

Обсуждается идея создания "таблицы случайных звезд", способной воспроизвести в виде, пригодном для сопоставления с экспериментами, теоретические представления о множественном рождении элементарных частиц. Показана возможность составления такой таблицы в интервале энергий до 10 Бэв.

Большинство работ по теории множественного рождения посвящено решению двух задач: вычислению статистических весов различных реакций и получению импульсных распределений. В стороне обычно остается вопрос об угловых распределениях и о различного рода корреляциях между направлениями и скоростями вторичных частиц. Между тем, решение его позволило бы более определенно судить о пригодности теории для объяснения процесса множественного рождения. В самом деле, корреляции между направлениями движения частиц должны зависеть от характера взаимодействия между частицами в момент их рождения: в первоначальной модели Ферми статистически независимых вторичных частиц корреляции должны зависеть лишь от ограничений, вызываемых законами сохранения; в принятом сейчас представлении о резонансном взаимодействии нуклона и мезона величина корреляций должна быть больше. Сопоставление количественных выражений для корреляций с экспериментом, быть может, уточнило бы характер резонансного взаимодействия или наметило пределы изобарной теории.

Качественную оценку корреляций "вперед-назад" делал еще Ферми (I), учитывая закон сохранения момента количества движения. Однако, для количественных выводов помехой служит громоздкость необходимых расчетов. Но если бы их и удалось провести при простейших предположениях, то усложнение вида матрицы взаимодействия (естественный путь развития теории) поставило бы расчет перед новыми трудностями. В этих условиях очевидным выходом явилось бы

моделирование процесса множественного рождения. Но так как наши представления о механизме множественного рождения слишком туманны для того, чтобы отыскать среди крупномасштабных процессов управляемый сходными закономерностями, то следует воспользоваться численным моделированием. Такое моделирование должно быть способно воспроизводить целый класс предположений о виде взаимодействия.

Идея подобного моделирования была выдвинута М.И.Подгорецким и М.Даньшем в виде предложения о составлении "таблицы случайных звезд" по изобарной модели. Суть этой идеи - в создании таблицы случайных величин, подчиняющихся тем же закономерностям, что и импульсы вторичных частиц в изобарной модели. Таблица случайных звезд должна содержать в себе ряд строк; каждая из них представляет собой описание одного случая рождения частиц, т.е. содержит величины и направления импульсов отдельных вторичных частиц.

Статистическая обработка такой таблицы принесет те же сведения о процессе множественного рождения - статистические веса, распределение импульсов, углов, зарядов и т.д. - что обработка реальных звезд в фотоэмульсии или камере. Сопоставление подобных сведений и ответит на вопрос о согласии теории с экспериментом.

Таблица случайных звезд в принципе содержит в себе все сведения, которые можно получить из реальных звезд, и в этом ее преимущество перед другими методами расчета. Любые распределения или корреляции, которые удастся получить из звезд в фотоэмульсии, могут быть продублированы на соответствующей таблице. Недостаток метода - ограниченная, при малом объеме таблицы, точность, большое количество расчетов, необходимых для составления и анализа

таблицы и невозможность получать аналитические выражения результатов.

В настоящей работе показано, как реализовать эту идею, применяя электронную счетную машину. Впрочем, при 5-6 вторичных частицах и некоторых упрощающих предположениях таблицу в 100-200 строк можно составить указанным методом и при помощи ручного счета.

Развиваемый метод учитывает сохранение энергии и импульса в реакциях. Его удастся обобщить на довольно широкий класс представлений о взаимодействии частиц при множественном их рождении. Это обстоятельство и позволяет ответить положительно на вопрос о возможности моделирования множественного рождения.

В § I идет речь о построении таблицы реакций, в которых число вторичных частиц равно трем; считается справедливой модель Ферми. На этом простейшем примере показаны основные черты развиваемого метода моделирования.

В § 2 метод обобщается на n вторичных частиц и произвольный вид квадрата F матричного элемента взаимодействия; излагается вкратце ряд деталей расчета, способствующих уменьшению объема вычислений. Попутно выводятся некоторые кинематические характеристики системы из n частиц.

В § 3 намечена процедура составления таблицы случайных звезд, пригодной для сравнения с экспериментом.

§ I. Таблица трехчастичных реакций

Рассмотрим реакцию взаимодействия двух частиц с суммарной энергией E и нулевым импульсом, в итоге которой появляются три частицы с массами m_i , импульсами \vec{p}_i и полными энергиями e_i ($i = 1, 2, 3$). Согласно теории Ферми вероятность этой реакции пропорциональна

$$W(E) = \int d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2 d^3\vec{p}_3 \delta(\sum_1^3 e_i - E) \delta(\sum_1^3 \vec{p}_i) \quad (I.1)$$

Множитель $\delta(\sum_1^3 e_i - E) \delta(\sum_1^3 \vec{p}_i)$ представляет собою плотность распределения импульсов в импульсном 9-мерном пространстве; вся задача моделирования и состоит в осуществлении подобного распределения. Но узкие полосы вдоль пересечения поверхностей $\sum_1^3 e_i - E = 0$ и $\sum_1^3 \vec{p}_i = 0$ в 9-мерном прямоугольнике имеют слишком малый объем, чтобы случайно выбранные точки с координатами \vec{p}_i достаточно часто попадали в эти полосы. Зато интеграл, получающийся из (I.1) несложными выкладками

$$W(E, 0) = \int_{D_3} d\rho_1 d\rho_2 \delta L^2 \rho_1 \rho_2 (E - e_1 - e_2) \quad (I.2)$$

позволяет осуществлять нужное распределение импульсов. В нем область интегрирования D_3 (рис. I) ограничена кривыми

$$\cos \vartheta = \pm 1. \quad (\vartheta - \text{угол между } \vec{p}_1 \text{ и } \vec{p}_2). \text{ Их уравнения}$$

$$\varepsilon^+ = 0, \quad \varepsilon^- = 0, \quad (I.3)$$

где

$$\xi^{\pm} = e_1 + e_2 + \sqrt{(p_1 \pm p_2)^2 + m_3^2} - E \quad (I.4)$$

Из (I.2) следует, что плотность распределения вероятности иметь импульс p_1 в dp_1 и одновременно p_2 в dp_2 (т.е. плотность точек $M(p_1, p_2)$ в D_3) пропорциональна функции

$$W(p_1, p_2) = p_1 p_2 (E - e_1 - e_2) \quad (I.5)$$

Точки M , согласно (I.5), распределены в D_3 неравномерно. Ниже нам неоднократно придется говорить о неравномерных распределениях. Остановимся на способах их осуществления с помощью равномерных.

Для получения случайных величин α , распределенных в (α, β) с плотностью $f(\alpha)$ (рис.2), представляются две возможности: А. Метод браковки и В. "Прямой" метод (5).

А. Разыгрываются одновременно две величины: α равномерно в (α, β) и β равномерно в $(0, M')$, где константа $M' \gg f(\alpha)$ для всех α на (α, β) . Те пары α, β , для которых $f(\alpha) < \beta$, отбрасываются, тогда оставшиеся значения α будут распределены с плотностью $f(\alpha)$. Действительно, при большом числе розыгрышей количество значений α , близких к $\alpha = \alpha_1$, окажется равным количеству $\beta < f(\alpha_1)$, т.е. величине $f(\alpha_1)/M'$, так как β распределены по ординате $\alpha = \alpha_1$ равномерно.

Этот способ пригоден и для многомерных распределений; однако

при резких максимумах функции $f(\alpha)$ количество отброшенных пар α, β может оказаться чересчур большим; если $f(\alpha)$ обращается в бесконечность, то способ вовсе не годится (или дает приближенные результаты).

В. Разыгрывается β равномерно в $(0, I)$ и решается каждый раз уравнение $\int_0^\alpha f(\alpha) d\alpha = \beta$. Тогда плотность распределения решений этого уравнения пропорциональна $f(\alpha)$, так как при этом $dn/d\alpha = (dn/d\beta) f(\alpha) \sim f(\alpha)$.

Хотя этот способ применим лишь к одномерным распределениям, но зато он пригоден для бесконечных плотностей и не связан с необходимостью отбрасывать разыгранные значения β .

Двухмерное распределение (I.5) удобно осуществлять по способу браковки. Для этого необходимо знать максимум $W(p_1, p_2)$ на D_3 . Легко обнаружить, что значения $p_{1,2} = \bar{p}_{1,2}$, при которых этот максимум достигается, суть корни системы

$$p_1^2/e_1 = p_2^2/e_2 = E - e_1 - e_2, \quad (I.6)$$

если только они оказываются внутри D_3 . В противном случае $\bar{p}_{1,2}$ должны лежать на границе D_3 - кривой $\xi^- = 0$ и удовлетворять системе уравнений

$$\frac{p_2 [E - e_1 - e_2 - (p_1^2/e_1)]}{p_1 [E - e_1 - e_2 - (p_2^2/e_2)]} = \frac{p_2 - (E - e_2)(p_1/e_1)}{p_1 - (E - e_1)(p_2/e_2)}, \quad \xi^- = 0.$$

$$(I-7, I-8)$$

При высоких энергиях E приходится решать (I.6), при низких - (I.7)-I.8).

Пара значений p_1, p_2 определяет собою импульсы всех трех частиц по величине и направлению. Поэтому последовательность получения одной строки таблицы 3-х частичных звезд, отвечающих модели Ферми, такова:

1) разыгрываются случайные величины p_1, p_2 в интервалах $(0, \tilde{p}_1 \max)$, $(0, \tilde{p}_2 \max)$ равномерно. Здесь

$$\tilde{p}_1 \max = \{ [E^2 - (m_1 + m_2 + m_3)^2] [E^2 - (m_1 - m_2 - m_3)^2] \}^{1/2} / 2E \quad (\text{I.9})$$

и аналогично выглядит $\tilde{p}_2 \max$;

2) следует убедиться, что точка (p_1, p_2) лежит в D_3 . Проще всего это сделать, проверив выполнение неравенств

$$\varepsilon^- < 0, \quad \varepsilon^+ > 0 \quad (\text{I.10})$$

Если они выполнены, то всегда удастся найти такой угол ϑ между p_1 и p_2 , что

$$e_1 + e_2 + \sqrt{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 + m_3^2} = E \quad (\text{I.11})$$

Если же (I.11) не выполнено, то пара (p_1, p_2) отбрасывается, вместо нее разыгрывается новая;

3) в $(0, w_{\max} \equiv w(\bar{p}_1, \bar{p}_2))$ разыгрывается равномерно случайная величина β и проверяется неравенство

$$\beta \leq w(p_1, p_2). \quad (\text{I.12})$$

Если оно не выполнено, то пара (P_1, P_2) отбрасывается; если же выполнено, то: 4) из (I.II) вычисляется

$$\cos \vartheta = (P_3^2 - P_1^2 - P_2^2) / 2 P_1 P_2 \quad (I.I3)$$

Импульсы трех частиц можно теперь считать равными

$$\vec{P}_1 = \{P_1 \cos \psi, -P_1 \sin \psi, 0\}, \vec{P}_2 = \{P_2 \cos(\vartheta - \psi), P_2 \sin(\vartheta - \psi), 0\},$$

$$\vec{P}_3 = -\vec{P}_1 - \vec{P}_2, \quad (I.I4)$$

где ψ - случайный угол, равномерно распределенный в $(0, 2\pi)$.

Он введен для того, чтобы в таблице были изотропны в плоскости

$(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3)$ направления любого из импульсов.

Таблица, каждая строка которой вычислена по (I.I4), будет таблицей плоских звезд. Это потребует и при обработке эксперимента свести все трехчастичные звезды в одну плоскость и лишь после этого сопоставлять статистику эксперимента со статистикой таблицы. Чтобы получить таблицу трехчастичных звезд, не лежащих в одной плоскости, надо, очевидно, еще разбросать равномерно по единичной сфере конец вектора единичной нормали к плоскости $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3)$.

Проще всего равномерное распределение достигается, если разграть косинус η угла между нормалью и осью OZ равномерно в $(-1, 1)$ и угол φ между осью Ox и проекцией нормали на плоскость XOy равномерно в $(0, 2\pi)$. Тогда число попаданий конца нормали в элемент поверхности (η, φ) окажется пропорциональным площади этого элемента $d\eta d\varphi$.

Углы ψ и $\arcsin \eta$ наряду с углом φ образуют три угла Эйлера, описывающие преобразование системы $Oxyz$ в $Ox'y'z'$ (2). В таблице пространственных звезд компоненты импульсов должны поэтому вычисляться по формуле $\vec{p}' = A\vec{p}$, где A - известная матрица преобразования

$$A = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \eta \sin \psi \sin \varphi & \sin \psi \cos \varphi + \eta \cos \psi \sin \varphi & \sqrt{1-\eta^2} \sin \psi \\ -\cos \psi \sin \varphi - \eta \sin \psi \cos \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \eta \cos \psi \cos \varphi & \sqrt{1-\eta^2} \cos \psi \\ \sqrt{1-\eta^2} \sin \psi & -\sqrt{1-\eta^2} \cos \psi & \eta \end{pmatrix} \quad (I.I5)$$

а импульсы можно положить равными

$$\vec{p}_1 = \{p_1, 0, 0\}, \quad \vec{p}_2 = \{p_2 \cos \vartheta, p_2 \sin \vartheta, 0\} \quad (I.I6)$$

Другой способ превращения плоских звезд в звезды, равномерно распределенные в пространстве, изложен в § 2. Там же дается оценка эффективности предлагаемой методики получения звезд.

§ 2. Таблица реакций с n вторичными частицами

Общий случай. Рассмотрим случай появления n вторичных частиц во взаимодействии, которое характеризуется квадратом матричного элемента $\mathcal{F}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)$, нигде не обращающимся в бесконечность. \mathcal{F} может также зависеть от энергии E и

параметров первичных частиц, для дальнейшего это несущественно.

Импульсная часть выражения для статистического веса имеет вид:

$$W(E, \vec{P}) = \int d^3\vec{p}_1 \dots d^3\vec{p}_n \mathcal{F}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) \delta(\sum_i^0 e_i - E) \delta(\sum_i^0 \vec{p}_i - \vec{P}), \quad (2.1)$$

где \vec{P} - суммарный импульс системы. Область интегрирования по первым $(k-1)$ импульсам $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{k-1}$ будем обозначать через D_k , при этом на остальные импульсы $\vec{p}_k, \dots, \vec{p}_n$ никаких ограничений, кроме законов сохранения, не накладывается. Область интегрирования по \vec{p}_k при фиксированных $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{k-1}$ и произвольных $\vec{p}_{k+1}, \dots, \vec{p}_n$ (с учетом законов сохранения) пусть будет d_k . Введем специальные обозначения для энергии и импульса, которые остаются на долю частиц k, \dots, n при фиксированных импульсах частиц $1, \dots, k-1$

$$E_k = E - \sum_i^{k-1} e_i \quad (2.2)$$

$$\vec{P}_k = \sum_i^{k-1} \vec{p}_i = \vec{P}, \quad (2.3)$$

а также для характеристических ("предельных") энергии и импульса частицы k в системе центра масс частиц k, \dots, n при фиксированных $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{k-1}$

$$E_k^* = (M_k^2 + m_k^2 - \mu_k^2) / 2M_k, \quad (k=1, \dots, n-1), \quad (2.4)$$

$$E_n^* = (M_{n-1}^2 - m_{n-1}^2 + m_n^2) / 2M_{n-1}, \quad (2.4^*)$$

$$P_k^* = \sqrt{E_k^{*2} - m_k^2} = \sqrt{(M_k^2 - m_k^2 - \mu_k^2)^2 - (2m_k\mu_k)^2} / 2M_k, \quad (2.5)$$

где M_k - эффективная масса системы частиц k, \dots, n , а μ_k - масса компаунд-частицы, составленной из $k+1, \dots, n$:

$$M_k^2 = E_k^2 - P_k^2 \quad (2.6)$$

$$\mu_k = \sum_{k+1}^n m_i \quad (2.7)$$

Будем задавать компоненты импульса \vec{P}_k в сферической системе координат $\vec{P}_k = \{P_k, \vartheta_k, \varphi_k\}$, связанной с суммой импульсов $\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_{k-1}$, уже разыгранных ранее. Полярная ось системы пусть направлена вдоль \vec{P}_k , угол ϑ_k образован векторами \vec{P}_k и \vec{P}_k , азимут φ_k отсчитывается от вертикальной плоскости, в которой лежит \vec{P}_k (рис.3). Эта система координат удобна тем, что модуль суммы импульсов \vec{P}_k и \vec{P}_k не зависит от угла φ_k

$$P_{k+1}^2 = P_k^2 + P_k^2 + 2P_k P_k \cos \vartheta_k \quad (2.8)$$

Для пересчета компонент импульса в прямоугольную систему координат можно пользоваться формулами, следующими из рис.3.

$$\vec{P}_k = \{x_k, y_k, z_k\}$$

$$R_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \quad (2.9)$$

$$x_k = P_k \left[\frac{x_k}{P_k} \cos \vartheta_k + \left(\frac{z_k}{P_k} \frac{x_k}{R_k} \cos \varphi_k - \frac{y_k}{R_k} \sin \varphi_k \right) \sin \vartheta_k \right] \quad (2.10)$$

$$y_k = P_k \left[\frac{y_k}{P_k} \cos \vartheta_k + \left(\frac{z_k}{P_k} \frac{y_k}{R_k} \cos \varphi_k + \frac{x_k}{R_k} \sin \varphi_k \right) \sin \vartheta_k \right] \quad (2.11)$$

$$z_k = p_k \left[\frac{z_k}{p_k} \cos \vartheta_k - \frac{R_k}{p_k} \cos \varphi_k \sin \vartheta_k \right] \quad (2.12)$$

Теперь преобразуем (2.1). После интегрирования по \vec{p}_n и по ϑ_{n-1} δ -функции под интегралом исчезают:

$$W(E, \vec{p}) = \int d^3\vec{p}_1 \dots d^3\vec{p}_{n-2} dp_{n-1} d\varphi_{n-1} p_{n-1} \frac{E_n}{p_{n-1}} \mathcal{F}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{n-1}, -\vec{p}_{n-1} - \vec{p}_{n-1}), \quad (2.13)$$

где вектор \vec{p}_{n-1} имеет вид

$$\vec{p}_{n-1} = \left\{ p_{n-1}, \arccos \frac{E_n^2 - m_n^2 - p_{n-1}^2 - p_{n-1}^2}{2 p_{n-1} p_{n-1}}, \varphi_{n-1} \right\} \quad (2.14)$$

а область интегрирования D_n ограничена поверхностями $\cos \vartheta_{n-1}$ т.е.

$$\sqrt{(p_{n-1} \pm p_{n-1})^2 + m_n^2} = E_{n-1} \pm E_{n-1} \quad (2.15)$$

Выражение (2.13) в принципе уже позволяет решать задачу об осуществлении распределения, требуемого моделью со взаимодействием \mathcal{F} . В (2.13) нет зависимых переменных интегрирования, поэтому наборы значений $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{n-2}, p_{n-1}, \varphi_{n-1}$ должны удовлетворять некоторым неравенствам вместо равенств (как этого требовало бы распределение (2.1)), что резко увеличивает эффективность розыгрышей. Однако объем расчетов, необходимых для создания распределения по $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{n-2}, p_{n-1}, \varphi_{n-1}$ с плотностью $p_{n-1} E_n \mathcal{F} / p_{n-1}$,

еще весьма велик. Все дальнейшие преобразования должны быть направлены на уменьшение объема расчетов. Очевидный путь к такому уменьшению состоит в том, чтобы провести в (2.13) максимально возможное количество интегрирований, так как благодаря этому равномерность области интегрирования падает, увеличивая тем самым отношение объема области к объему описанного прямоугольника. Однако эта цель недостижима при произвольном виде функции \mathcal{F} . Имея в виду дать метод, пригодный для любых \mathcal{F} , мы пойдем по другому пути сокращения расчетов, а именно, представим $d^3 \vec{P}_k$ в виде $P_k^2 dP_k d\cos\vartheta_k d\varphi_k$, пользуясь описанной выше сферической системой координат. Тогда плотность распределения по $P_1, \cos\vartheta_1, \varphi_1; P_2, \dots, \varphi_{n-2}; P_{n-1}, \varphi_{n-1}$ будет иметь вид:

$$\Phi(P_1, \dots, \varphi_{n-1}) = P_{n-1} \frac{E_n}{P_{n-1}} \mathcal{F} \cdot \prod_{k=2}^{n-2} P_k^2 \quad (2.16)$$

где аргументы \mathcal{F} те же, что и в (2.13). Существенным является тот факт, что области $D_2, \dots, D_k, \dots, D_n$ разрешенных значений $\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_{k-1}, \dots, \vec{P}_1, \dots, \vec{P}_{n-1}$ не зависят от $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$. Докажем это.

Пусть импульсы $\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_{k-1}$ ($k \leq n-2$) фиксированы. Найдем область d_k изменения импульса \vec{P}_k . Для оставшихся частиц $k, k+1, \dots, n$ справедливы уравнения

$$\sum_k^n e_i = E_k, \quad (2.17)$$

$$\sum_k^n \vec{P}_i = -\vec{P}_k. \quad (2.17')$$

Известно⁽³⁾, что предельные значения импульса одной из частиц при множественном их рождении достигаются, когда все прочие вторичные частицы движутся как одно целое, т.е. как частица с массой, равной их суммарной массе. Для частицы k эта масса равна μ_k (см. (27)). Законы сохранения для двух частиц с массами m_k и μ_k , суммарной энергией E_k и импульсом $-\vec{P}_k$ запишутся в виде

$$\sqrt{P_k^2 + m_k^2} + \sqrt{(-\vec{P}_k - \vec{P}_k)^2 + \mu_k^2} = E_k$$

Это уравнение поверхности, ограничивающей область d_k возможных положений конца вектора \vec{P}_k . Положение и форма области d_k может быть наглядней всего получена из графического метода изображения законов сохранения⁽⁴⁾. Сфера $P_k^* = \text{Const.}$ в системе центра масс деформируется при переходе в л. систему в эллипсоид вращения, вытянутый вдоль направления взаимного движения двух систем отсчета. В рассматриваемом нами случае центр эллипсоида находится в точке $O(-E_k^* \vec{P}_k / M_k)$, большая ось имеет длину $2P_k^* E_k / M_k$ и направлена вдоль вектора \vec{P}_k и является осью вращения, малая полуось равна P_k^* (рис.4). Здесь E_k^* и P_k^* определяются по (2,4) - (2.5).

Теперь можно найти область D_k . Так как энергия E_k^* частицы k в системе центра масс частиц $k, k+1, \dots, n$ не меньше массы этой частицы m_k , то (см.(2.4))

$$M_k \gg \mu_{k-1} \quad (k \leq n-1) \quad (2.18)$$

Условие (2.18) является не только необходимым ограничением на $\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_{k-1}$, но и достаточным: при его выполнении всегда можно

найти такие $\vec{P}_k, \dots, \vec{P}_n$, что законы сохранения будут выполняться, например, частицы $k+1, \dots, n$ направить все вместе (в системе отсчета, где $\vec{P}_k = 0$) в одну сторону, а частицу k - в противоположную.

Но M_k зависит лишь от модуля \vec{P}_k (2.6), который в свою очередь не зависит от φ_k (2.8). Поэтому форма области D_k (2.18) не зависит от φ_k ($k \leq n-1$). Для D_n это следует из (2.15).

Независимость очертаний областей D_k от φ_k для всех k от 1 до n позволяет уменьшить размерность каждой D_k в полтора раза, - так, размерность D_n будет $2(n-1)$ вместо $3(n-1)$. Тем самым значительно возрастает отношение объема области D_n к объему описанного прямоугольника того же числа измерений.

Выпишем более детально пределы, ограничивающие размеры D_k и описанного прямоугольника. Из рис.4 ясно, что при фиксированных

$\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_{k-1}$ пределы изменения p_k даются формулами

$$p_{\max}^{(k)} = (E_k^* p_k + p_k^* E_k) / M_k \quad \text{при } k=1, \dots, n-1,$$

$$p_{\min}^{(k)} \begin{cases} (E_k^* p_k - p_k^* E_k) / M_k & \text{при } E_k / M_k \gg E_k^* / m_k \text{ и } k < n-1, \\ 0 & \text{при } E_k / M_k \ll E_k^* / m_k \text{ и } k < n-1, \end{cases}$$

$$p_{\min}^{(n-1)} = |E_{n-1}^* p_{n-1} - p_{n-1}^* E_{n-1}| / M_{n-1}$$

(2.19)

(Ограничения на p_{n-1} отличаются от ограничений на p_k ($k < n-1$) потому, что система частиц $n-1$ и n является

кинематически определенной).

Пределы изменения $\cos \vartheta_k$ при фиксированных $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{k-1}, p_k$ имеют следующий вид:

$$(M_k E_k^* - E_k e_k) / p_k p_k \gg \cos \vartheta_k \gg -1 \text{ при } E_k / M_k \gg E_k^* / m_k \text{ или}$$

$$\text{при } E_k / M_k \leq E_k^* / m_k \text{ и } p_k \gg (p_k^* E_k - E_k^* p_k) / M_k,$$

$$1 \gg \cos \vartheta_k \gg -1 \text{ при } E_k / M_k \leq E_k^* / m_k \text{ и } p_k \leq (p_k^* E_k - E_k^* p_k) / M_k.$$

(2.20)

Границы описанного прямоугольника получаются точно такими же рассуждениями, но в предположении, что ни один импульс не фиксирован. Для модуля импульса частицы k получается следующая цепочка формул ($k = 1, \dots, n$)

$$M^2 = E^2 - p^2 \quad (2.21)$$

$$e_k^* = [M^2 + m_k^2 - (\sum_{i \neq k}^n m_i)^2] / 2M, \quad (2.22)$$

$$p_k^* = \sqrt{e_k^{*2} - m_k^2},$$

$$\tilde{p}_{k \max} = (E p_k^* + p e_k^*) / M, \quad (2.22)$$

$$\tilde{p}_{k \min} = \begin{cases} (p e_k^* - E p_k^*) / M & \text{при } E / M \gg e_k^* / m_k \\ 0 & \text{при } E / M \leq e_k^* / m_k \end{cases} \quad (2.23)$$

Границы изменения $\cos \vartheta_k$ суть $-1, +1$ (кроме $\cos \vartheta_1$).

Итак, можно наметить следующий порядок розыгрыша n -частичных

реакций, характеризуемых квадратом матричного элемента взаимодействия \mathcal{F} . Разыгрываются равномерно p_1 и $\cos \mathcal{J}_1$ в $(\tilde{p}_{1, \min}, \tilde{p}_{1, \min}) \cup (-1, 1)$, затем p_2 и $\cos \mathcal{J}_2$ в $(\tilde{p}_{2, \min}, \tilde{p}_{2, \max}) \cup (-1, 1) \cup$ проверяется выполнение (2.18) при $k = 3$ и т.д....
 разыгрываются p_k и $\cos \mathcal{J}_k$ в $(\tilde{p}_{k, \min}, \tilde{p}_{k, \max})$ и $(-1, 1)$, вычисляется E_{k+1} по (2.2) и R_{k+1} по (2.8) и проверяется (2.18); при невыполнении (2.18) розыгрыш начинается снова с p_1 , в противном случае переходят к $k+1$ и т.д. вплоть до $k = n-1$, когда разыгрывается лишь p_{n-1} в $(p_{\min}^{(n-1)}, p_{\max}^{(n-1)})$ (а не между $\tilde{p}_{n-1, \min}, \tilde{p}_{n-1, \max}$!) и проверка (2.18) не нужна. Лишь после этого разыгрываются $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_{n-1}$ в $(0, 2\pi)$, вычисляется $\cos \mathcal{J}_{n-1}$ по (2.14) и $\Phi(p_1, \dots, \mathcal{Y}_{n-1})$ по (2.16).

Осуществление распределения с плотностью Φ по методу браковки имеет в данном случае свои особенности. Применять метод браковки "в лоб" нельзя, так как $\Phi_{\max} = \infty$ при $p_{n-1} = 0$ если \mathcal{F} всюду конечна. Но как раз при $p_{n-1} \rightarrow 0$ интервал изменения p_{n-1} (2.19) сжимается в точку, т.е. p_{n-1} нет нужды разыгрывать. Пусть точность задания импульсов в таблице есть ε , тогда можно найти $p_{\min}^{(n-1)}$ настолько малое, что интервал изменения p_{n-1} будет меньше ε , и для $p_{n-1} \leq p_{\min}^{(n-1)}$ можно полагать $p_{n-1} = p_{n-1}^*$. Если же $p_{n-1} > p_{\min}^{(n-1)}$, то распределение осуществляется по методу браковки, а в качестве максимума Φ берется максимум (2.16) с заменой p_{n-1} на $p_{\min}^{(n-1)}$. Заметим, что если предварительная оценка Φ_{\max} слишком завышена или невозможна

из-за сложного вида \mathcal{F} , ее можно улучшить в ходе расчета. Вычислив $\Phi = \Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(v)}$ для достаточно большого числа v наборов компонент $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{n-1}$, можно принять в качестве Φ_{max} наибольшее значение Φ_{max} на полученной совокупности наборов. После этого, разыграв v случайных чисел $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(v)}$ на $(0, \Phi_{max})$ и сравнив с ними $\Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(v)}$, нужно отбросить те наборы, для которых $\alpha > \Phi$.

Составление таблицы после осуществления распределения с плотностью Φ завершается вычислением $\vec{p}_n = -\vec{p}_{n-1} - \vec{P}_{n-1}$ и переводом всех импульсов в систему $Oxyz$ по (2.9)-(2.12).

Модель Ферми $\mathcal{F} \equiv 1$ позволяет немного упростить методику расчета. В этом случае можно в (2.13) проинтегрировать по φ_{n-1} и по P_{n-1} (точнее, по e_{n-1} в пределах

$$e_{min}^{max} = \frac{E_{n-1}^* E_{n-1} \mp P_{n-1}^* P_{n-1}}{M_{n-1}} \quad (2.24)$$

и получить плотность распределения по $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{n-2}$

$$\Phi(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{n-2}) = \frac{4\pi}{3} P_{n-1}^* \frac{3E_{n-1}^* E_n^* E_{n-1}^2 - P_{n-1}^{*2} P_{n-1}^2}{M_{n-1}^3} \prod_{i=1}^{n-2} P_i^2 \quad (2.25)^{I/}$$

Последовательность розыгрышей здесь та же, что и в общем случае, но обрывается на розыгрыше $P_{n-2}, \cos \vartheta_{n-2}$. Получив равномерно распределенные в D_{n-1} точки, осуществляют неравномерное

^{I/} при $n=3$ (2.25) совпадает с (4) из [6].

распределение с плотностью ϕ' по методу браковки. При этом ϕ'_{max} можно подсчитать заранее, а именно, можно показать, что наибольшее значение ϕ' реализуется, когда $\vec{P}_{n-1} = 0$, а импульсы $\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_{n-2}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{P_1^2}{e_1} = \frac{P_2^2}{e_2} = \dots = \frac{P_{n-2}^2}{e_{n-2}} = \frac{2P_{n-1}^{*2} E_{n-1}^* E_n^* E_{n-1}}{(E_{n-1}^* E_n^*)^2 + P_{n-1}^{*2} (E_{n-1}^{*2} - E_{n-1}^* E_n^* + E_n^{*2})} \quad (2.26)$$

Эта система легко решается по методу итераций.

Далее нужно разыгрывать импульс P_{n-1} . Вместо этого лучше разыграть энергию e_{n-1} по прямому методу (Б), т.е. решить уравнение

$$2e_{n-1}^3 - 3E_{n-1} e_{n-1}^2 = (2e_{min}^3 - 3E_{n-1} e_{min}^2)(1-\alpha) + (2e_{max}^3 - 3E_{n-1} e_{max}^2)\alpha, \quad (2.27)$$

где α равномерно распределено в $(0,1)$.

Лишь после этого имеет смысл разыгрывать $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$.

Характерной чертой изложенной в § I-2 методики является наличие неудачных розыгрышей, т.е. осуществление неравномерных распределений путем браковки. Ясно, что при обилии неудачных розыгрышей методика становится практически непригодной для составления таблиц. В общем виде оценить эффективность методики не удастся. Однако, численный эксперимент показал, что для реакций рождения мезонов протонами при $E = 4,72$ Бэв эффективность метода равна 50% (рождение одного Λ -мезона) и 10% (два Λ -мезона). При

большем числе мезонов эффективность слишком мала, чтобы можно было при ручном счете пользоваться изложенным методом. Все же составлять таблицы в случае рождения 3-4 мезонов можно и ручным счетом, если проинтегрировать φ' еще несколько раз. Перевод расчетов на электронную машину позволит составлять большие таблицы 5-6 частичных реакций изложенным здесь методом.

§ 3. Таблица случайных звезд

Таблицу n - частичных реакций трудно сопоставлять с экспериментальными данными, так как нейтральные частицы в эксперименте не регистрируются. Она должна войти составной частью в таблицу случайных звезд, образуемых при данной энергии E в столкновении двух данных частиц.

Для составления такой таблицы надо рассмотреть все виды реакций, идущих с заметным весом. Величины статистических весов определяют среднее число строк, приходящихся на каждую реакцию.

Если в модели Ферми статистические веса поддаются вычислению и для многих реакций уже известны, то для моделирования взаимодействия с произвольным квадратом матричного элемента $\mathcal{F}(\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n)$ задача вычисления статистического веса может оказаться не менее трудной, чем составление таблицы случайных звезд. Однако изложенной выше прием составления таблицы n -частичных реакций в принципе позволяет определять и фазовый объем ω - основную составную часть выражения для статистического веса. В самом деле, ясно, что фазовый объем ω равен произведению объема области D_n на среднее значение ϕ (2.16) по этой

области. Объем же области D_n равен проценту удачных попаданий наборов $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{n-1}$ в эту область, умноженному на объем описанного вокруг D_n прямоугольника с известными размерами. На деле применение этого способа подсчета фазовых объемов требует весьма значительного числа розыгрышей ввиду большого разброса в значениях Φ - тем большего, чем меньше фазовый объем.

Если все же статистические веса важнейших реакций, идущих при данной энергии, известны, то составление таблицы случайных звезд не представляет труда. Расположим все реакции $N_1, N_2, \dots, N_j, \dots$ в произвольном порядке и присвоим каждой из них на отрезке $(0,1)$ свой интеграл δ_{N_j} , длина которого пропорциональна статистическому весу реакции N_j . Тогда для составления очередной строки таблицы бросают случайно на отрезок $(0,1)$ точку. Номер интеграла δ_{N_j} , в который она попадет, указывает ту реакцию N_j , которая будет представлена в этой строке. Выясняется, кроме того (если нужно), путем розыгрыша, какие из импульсов в этой строке следует считать принадлежащими заряженным частицам. Импульсы прочих частиц, как ненаблюдаемых, в строку можно не вносить.

В составленном по такому способу таблице а) реакции будут перетасованы случайным образом; б) число строк, относящихся к каждой реакции, будет флуктуировать относительно ожидаемого по статистическому весу. Закон этих флуктуаций будет тот же, что и при наблюдении реальных звезд. Впрочем, в небольших таблицах для увеличения их точности можно флуктуаций не допускать.

При помощи счетной машины, дающей звезды с $n = 6$, изложенным методом можно учесть большинство реакций, вызываемых протонами с кинетической энергией 10 Бэв. В ней будут присутствовать звезды с разным числом лучей.

Точность результатов, получаемых из таблицы случайных звезд, определяется в основном теми же факторами, что и для реальных звезд. Отпадают ошибки в определении энергии, углов вылета частиц, можно отбросить колебания частоты отдельных реакций вокруг их статистического веса, зато на результатах скажется сама ошибка в вычислении статистических весов реакций. При ошибках в весах порядка 10% вряд ли стоит иметь таблицы более чем на 1000 строк. Запас точности, который при этом взят, нужен для получения условных распределений и для сравнения распределений при разных энергиях. Ошибки в статистических весах при разных E нивелируются, так как являются более-менее систематическими, и поэтому результаты сравнения распределений при разных E могут иметь большую точность.

Любопытная возможность повышения точности открывается при составлении таблиц звезд в лабораторной системе отсчета. Тогда отпадает необходимость перевода реальных звезд в систему центра масс, а эта задача решается при высоких энергиях весьма грубо. Таким образом облегчается обработка экспериментальных данных и повышается точность сопоставления таблицы случайных звезд с экспериментальными данными. Формулы для расчетов в обеих системах одинаковы по сложности (в § 2 всюду $\vec{P} \neq 0$). Однако практически при $\vec{P} \neq 0$ суживается интервал разрешенных значений $\cos \vartheta_k$ (узкие пучки) и расширяется интервал разрешенных значений импульсов P_k , а оба эти фактора уменьшают эффективность розыгрышей \vec{P}_k . Поэтому лучше в уже готовой таблице звезд в системе центра масс переводить импульсы в лабораторную систему.

З а к л ю ч е н и е

Целью работы было выяснить возможность построения таблицы случайных звезд. В статье намечен путь построения такой таблицы. В первую очередь удастся, очевидно, воспроизвести в виде таблицы модель Ферми и изобарную модель. Можно надеяться, что произведение реакций с 6-7 вторичными частицами для современных счетных машин вполне реально, а это значит, что можно составить, к примеру, таблицу звезд, получаемых в pp-столкновениях на ускорителе на Ю. Бэв.

Способ построения таблицы для этих моделей таков, что распределение продуктов реакции по углам будет изотропным. Для объяснения реально наблюдаемой неизотропности нужно задаться определенным, подходящим видом зависимости квадрата матричного элемента \mathcal{F} от импульсов и углов.

Описанный метод составления таблицы случайных звезд пригоден при различных видах квадрата матричного элемента \mathcal{F} . Сложность функции \mathcal{F} не играет роли, так как основное время при работе счетной машины по этому методу должно тратиться на выбраковку неудачных наборов компонент импульсов, а не на выкладки с удачно разыгранными импульсами.

Поэтому открывается возможность путем испытания различных представлений о взаимодействии и сопоставлении получаемых при этом статистических весов, распределений, корреляций с экспериментальными данными отыскать феноменологически удовлетворительную запись взаимодействия.

Такой же прием можно было бы применить и для изучения распада нестабильных частиц.

Настоящая работа была предпринята по предложению М.И.Подгорецкого. Автор пользуется случаем выразить ему свою искреннюю благодарность. Автор благодарен также Ю.П.Благовещенскому за многочисленные и ценные обсуждения.

Л и т е р а т у р а

1. E.Fermi, Progr.Theor.Phys., 5 ⁰ 5, 570, 1951; Phys.Rev., 92, 452, 1953; 93, 1434, 1954.
2. Голдстейн Г, Классическая механика, М., 1957.
3. Sternheimer R.M., Phys.Rev., 93, 642, 1954.
4. Blaton J., Det Kgl.Vidensk.Selskab.Mat.-fys.Medd., 24, No20, 1950
5. Butler J.W., в книге Meyer H.A., Symposium on Monte-Carlo Methods, 1956, New York
6. Block M.M., Phys.Rev., 101, 796, 1956.

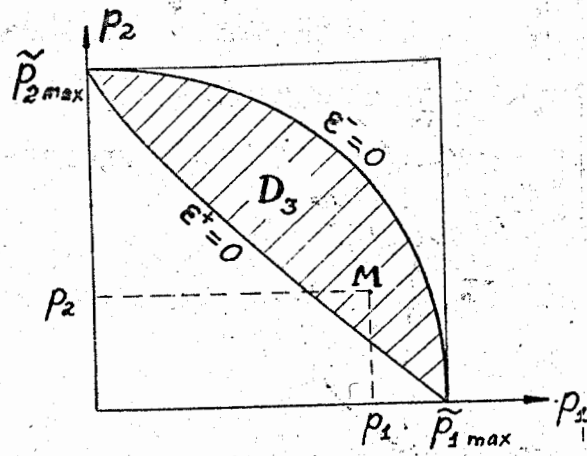


рис. 1

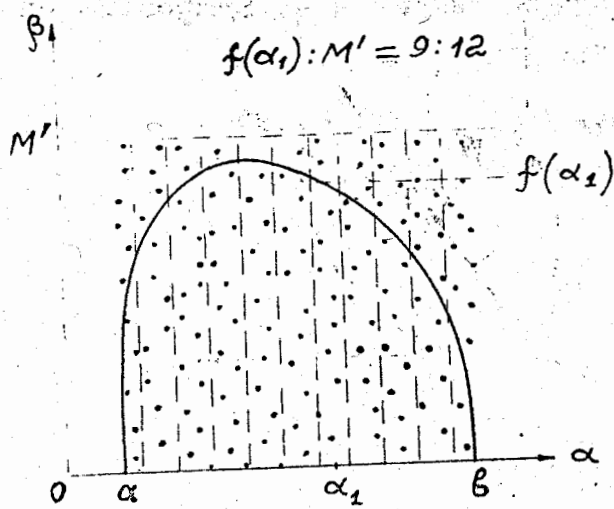


рис. 2

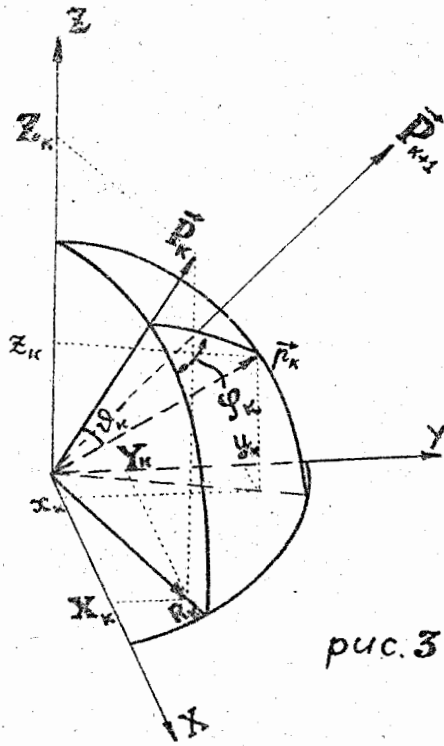


рис. 3

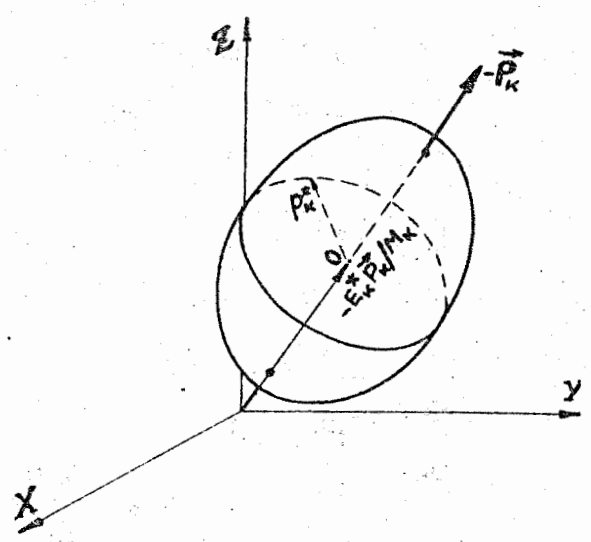


рис. 4