

С 324.3

В-54

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P-2022



ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р. Вит

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ АМПЛИТУДЫ
РАССЕЯНИЯ ВПЕРЕД
ПРИ БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЯХ

1965

P-2022

Р. Вит^{х)}

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ АМПЛИТУДЫ
РАССЕЯНИЯ ВПЕРЕД
ПРИ БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЯХ

Направлено в „Acta Physica Polonica“

х) Постоянный адрес: Ягеллонский университет, Краков, Польша.

Облаковский институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

3064/2 49

В настоящее время очень много внимания уделяется поведению амплитуд рассеяния при больших энергиях. Особенно тщательно изучался вопрос об их ограничении сверху^{/1/}. Во всех доказательствах существенную роль играет условие унитарности, которое вместе с аналитичностью вводит весьма сильные ограничения на допустимый рост $T(s, t)$. Такую же картину наблюдаем в различных моделях. Предполагая, например, что

$$T(s, t) \sim s^{\alpha(t)} (\log s)^{\beta(t)} (\log \log s)^{\gamma(t)} \dots,$$

из унитарности получаем $\alpha(0) \leq 1$. Взяв $\alpha(0) = 1$, на $\beta(t)$ накладываем условие $\beta(0) \leq 1$. При $\alpha(0) = 1$ и $\beta(0) = -1$ $\gamma(0) \leq 0$ стс^{/2/}. Похожие ограничения на $T(s, 0)$ получены в работе Грибова^{/3/}.

При доказательстве ограничения снизу $T(s, 0)$ существенную роль играет перекрестная симметрия и положительность $\text{Im } T(s, 0)$ в физической области энергии^{/4,5/}:

$$\text{Im } T(s, 0) = \frac{k}{4\pi} \sigma_{\text{tot}}(k) > 0, \quad k > 0. \quad (1)$$

Не исключено, что эти два свойства $T(s, 0)$ могут сыграть существенную роль при улучшении ограничения сверху в случае рассеяния вперед.

Несколько другой подход в проблеме асимптотического поведения $T(s, t)$ был развит в работах Мейнмана^{/6-8/} и дубненской группы^{/9/}. Здесь очень важную роль играет предположение о существовании у $T(s, t)$ (или у соответствующих вспомогательных функций) определенных пределов при $s \rightarrow \infty$, допускающих применение теоремы Фрагмена-Линделёфа (далее ТФЛ).

Доказательство дифракционной картины, т.е.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \text{Re } T(s, 0) / \text{Im } T(s, 0) = 0, \quad (2)$$

принимает в этом подходе особенно простой вид.

В недавней работе Хури и Киношита^{/10/} очень внимательно исследовалось поведение $\text{Re } T(s, 0) / \text{Im } T(s, 0)$ при больших энергиях. Авторы, пользуясь введенными Мейманом^{/8/} теоремами, получили ряд интересных результатов относительно асимптотического поведения $T(s, 0)$, предполагая, что $\text{Re } T(s, 0)$ для физических значений s меняет знак конечное число раз.

В нашей работе мы поближе остановимся на вопросе о возможных осциллирующих $\text{Re } T(s, 0)$. Основным математическим аппарат, которым будем пользоваться, — это ТФЛ и принцип аргумента (далее πA). Совместно они были впервые применены Мейманом^{/11/} при доказательстве несовместимости Чу-Мандельштама с физическими значениями постоянной связи.

II

Для определенности будем рассматривать амплитуду рассеяния вперед π^{\pm} -мезонов на протонах, определенную следующими образом:^{x)}

$$T(z) = \frac{1}{2} [T^+(z) + T^-(z)].$$

Напомним ее основные свойства:

A. $T(z)$ голоморфна в комплексной плоскости $z = \omega + i\gamma$ за исключением двух разрезов (когда $\omega \in (-\infty, -1)$ и $\omega \in (1, \infty)$) и двух полюсов в точках $\omega = \pm \omega_B = \pm \frac{1}{2} M$.

B. $T(z) = -T^*(z^*)$.

B. $T(z) = T(-z)$.

Г. Имеет место фруассаровское ограничение

$$|T(\omega)| < C \omega \ln^2 \omega.$$

D. $\lim_{\omega \rightarrow \infty} 1/T(\omega + i0) = 0$.

Последнее свойство является добавочным предположением, имеющим чисто физический характер.

Докажем сейчас следующую теорему:

Всегда существуют такие две точки $z = \pm a$, находящиеся на отрезке $(-\omega_B, \omega_B)$ или на мнимой оси, в которых $T(\pm a) = T(1) = T^*(1)$, если выполняются предположения A-D.

Доказательство:

Ограничения Г достаточно, чтобы написать дисперсионную формулу для $T(z)$ с двумя вычитаниями. Отсюда, в силу оптической теоремы (1), легко увидеть, что $T(u = -z^2)$ является Н-функцией Герглота и поэтому не может быть $T(z) = T^*(z)$ для $\omega \neq 0$. Поскольку $T(z)$ вещественна только на отрезке $\omega \in (-1, 1)$ и на мнимой оси, там и надо искать точки $\pm a$.

Если $T(0) \leq T(1)$, то они находятся на отрезке $(-\omega_B, \omega_B)$ в противоположном случае мнимой оси. Легко в этом убедиться, если обратить внимание на то, что

x) Обозначения у нас такие, как в работе Лемана^{/12/}.

$$\frac{dT(iy)}{dy} < 0 \quad \text{для } y > 0,$$

откуда вытекает существование конечного числа особенностей функции $1/T(z) = t(z)$ в верхней полуплоскости.

Так как

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} f(\omega + i0) = 0,$$

из ТФЛ получаем

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} t(z) = 0, \quad \text{Im } z > 0,$$

откуда

$$\lim_{y \rightarrow \infty} T(iy) = -\infty;$$

при $T(0) \geq T(1)$ это доказывает нашу теорему. Перейдем теперь к нашим основным выводам.

III

Рассмотрим функцию

$$F(z) = \frac{T(z) - T(1)}{\sqrt{z^2 - 1}} \frac{z^2 - \omega_B^2}{z^2 - a^2}$$

и предположим, что

a) $\lim_{\omega \rightarrow 1} F(\omega + i0) = \text{const} = b$,

из условия вещественности B вытекает тогда существование следующего предела

$$\lim_{\omega \rightarrow 1} F(\omega - i0) = \text{const} = c.$$

б) Функция $F(z)$ ограничена вблизи точки $z = 1$. Тогда из теоремы Линдлефа^{x)}, учитывая условия B и B получаем

$$b = c = -b^* = -\frac{i}{4\pi} \sigma_{\text{tot}}(1) \frac{1 - \omega_B^2}{1 - a^2}. \quad (3)$$

Таким образом, за исключением, быть может, точки $z = \infty$, функция $F(z)$ будет ограничена во всей z -плоскости.

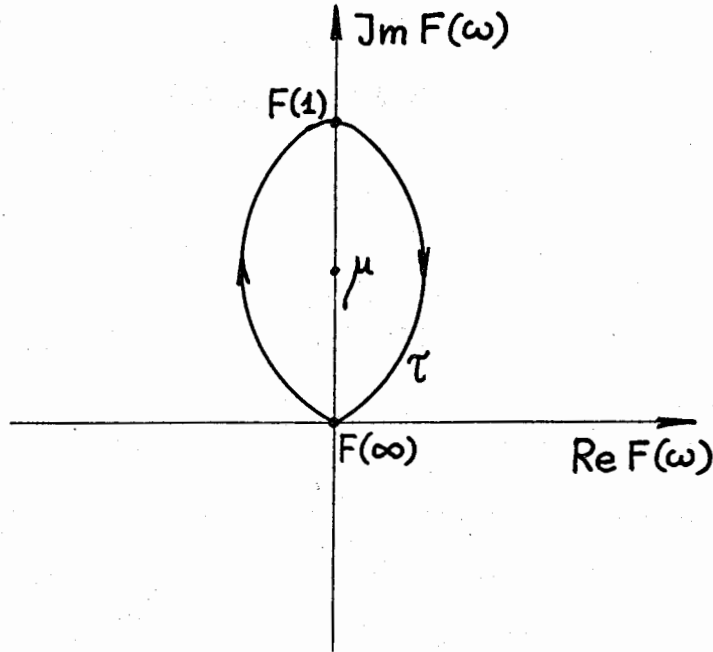
$F(z)$ — обладает еще одним важным свойством: значения $\text{Im } F(z)$ на разрезах являются неотрицательными. Это обстоятельство сыграет существенную роль в дальнейшем.

x) Формулировку этой теоремы можно найти в работе Меймана^{/11/}, Приложение 1, теорема III.

Временно предположим, что

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} F(\omega + i0) = 0. \quad (4)$$

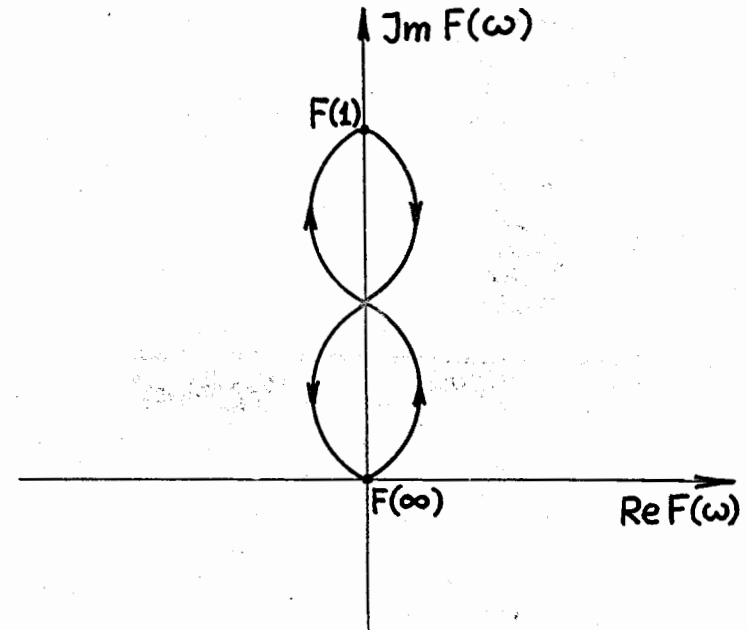
Следуя Мейману, отобразим плоскость z на плоскость $F(z)$. Может ли $F(z)$ иметь на разрезах такое поведение, как это показано на рис. 1?



Р и с . 1

Из пА для функции $F_1(z) = F(z) - \mu$ мы получили бы тогда, что число полюсов $F_1(z)$ равно, по крайней мере, двум, поскольку индекс точки μ относительно кривой τ равен -2 (кривую τ в силу перекрестной симметрии обходим два раза). Так как $F(z)$ регулярна, мы приходим к выводу, что $\text{Re } F(\omega + i0)$ не может быть положительной для $\omega \in (1, \infty)$, если в этой области энергии она не меняет своего знака.

Повторяя наши рассуждения, можно показать, что поведение $F(\omega)$, представленное на рис. 2, тоже является невозможным.

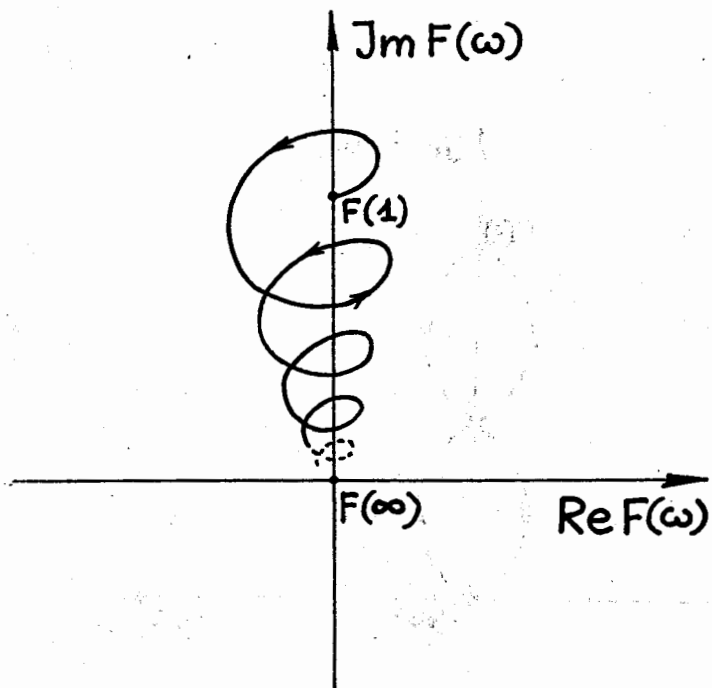


Р и с . 2

Из-за своей непрерывности $\text{Re } F(\omega)$ не может иметь бесконечного числа нулей на любом конечном отрезке вещественной оси. Поэтому естественно проследить за поведением $\text{Re } F(\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$. Оказывается, что, действительно, $\text{Re } F(\omega)$ в асимптотической области энергии может менять свой знак бесконечное число раз, когда $F(\omega)$ имеет поведение, представленное на рис. 3, т.е. когда у нас появляется бесконечное число петель (чтобы не усложнять картины, мы показали только отражение $F(\omega + i0)$ для $\omega > 1$).

Недавно появилась работа Гелера и др.^{/13/}, в которой рассматриваются комплексные диаграммы для $k_{\text{CM}} T_{\text{CM}} = \phi(k_{\text{CM}})$. Они очень удобны для исследования резонансов: каждый из них должен в ϕ -плоскости отражаться именно в виде представленной нами выше петли.^{/14/x)}

x) По крайней мере, в области не очень высоких энергий.



Р и с. 3

Поскольку выражения $T(k)/k$ инвариантны^{х)}, т.е.

$$T(k)/k = T_{CM}(k_{CM})/k_{CM}$$

"большие" резонансы, наверное, будут отражаться указанным образом в плоскости $F(\omega)$. Следует обратить внимание на то, что возможен такой случай, когда количество петель бесконечно, но ни одна из них не затрагивает мнимой оси ($\text{Im } F(\omega)$).

Резюмируя, можем сказать следующее: если $\text{Re } F(\omega)$ в физической области энергии не меняет своего знака бесконечное число раз и имеет место (4), то для асимптотических значений энергий $\text{Re } F(\omega + i0)$ будет отрицательной.

х) k_{CM} выражается через k следующим образом:

$$k_{CM} = k / (1 + 2\omega/M + 1/M^2)^{1/2}$$

При

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} 1/F(\omega + i0) = 0. \quad (5)$$

аналогичным образом заключаем:

- а) $\text{Re } F(\omega + i0)$ для $\omega > 1$ не может быть только отрицательной;
- б) меняя свой знак конечное число раз, $\text{Re } F(\omega + i0)$ в асимптотической области ω будет положительной.

IV

С физической точки зрения наиболее интересным кажется случай, когда^{19/}

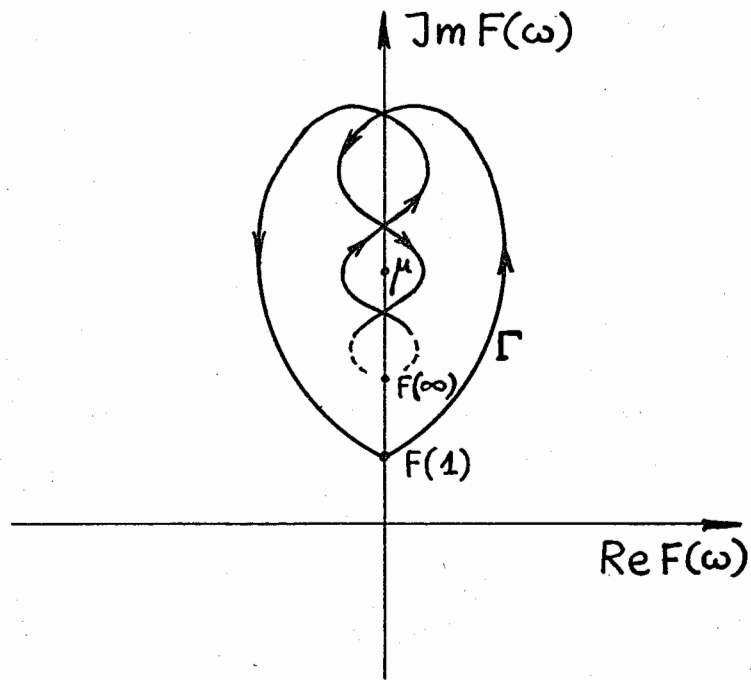
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} F(\omega + i0) = -\text{const} = \frac{i}{4\pi} \sigma_{\text{tot}}(\infty).$$

Имея в виду экспериментальные данные^{13/}, естественно предположить

$$\frac{1 - \omega_b^2}{1 - a^2} \sigma_{\text{tot}}(1) < \sigma_{\text{tot}}(\infty).$$

Сразу можно сказать, что в этом случае $\text{Re } F(\omega + i0)$ для $\omega > 1$ не может быть только отрицательной, но в остальном картина сильно усложняется. Кроме петель, может появиться еще бесконечное число "улиток" (см. рис. 4: здесь опять показаны только значения $F(\omega + i0)$ при $\omega > 1$). Не исключается также такое поведение $F(\omega)$ на разрезах, которое показано на рис. 5, хотя трудно понять, откуда берется бесконечное число осцилляций $\text{Re } F(\omega)$, когда $\text{Im } F(\omega)$ при больших энергиях монотонно падает или растет.

Петли и улитки характеризуются осцилляциями $\sigma_{\text{tot}}(\omega)$ - на рис. 5 этого нет, но появляется другое обстоятельство. Индекс точки μ относительно кривой Γ равен нулю, т.е. функция $F(z) - \mu$ имеет одинаковое число нулей и полюсов. Таким образом, если удастся доказать (например, при помощи дисперсионных соотношений), что для $\text{Im } z \neq 0$ существуют точки, в которых $F(z) = \mu$, то, следовательно, экспериментальные значения $\text{Re } F(\omega)$ и $\text{Im } F(\omega)$ не могут располагаться так, как показано на рис. 5. Этот факт может иметь некое отношение к поискам выяснения расхождений^{15/}, появившихся в последнее время между экспериментальными и теоретическими значениями $(D^+ / A^+)^2$. Пытаясь объяснить эти расхождения, Гелер и др.^{13/} не исключают возможности, что в асимптотической области энергии $D^+(\omega)$ будут принимать положительные значения. Существование " μ -точек" уже не допускает такого поведения этих функций.



Р и с. 5.

Л и т е р а т у р а

1. T.Kinoshita, J.J.Loeffel and A.Martin, Phys. Rev., 135, B1464 (1964).
Здесь можно найти ссылки на все основные работы, касающиеся этого вопроса.
2. A.Martin, Lecture on the Summer Scottish School of Theoretical Physics, Edinburg, Scotland, 1963.
3. V.N.Gribov. Nucl. Phys., 22, 249 (1961).
4. Y.S.Jin and A.Martin, Phys. Rev., 135, B1369 (1964).
5. R.Wit. Препринт ОИЯИ, Р-1028, Дубна, 1965.
6. Н.Н.Мейман. ЖЭТФ, 43, 2277 (1962).
7. Н.Н.Мейман. ЖЭТФ, 46, 1039 (1964).
8. Н.Н.Мейман. ЖЭТФ, 49, 1502 (1964).
9. А.А.Логунов, Нгуен Ван Хьен, И.Т.Тодоров, О.А.Хрусталеv. ЖЭТФ, 46, 1079 (1964).

10. T.Kinoshita and N.N.Khuri, The Real Part of Scattering Amplitude and the Behaviour of the Total Cross Section at High Energy, Preprint 1964.

11. Н.Н.Мейман, И.Гохфельд. ЖЭТФ, 43, 181 (1962).

12. H.Lehman. Nucl. Phys., 29, 300 (1962).

13. G.Höhler, E.Ebel and J.Giesecke. Zeitschrift für Phys., 180, 430 (1964).

14. R.K.Adair. Phys. Rev., 113, 338 (1959).

15. J.S.Lindenbaum. Interactions of Pions and Nucleons above 1/GeV/c, The 1964 International Conference on High Energy Physics, Dubna, E-1892.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 февраля 1965 г.

