ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2020

Р. Вит

О НОВЫХ ПРАВИЛАХ СУММ ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ЧАСТИ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ ВПЕРЕД

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1965

Р-2020

Р.Вит [x)]

О НОВЫХ ПРАВИЛАХ СУММ ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ЧАСТИ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ ВПЕРЕД

Направлено в Nuclear Physics

x) Постоянный адрес: Ягеллонский университет, Краков, Польша.

I

В последнее время очень много внимания уделяется заключениям, вытекающим из основных принципов квантовой теории поля, и их сравнению с экспериментом.

Особенно тщательно сравниваются экспериментальные данные, полученные для вещественных частей амплитуды рассеяния, со значениями этих величин, вытекающими из дисперсионных соотношений [1].

Различными авторами указывалось [2], что при больших энергиях наблюдается некое расхождение между теоретическими и экспериментальными значениями отношений $\mathrm{Re}\,T(s,0)/\mathrm{Im}\,T(s,0)$ для π-p и p-p рассеяния. Эти вопросы рассматривались с теоретической точки зрения в работах Хури и Киношита [3], а также Олесена [4] и автора [5]. Предполагая

$$\lim_{s\to\infty} T(s,0)/s = \mathrm{const} = c, \tag{1}$$

Логунов и др. [6], опираясь на теорему Фрагмена-Линделефа (дальше ТФЛ) пришли к выводу, что $c = -c^*$, т.е. получили дифракционную картину. В указанных работах положительность мнимой части амплитуды рассеяния вперед в физической области энергии начинает играть существенную роль. Следует обратить внимание на то, что этот факт в случае амплитуды $T^{(1)}(k^2)$ (обозначения и сокращения у нас такие же, как и в работе Лемана [7]) никак не отражается на значениях $\mathrm{Re}\,T^{(1)}(k^2)$ (в физической области энергии), полученных из дисперсионных соотношений, поскольку (см. [7])

$$P\int_0^\infty \frac{dk'}{k'^2 - k^2} = 0 \qquad \text{для} \quad k > 0.$$

Таким образом, уменьшая полное сечение на любую постоянную, мы никак не влияем на $\mathrm{Re}\,T^{(1)}(k^2)$ –величину непосредственно сравнивающуюся с экспериментом. Поэтому следует искать других путей, в которых условие унитарности (оптическая теорема)

$$A(k) = \frac{k}{4\pi}\,\sigma_{tot}(k) > 0, \quad k > 0 \tag{2}$$

находит более естественное отражение. Некоторые возникающие из-за этого условия ограничения на поведение амплитуды рассеяния приведены в обзорной работе Киношита [8].

В последнее время Джином и Мартэном [9] с одной стороны и автором [10], с другой, было доказано, что неравенство (2) накладывает довольно сильное ограничение на скорость убывания амплитуды рассеяния вперед. В локальной теории поля, благодаря тому же неравенству (2), теорема Карлемана [11] принимает особенно простой вид [12].

В последнее время появились работы Хури и Киношита [13] и Мартэна [14], в которых получены новые правила сумм. При выводе этих правил оптическая теорема (2) опять играет существенную роль.

В настоящей работе мы дадим другое доказательство правилу сумм, отличающемуся формой от полученных вышеуказанными авторами. Дальше, пользуясь результатами Лемана и Мартэна, покажем, что

$$\sigma_{tot}(\infty) \geq \sigma_{tot}(k=0) \quad \text{и} \quad T(k=0) \geq 0.$$

II

Как обычно, ради определенности рассмотрим симметризованную амплитуду рассеяния вперед $\pi^{\pm}$-мезонов на протонах:

$$T(z) = \tfrac{1}{2}\,[T^{+}(z) + T^{-}(z)].$$

Из условия микропричинности для $\operatorname{Im} z > 0$ следует [15]

$$|T(z)| < A \exp(\epsilon|z|), \quad A, \epsilon > 0. \tag{3}$$

Учитывая, что при больших энергиях [16]

$$|T(\omega)| < C\,\omega^2 \ln^2 \omega,$$

на $T(\omega)$ получаем ограничение [3]

$$|T(\omega)| < C\,\omega^{2-\delta}, \tag{4}$$

если амплитуда $T(\omega)$ для $\omega \to \infty$ не становится чисто вещественной. Неравенство (4) в силу ТФЛ (которая применима, поскольку имеет место ограничение (3)) выполняется во всей верхней полуплоскости, и поэтому

$$t(z) \equiv T(z) - \frac{f^2}{M}\frac{z^2-1}{z^2-\omega_B^2}\frac{1}{1-\omega_B^2}\,T(1) + \frac{2}{\pi}(z^2-1)\int_1^{\infty}\frac{dx\; x\; A(x)}{(x^2-1)(x^2-z^2)}, \tag{5}$$

так как

$$T(z) = T(-z) \tag{6}$$

и

$$T(z) = T^*(z^*). \tag{7}$$

Ниже будем считать, что

$$\lim_{\omega\to\infty} 1/t(\omega + io) = 0. \tag{8}$$

Является очевидным, что $t(1) = T(1) > t(0)$ и на отрезке $(0,1)$ $t'(x) > 0$, а на мнимой оси $t'_y(iy) < 0$ для $y > 0$.

Значения $t(1)$ и $t(0)$ могут быть расположены следующим образом:

а) $t(1) > 0$, $t(0) > 0$;

б) $t(1) > 0$, $t(0) \leq 0$;

в) $t(1) = 0$, $t(0) < 0$;

г) $t(1) < 0$, $t(0) < 0$.

Добавляя к функции $t(z)$ соответствующую константу $a > 0$, случаи в) и г) всегда сможем свести к а) и б), которые в свою очередь, с нашей точки зрения, окажутся равносильными. Поэтому будем рассматривать только случай а).

Пользуясь ТФЛ, легко доказать теперь, что, благодаря условиям (2) и (8), $t(z)$ имеет два нуля на мнимой оси в точках $\pm ia$, так как $t'_y(iy) < 0$ для $y > 0$.

Поэтому функция

$$\left[\frac{t(z)}{z^2 + a^2} - \frac{t(0)}{a^2}\right]\sqrt{z^2} \equiv \psi(z)$$

обладает всеми основными свойствами функции $T(z)$, т.е. имеет место перекрестная симметрия (6), условие вещественности (7), аналитичность во всей комплексной плоскости за исключением двух разрезов, положительность мнимой части в физической области энергии etc., причем

$$\lim_{\omega\to\infty} \psi(\omega + io) = 0 \tag{9}$$

с соответствующей скоростью.

Дальше нам будет более удобно работать в переменной $u \equiv z^2$ (не меняя названия функций).

Сразу видно, что функция

$$\phi(u) \equiv \int_1^u \frac{du'}{\sqrt{u'-1}}\,\psi(u')$$

является аналитичной во всей u-плоскости, за исключением разреза $u \in (1, \infty)$.

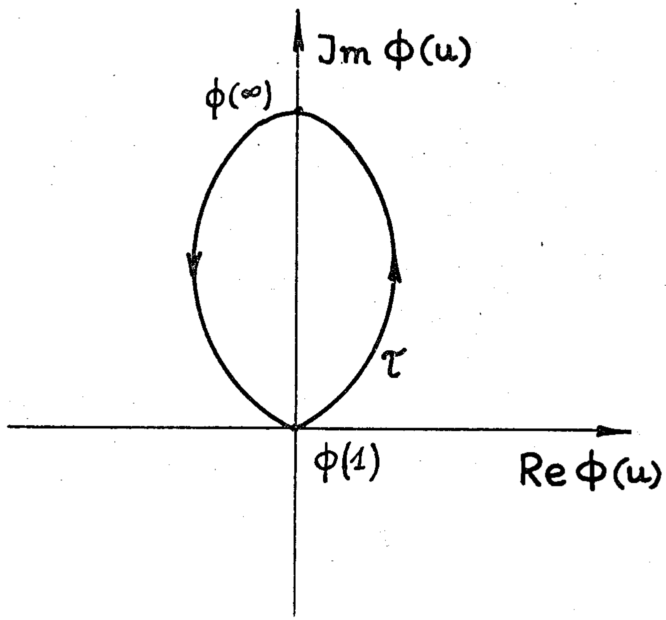
Кроме этого,

1. $\phi(1) = 0$;
2. $\operatorname{Im}\phi(u+io) > 0$ для $u \in (1, \infty)$;[x]
3. $\operatorname{Im}\phi'(u+i0) > 0$ для $u > 1$;[x]

---

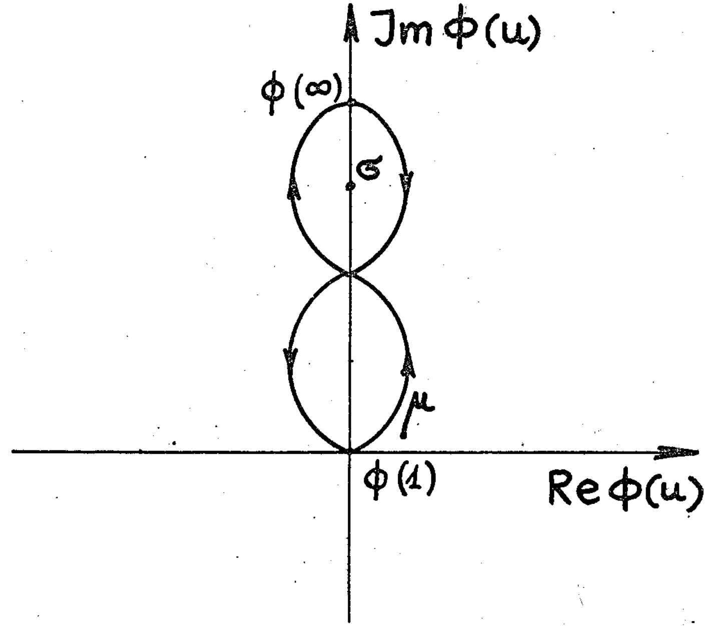
x) Следствия оптической теоремы (2).

4. $\phi(u) = -\phi^*(u^*)$ (функция $(u-1)^{1/2}$ определена так, что она имеет разрез от 1 до ∞ и на верхней части разреза $(u-1)^{1/2}$ вещественна и положительна). При $u = u^*$ и $u \to \infty, \phi(u)$ ограничена. Это свойство $\phi(u)$ переносится и на остальные значения u (ТФЛ). Значения $\mathrm{Im}\,\phi(u \pm io)$ при $u \to \infty$ существуют, являются положительными в силу свойств 2) и 3) и одинаковы. Поэтому отображения $\phi(u)$ на верхней и нижней частях разреза $u \in (1, \infty)$ могут вести себя только так, как это представлено на рис. 1.



Р и с. 1

Действительно, пусть вместо кривой τ кривая μ (рис. 2) представляет поведение $\phi(u)$ на разрезе.



Р и с. 2

Тогда индекс точки σ относительно кривой μ равняется − 1 и функция $\phi(u) - \sigma$ должна иметь по крайней мере один полюс, что немедленно вытекает из хорошо известного принципа аргумента /17/

$$N - P = \Delta\psi / 2\pi \,. \tag{10}$$

Такое заключение, конечно, противоречит регулярности $\phi(u)$, и поэтому

$$\mathrm{Re}\,\phi(u + io) > 0\,, \quad u > 1\,, \tag{11}$$

т.е.

$$\int_1^{\omega^1} \frac{d\omega'^2\, \mathrm{Re}\, t(\omega'^2)}{\omega'^2(\omega'^2 + a^2)(\omega'^2 - 1)^{1/2}} > 2\,\frac{t(0)}{a^2}\, \mathrm{arctg}\, \sqrt{\omega^2 - 1}$$

при $\omega > 1$.

Неравенство (12) является аналогом правил сумм, полученных Хури и Киношита и Мартэном. В частности, этим последним было доказано, что

$$\int_1^{\omega^2} d\omega'^2 \frac{\operatorname{Re} t(\omega'^2) - t(1)}{(\omega'^2 - 1)^{3/2}} > 0 , \tag{13}$$

откуда после простой замены переменных получаем

$$\int_0^{\infty} \frac{dk}{k^2} \left[\operatorname{Re} t(k^2) - t(0) \right] \geq 0 . \tag{14}$$

В неравенствах, как (12) так и (13), нет интегрирования по нефизической области энергии.

III

Как мы уже указывали, из ТФЛ вытекает $c = -c^* = \frac{i}{4\pi}\sigma(\infty)$, если предположить, что

$$\lim_{\omega \to \infty} T(\omega + io)/\omega = c . \tag{1}$$

Пока никому не удалось строго доказать, что $c \neq 0$. Обычно считается, что экспериментальные данные в области высоких энергий дают хорошее обоснование для такого утверждения.

Ниже мы свяжем значение $\sigma_{tot}(\infty)$ со значением $\sigma_{tot}(1)$ и докажем следующее неравенство:

$$\sigma_{tot}(\infty) \geqslant \sigma_{tot}(1) . \tag{15}$$

В работе Лемана [7] было выведено так называемое обратное правило сумм [x)]

$$8 \int_0^{\infty} \frac{dk}{k^2} \left[\operatorname{Re} t(k^2) - t(0) \right] = \sigma_{tot}(\infty) - \sigma_{tot}(k=0) . \tag{16}$$

Сравнивая формулы (14) и (16) получаем искомое неравенство (15). В работе Гелера и др. [1] принимается $\sigma_{tot}(0) = 3.7$ mb.

Нам хотелось бы обратить внимание еще на один факт. Пусть $T(1) < 0$; тогда функция $t(z)$ вне разрезов не имеет никаких нулей и функция

$$h(z) = -1/t(z)$$

обладает всеми основными свойствами $t(z)$.

x) Наша функция $t(z)$ не имеет полюсного члена.

Обратная дисперсионная формула для $t(z)$ имеет следующий вид [7]:

$$\frac{\operatorname{Im}(k)}{k\,|t(k)|^2} - \frac{1}{4\pi}\frac{\sigma_{tot}(0)}{|t(0)|^2} = -\frac{k^2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{dk'^2 \left[\operatorname{Re} h(k^2) - h(0) \right]}{k'^3 (k'^2 - k^2)} .$$

Совершая предельный переход при $\omega \to \infty$, получаем

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\sigma_{tot}(0)}{|t(0)|^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{dk}{k^2} \left[\operatorname{Re} h(k^2) - h(0) \right] , \tag{17}$$

в противоречии с неравенством (14) для функции $h(k^2)$, если, конечно, $\sigma_{tot}(0) \neq 0$ и предельный переход является законным. Таким образом,

$$T(1) \geq 0 ,$$

т.е. на языке длин рассеяния

$$a_1 + 2a_3 \geq 0 .$$

В заключение автор выражает искреннюю благодарность Я. Квециньскому, И.Т. Тодорову и Б. Средняве за полезную дискуссию и обсуждения полученных результатов.

Литература

1. G.Höhler, E.Ebel and J.Giesecke. Zeitschrift für Physik, 180, 430 (1964).
2. S.J.Lindenbaum. Interactions of Pion and Nucleons above 1 GeV/c. The 1964 International Conference on High Energy Physics, Dubna, E-1802.
3. N.N.Khuri and T.Kinoshita. (To be published in Phys. Rev.).
4. P.Olesen. Physics Letters, 14, 66 (1965).
5. R.Wit. (Submitted to Physics Letters).
6. A.A.Logunov, Nguyen van Hieu, I.T.Todorov. Preprint E-1520, Dubna, 1964. (To be published in Annals of Physics).
7. H.Lehmann. Nucl. Physics, 29, 300 (1962).
8. T.Kinoshita. Restrictions Imposed by Unitarity and Analyticity oh the Behaviour of Scattering Amplitude at High Energy - Cornell University, Ithaca, New York, 1964.
9. Y.S.Jin and A.Martin, Phys. Rev., 135, B1369 (1964).
10. R.Wit. Preprint P-1928, Dubna, 1965.
11. T.C.Titchmarsh. The Theory of Functions (Oxford University Press, 2-nd Edition, 1939).
12. R.Wit. (Submitted to Physics Letters).
13. N.N.Khuri, and T.Kinoshita. New Sum Rules for the Real Part of the Forward Scattering Amplitude, Preprint Rockefeller Institute, 1964.

14. A.Martin. A. Physical Sum Rule on the Real Part of the Forward Scattering Amplitude. Preprint CERN - 10056/TH. 503, 1964.

15. N.N.Meiman. Preprint ITEP, No. 252, Moscow, 1964; JETP, 46, 1502 (1964).

16. O.W.Greenberg and F.E.Low. Phys. Rev., 124, 2047 (1961).

17. N.Meiman, I.Gokhfeld. JETP, 43, 181 (1962).

Рукопись поступила в издательский отдел
24 февраля 1965 г.