

2
M-48

V 7.3

201

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

В. К. Мельников, Ю. С. Саясов

P-201

ТЕОРИЯ ЗАХВАТА ЧАСТИЦ В СИНХРОННЫЙ РЕЖИМ
УСКОРЕНИЯ С УЧЕТОМ НЕКОНСЕРВАТИВНОСТИ
УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Дубна, 1958 г.

В. К. Мельников, Ю. С. Саясов *)

ТЕОРИЯ ЗАХВАТА ЧАСТИЦ В СИНХРОННЫЙ РЕЖИМ
УСКОРЕНИЯ С УЧЕТОМ НЕКОНСЕРВАТИВНОСТИ
УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

*) Институт химической физики АН СССР

Как известно, фазовое движение частиц во всех резонансных ускорителях, основанных на принципе автофазировки, описывается однотипным уравнением, которое в общем случае можно записать в виде ^{x)}:

$$\frac{d}{dt} [m(t) \dot{\psi}] + f(t) u'(\psi) = 0,$$

(I)

где $u'(\psi) = \frac{du}{d\psi} = -\frac{1}{\sin \varphi_s} [\cos(\varphi_s + \psi) - \cos \varphi_s]$, φ_s - синхронная фаза, ψ - разность фаз рассматриваемой частицы и синхронной.

Одной из основных задач теории ускорителей является определение области захвата, т.е. области начальных значений ψ^0 , $\dot{\psi}^0$, из которых при $t = t_0$, выходят решения, колеблющиеся относительно положения устойчивого равновесия $\psi = 0$.

Знание области захвата позволяет вычислить долю инжектируемых частиц, попадающих в синхронный режим ускорения и, следовательно, выходящих из ускорителя с энергией, близкой к расчётной. Поскольку в уравнении (I) функции $m(t)$ и $f(t)$ меняются в конкретных случаях весьма медленно, то в некотором приближении их можно считать постоянными, что позволяет легко проинтегрировать уравнение (I) (консервативное приближение). Граница области захвата определяется тогда формулой:

^{x)} Отметим, что мы пренебрегаем в уравнении (I) членами типа внешней силы $F(t)$, а также не учитываем действия объёмного заряда.

$$\dot{\psi}^0 = \pm \sqrt{2U_m - 2U(\psi^0)}, \quad u(\psi^0) = \int u'(\xi) d\xi, \quad (2)$$

где $U_m = U(-2\varphi_s)$ - максимум $U(\psi)$ (принято $m(t_0) = f(t_0) = I$, что не нарушает общности). При $\dot{\psi}^0 = 0$ ширина области захвата равна, очевидно $\Delta\psi_c = 2\varphi_s + \psi_m^0$, где ψ_m^0 и $-2\varphi_s$ - корни уравнения $U(\psi) = U_m$ (корень $-2\varphi_s$ - двукратен). В частности, если $\varphi_s \ll I$ (фактически достаточно предположить, что $\varphi_s < 30^\circ$), то $\psi_m^0 \approx \varphi_s$ и $\Delta\psi_c \approx 3\varphi_s$. Движение частиц, для которых начальные значения ψ^0 , $\dot{\psi}^0$ лежат внутри яйцеобразной области, ограниченной кривыми (2), будет устойчивым.

Отметим, что уравнению (I) соответствует простая механическая модель частицы, двигающейся в потенциальной яме, ограниченной слева горбом U_m (рис. 1). С этой точки зрения устойчивым является движение частиц, энергия которых $\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\dot{\psi}^0)^2 + U(\psi^0)$ не превышает U_m , а $-2\varphi_s < \psi^0 < \psi_m^0$. На фазовой плоскости траектории таких частиц являются замкнутыми. Траектории, начальные значения для которых лежат вне области определяемой (2), неустойчивы и уходят на бесконечность (рис. 2), за исключением траекторий, которые соответствуют начальным значениям ψ^0 , $\dot{\psi}^0 = +\sqrt{2U_m - 2U(\psi^0)}$, лежащим слева от горба потенциальной ямы. Действительно, частицы, начальные координаты которых лежат слева от горба U_m , а начальная скорость удовлетворяет соотношению $\dot{\psi}^0 = +\sqrt{2U_m - 2U(\psi^0)}$,

двигутся по траекториям, асимптотически стремящимся к точке неустойчивого равновесия $-\psi_s$.

В работах, посвященных теории различных резонансных ускорителей, до сих пор ограничивались определением области захвата в консервативном приближении согласно (2) (см., например, (I)).

Качественно понять, к чему приводит возрастание $m(t)$ и $f(t)$ (это обычно имеет место) можно с помощью уже использованной модели частицы в потенциальной яме. Что касается частиц, двигающихся в консервативном приближении (на плоскости $\psi, \dot{\psi}$) по замкнутым кривым, внутри яйцеобразной области, определенной (2), то, очевидно, что они превращаются в спирали, для которых при $t \rightarrow \infty$, ψ и $\dot{\psi} \rightarrow 0$, причём закон изменения амплитуды этих колебаний со временем можно найти с помощью метода адиабатического инварианта (см. (I)). Граница области начальных значений $\psi^0, \dot{\psi}^0$, которым соответствуют такие устойчивые траектории в результате возрастания $m(t)$ и $f(t)$, также должна существенно изменяться. Действительно, рассмотрим частицу, находящуюся в начальный момент в точке ψ^0 , расположенной несколько правее ψ_m^0 (см. рис. I) ($\dot{\psi}^0 < 0$). Очевидно, что она будет двигаться к горбу U_m , который за время её приближения несколько поднимается, и поэтому частица может оказаться захваченной в потенциальной яме, если её энергия $E = \frac{1}{2}(\dot{\psi}^0)^2 + U(\psi^0)$ достаточно близка к U_m . Эти качественные соображения подтверждаются результатами численных расчетов^{12/}, из которых следует, что

при возрастании $m(t)$ и $f(t)$ область захвата несколько расширяется.

В настоящей работе излагается последовательный расчёт области захвата с учётом неконсервативности уравнения (I), основанный на предположении о медлительности изменения $m(t)$ и $f(t)$, понимаемой в том смысле, что время τ существенного изменения $m(t)$ и $f(t)$ велико по сравнению с периодом $2\pi/\Omega$ линейных фазовых колебаний. Это означает, что уравнение (I) можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt} [m(\varepsilon t) \dot{\psi}] + f(\varepsilon t) u'(\tilde{\psi}) = 0, \quad (Ia)$$

где

$$\varepsilon = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

Уравнение (Ia) принадлежит к числу уравнений с "медленным временем", которым посвящено большое число работ Н.Н. Боголюбова и Ю.А. Митропольского /6/ и В.М. Волосова /7/. Однако, развитие в /6,7/ методы исследования этих уравнений основаны на предположении, что их решения являются колебательными и вопрос о границе области начальных значений, которым отвечают такие устойчивые решения, указанными авторами вообще не ставился.

Для уравнений рассматриваемого типа (Ia) с возрастающими $m(\varepsilon t)$

и $f(\varepsilon t)$ границу области захвата можно найти, руководствуясь следующими физическими соображениями. Очевидно, что всякая частица, приходящая справа на вершину горба U_m с отличной от нуля скоростью должна быть неустойчивой (см. рис. I).

С другой стороны, частицы, двигающиеся справа к горбу и недостигающие его, являются устойчивыми. Поэтому сепаратриссу, ограничивающую область устойчивых $\Psi^o, \dot{\Psi}^o$, естественно определить как множество таких $\Psi^o, \dot{\Psi}^o$, что выходящие из них при $t = t_0$ траектории асимптотически приближаются к неустойчивому положению равновесия $-2\psi_s$. Ясно, что существует бесконечное число траекторий (мы будем называть их граничными), которые удовлетворяют условию $\Psi \rightarrow -2\psi_s$, а $\dot{\Psi} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Задача дальнейшего исследования сводится к нахождению функциональной зависимости $\dot{\Psi}^o = \dot{\Psi}^o(\Psi^o)$. Поскольку уравнение (Ia) содержит малый параметр ε , то можно попытаться найти граничные траектории путем формального разложения решений уравнения (Ia) в ряд по степеням ε . Так как рассматриваемая область изменения независимого переменного является бесконечной, то теорема Пуанкаре об аналитичности решений уравнений типа (Ia) по ε , может быть несправедлива (см. (8)).

В.К. Мельниковым было, однако, показано^{19/}, что формальное разложение $\Psi = \Psi_0 + \varepsilon \Psi_1 + \dots$, удовлетворяющее дополнительным условиям $\Psi_0 \rightarrow -2\psi_s, \dot{\Psi}_0 \rightarrow 0, \Psi_i \rightarrow 0, \dot{\Psi}_i \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$

и $\psi_i = 0$ ($i > 0$) при $\psi_0 = \bar{\psi}_0$ ($\bar{\psi}_0$ - произвольная точка, лежащая достаточно близко к $-2\psi_s$ справа от $-2\psi_s$ для траекторий, приближающихся к $-2\psi_s$ справа, и слева для траекторий, приближающихся к $-2\psi_s$ слева) является асимптотическим по ε и действительно определяет сепаратриссу в том смысле, что начальные значения граничных траекторий разбивают плоскость $(\psi^0, \dot{\psi}^0)$ на области, из которых выходят однотипные решения^{х)}. Поведение граничных траекторий, очевидно, существенно различно, в зависимости от знака $\dot{\psi}^0$, так как в случае $\dot{\psi}^0 > 0$ может существовать точка поворота (где $\dot{\psi} = 0$), отсутствующая в случае $\dot{\psi}^0 < 0$.

Исследуем сначала граничные траектории для $\dot{\psi}^0 < 0$. Мы будем считать, что $t_0 = 0$, а $m(0) = f(0) = 1$, чего всегда можно добиться при надлежащем определении t и все расчёты вести, ограничиваясь величинами первого порядка по ε .

Уравнения, которым удовлетворяют функции $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_i, \dots$ формального разложения, имеют вид:

$$\ddot{\psi}_0 + u'(\psi_0) = 0 \quad (3)$$

$$\ddot{\psi}_1 + u''(\psi_0)\psi_1 = -f'(0)t u'(\psi_0) - m'(0) \frac{d}{dt}(\dot{\psi}_0 t) \quad (4)$$

$$\ddot{\psi}_i + u''(\psi_0)\psi_i = F_i(t, \psi_0) \quad (5)$$

х) Отметим, что эта теорема доказана в [9] также для уравнений более общего вида, чем (1а).

Из уравнения (3) следует:

$$\frac{\dot{\psi}_0^2}{2} + u(\psi_0) = C.$$

Используя условия $\psi_0 \rightarrow -2\psi_s$, $\dot{\psi}_0 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, что даёт $C = U_m$, находим:

$$\frac{\dot{\psi}_0^2}{2} = U_m - u(\psi_0), \quad t = \int_{\psi_0}^{\chi} \left(\sqrt{2U_m - 2u(\xi)} \right)^{-1} d\xi \quad (6)$$

(χ - параметр, выделяющий одну из граничных траекторий, ξ - переменная интегрирования).

Уравнения (4) и (5) легко проинтегрировать, если ввести в качестве независимой переменной ψ_0 , связанную с формулой (6). Действительно, как легко показать, $\frac{d}{d\psi_0} \left[2 \frac{d\psi_1}{d\psi_0} (U_m - u(\psi_0)) + u'(\psi_0) \psi_1 \right] = \ddot{\psi}_1 + u''(\psi_0) \psi_1$ и, следовательно, уравнение (4) сводится к уравнению первого порядка:

$$2(U_m - u(\psi_0)) \frac{d\psi_1}{d\psi_0} + u'(\psi_0) \psi_1 = Q(\psi_0),$$

где

$$Q(\psi_0) = -m'(c_0) \int_{-2\psi_s}^{\psi_0} \dot{\psi}_0(\xi) d\xi + (m'(c_0) - f'(c_0)) \int_{-2\psi_s}^{\psi_0} t(\xi) u'(\xi) d\xi. \quad (7)$$

Из (7), используя условие $\psi_1 = 0$ при $\psi_0 = \bar{\psi}_0$, находим:

$$\psi_1(\psi_0) = \sqrt{2U_m - 2u(\psi_0)} \int_{\bar{\psi}_0}^{\psi_0} \frac{Q(\xi) d\xi}{(2U_m - 2u(\xi))^{3/2}}. \quad (8)$$

Аналогичная формула имеет место для ψ_i при $i > 1$. Таким образом, уравнение граничных траекторий при $\dot{\psi}^0 < 0$ определяется с точностью до членов первого порядка по ε формулами:

$$\psi = \psi_0(t, x) + \varepsilon \psi_1(t, x) + \dots$$

$$\dot{\psi} = -\sqrt{2U_m - 2U(\psi_0)} + \varepsilon \left[\frac{Q(\psi_0)}{\sqrt{2U_m - 2U(\psi_0)}} + u'(\psi_0) \int_{\psi_0}^{\psi_0} \frac{Q(\xi) d\xi}{(2U_m - 2U(\xi))^{3/2}} \right] + \dots \quad (9)$$

Связь между начальными значениями этих траекторий, отвечающими $t=0$, получается при $\psi_0 = x$, т.е. определяется параметрической формулой:

$$\psi^0 = x + \varepsilon \psi_1(0, x) + \dots$$

$$\dot{\psi}^0 = -\sqrt{2U_m - 2U(x)} + \varepsilon \left[\frac{Q(x)}{\sqrt{2U_m - 2U(x)}} + u'(x) \int_{\psi_0}^x \frac{Q(\xi) d\xi}{(2U_m - 2U(\xi))^{3/2}} \right] + \dots, \quad (10)$$

где

$$Q(x) = \frac{m'(0) + f'(0)}{2} \int_{-2\psi_2}^x \sqrt{2U_m - 2U(\xi)} d\xi.$$

Возведем $\dot{\psi}^0$, определяемое (10), в квадрат, ограничиваясь членами первого порядка по ε . Это дает:

$$(\dot{\psi}^0)^2 = 2(U_m - U(x)) + 2\varepsilon [Q(x) - u'(x)\psi_1(0, x)] + \dots \quad (11)$$

Перейдем теперь к непосредственной зависимости между $(\dot{\psi}^0)^2$ и ψ^0 с точностью до членов первого порядка по ε . Согласно (10) в этом приближении $x = \psi^0 - \varepsilon \psi_1(0, x)$. Подставляя это выражение в

(II), находим искомую формулу для сепаратриссы при $\dot{\psi}^0 < 0$:

$$(\dot{\psi}^0)^2 = 2(U_m - U(\psi^0)) + \bar{\varepsilon} \int_{-2\varphi_s}^{\psi^0} \sqrt{2U_m - 2U(\xi)} d\xi,$$

где $\bar{\varepsilon} = \varepsilon (m'(0) + f'(0))$. (I2)

В частности, ширина области захвата при $\dot{\psi}^0 = 0$ равна, очевидно, $\Delta\psi = \psi_m^1 + 2\varphi_s$, где ψ_m^1 и $\psi_m^2 - 2\varphi_s$ - корни уравнения

$$2(U_m - U(\psi)) + \bar{\varepsilon} \int_{-2\varphi_s}^{\psi} \sqrt{2U_m - 2U(\xi)} d\xi = 0$$

Легко видеть, что

$$\psi_m^1 = \psi_m^0 + \frac{\bar{\varepsilon}}{2U'(\psi_m^0)} \int_{-2\varphi_s}^{\psi_m^0} \sqrt{2U_m - 2U(\xi)} d\xi = \psi_m^0 + \delta\psi, \quad (I3)$$

где $\delta\psi$ - приращение области захвата за счёт неконсервативности.

При достаточно малых φ_s можно принять, что $U = \frac{\psi^2}{2} + \frac{\psi^3}{6\varphi_s}$. Вводя новые величины $\dot{x}^0 = \frac{\dot{\psi}^0}{\varphi_s}$, $x^0 = \frac{\psi^0}{\varphi_s}$, представим уравнение сепаратриссы (I2) при $\dot{x}^0 < 0$ в виде:

$$(\dot{x}^0)^2 = 2\left(\frac{2}{3} - U(x)\right) + \bar{\varepsilon} \int_{-2}^{x^0} \sqrt{\frac{4}{3} - 2U(x)} dx, \quad (I4)$$

где $U(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$, $2(U_m - U(x)) = \frac{1}{3}(1-x)(2+x)^2$

$$\text{и} \quad \int_{-2}^{x^0} \sqrt{\frac{4}{3} - 2U(x)} dx = \frac{12}{5} - \frac{2}{5\sqrt{3}}(1-x^0)^{3/2}(4+x^0).$$

При $\dot{x}^0 = 0$ ширина области захвата $\Delta x = \frac{\Delta\psi}{\varphi_s} \approx 3 + \delta x$,

где
$$\delta x = \frac{\bar{\varepsilon}}{2u'(1)} \int_{-2}^1 \sqrt{(1-x)(2+x)^2} dx = \frac{4}{5} \bar{\varepsilon}.$$

На рис. 2. изображены графики сепаратриссы при $\bar{\varepsilon} = 0,1$ и $\bar{\varepsilon} = 0,2$ в переменных x^0, \dot{x}^0 , найденные по формуле (14).

Исследуем теперь поведение граничных траекторий при $\dot{\psi}^0 > 0$ (начальная скорость направлена слева направо). В этом случае следует различать две возможности:

1) частицы начинают своё движение слева от горба u_m ($\psi^0 < -2\psi_s$) и приходят на вершину горба с нулевой скоростью. Очевидно, что геометрическое место начальных значений $\psi^0, \dot{\psi}^0$ для таких траекторий получается из кривой $\dot{\psi}^0 = +\sqrt{2u_m - 2u(\psi)}$ некоторым смещением за счёт неконсервативности,

2) частицы начинают свое движение слева от горба и приходят на него с отличной от нуля скоростью $\dot{\psi} > 0$ или начинают своё движение справа от горба u_m с $\dot{\psi}^0 > 0$. В этом случае граничная траектория должна иметь в некоторый момент времени t_1 , при $\psi > 0$ точку поворота, где $\dot{\psi} = 0$, а в дальнейшем движется с $\dot{\psi} < 0$ по траектории, определяемой найденной ранее формулой (12).

Рассмотрим сначала первую из указанных возможностей. Граничная траектория описывается формальным разложением $\psi = \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \dots$, где ψ_i подчиняется тем же дополнительным условиям и находится так же, как в случае $\dot{\psi}^0 < 0$. Отличие состоит только в том,

что здесь следует взять в качестве $\bar{\psi}_0$ точку, лежащую слева от $-2\varphi_s$. Тогда $t = \int_x^{\psi_0} \frac{d\xi}{\sqrt{2u_m - 2u(\xi)}}$, так как при $t > 0$, $\dot{\psi}_0 > 0$ и $\psi_0 > x$. Граничные траектории описываются формулами:

$$\psi = \psi_0(t, x) + \varepsilon \psi_2(t, x) + \dots$$

$$\dot{\psi} = \sqrt{2u_m - 2u(\psi_0)} + \varepsilon \left[\frac{Q(\psi_0)}{\sqrt{2u_m - 2u(\psi_0)}} - u'(\psi_0) \int_{\bar{\psi}_0}^{\psi_0} \frac{Q(\xi) d\xi}{(2u_m - 2u(\xi))^{3/2}} \right] + \dots, \quad (I5)$$

а их начальные значения получаются из (I5)

при $t = 0$, т.е. при $\psi_0 = x$.

Отсюда, рассуждая так же, как и при выводе (I2), получаем:

$$(\dot{\psi}^0)^2 = 2(u_m - u(\psi^0)) + \varepsilon \int_{-2\varphi_s}^{\psi^0} \sqrt{2u_m - 2u(\xi)} d\xi. \quad (I6)$$

В частности, при $\varphi_s \ll 1$, вводя величины $x^0 = \frac{\psi^0}{\varphi_s}$, $\dot{x}^0 = \frac{\dot{\psi}^0}{\varphi_s}$, переписываем (I6) в виде:

$$(\dot{x}^0)^2 = 2\left(\frac{2}{3} - u(x)\right) + \varepsilon \int_{x^0}^{-2} \sqrt{\frac{2}{3} - 2u(x)} dx, \quad (I7)$$

где $u(x)$ и $\int_{x^0}^{-2} \sqrt{\frac{2}{3} - 2u(x)} dx$ определены в (I4).

Исследуем, наконец, последний случай. Движение частицы в интервале (t_1, ∞) , т.е. после точки поворота, мы будем искать также, как в случае $\dot{\psi}^0 < 0$. С помощью полученных ранее разложений (9) мы сможем вычислить $\psi(t_1)$ (т.е. значение ψ в точке

поворота), которое, как легко проверить с точностью до членов первого порядка по ε включительно, определяется (13). После этого на интервале $(0, t_1)$ решение $\psi(t)$ будем искать в виде ряда

$$\psi(t) = \psi_0(t, t_1) + \varepsilon \psi_1(t, t_1) + \dots$$

где функции ψ_0, ψ_1, \dots , удовлетворяют уравнениям (3), (4) и (5) с начальными условиями $\psi_0(t_1, t_1) = \psi(t_1), \dot{\psi}_0(t_1, t_1) = 0$ и $\psi_i(t_1, t_1) = \dot{\psi}_i(t_1, t_1) = 0$ при $i > 0$. (Для этого разложения справедлива теорема Пуанкаре об аналитической зависимости от параметра ε (см. [8]). Как нетрудно проверить до точки поворота решение с точностью до членов первого порядка по ε имеет вид:

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon \sqrt{2\varepsilon_m - 2U(\psi_0)} \int_{\psi_m^1}^{\psi_0} \frac{Q(\xi) d\xi}{(2\varepsilon_m - 2U(\xi))^{3/2}} + \dots$$

$$\dot{\psi} = \sqrt{2\varepsilon_m - 2U(\psi_0)} + \varepsilon \left[\frac{Q(\psi_0)}{\sqrt{2\varepsilon_m - 2U(\psi_0)}} - U'(\psi_0) \int_{\psi_m^1}^{\psi_0} \frac{Q(\xi) d\xi}{(2\varepsilon_m - 2U(\xi))^{3/2}} \right] + \dots \quad (18)$$

где $\varepsilon_m = U(\psi_m^1)$. Из (18), рассуждая также, как и при выводе (12), получаем:

$$(\dot{\psi}^0)^2 = 2(\varepsilon_m - U(\psi^0)) + \varepsilon \int_{\psi^0}^{\psi_m^1} \sqrt{2\varepsilon_m - 2U(\xi)} d\xi. \quad (19)$$

Напомним, что $\varepsilon_m = U(\psi_m^1)$ зависит от ε , т.е. в (19)

косвенным образом учитываются члены высших порядков по ε . Однако, как следует из вывода этой формулы, даваемая ею ошибка имеет по ε порядок не ниже второго. Для малых φ_s , ограничиваясь в разложении $u'(\varphi)$ членами не выше второго порядка и делая замену $x^0 = \frac{\varphi^0}{\varphi_s}$, $\dot{x}^0 = \frac{\dot{\varphi}^0}{\varphi_s}$, мы можем привести выражение (19) к виду:

$$(\dot{x}^0)^2 = \frac{\gamma}{3} + \frac{12}{5} \bar{\varepsilon} - 2u(x^0) + \bar{\varepsilon} \int_{x^0}^{1 + \frac{\gamma}{5} \bar{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\gamma}{3} + \frac{12}{5} \bar{\varepsilon} - 2u(x)} dx. \quad (20)$$

Совокупность формул (12), (16) и (19) позволяет построить на плоскости $(\varphi^0, \dot{\varphi}^0)$ кривую, которая и даёт границу области захвата. Эта кривая в переменных x^0, \dot{x}^0 с помощью формул (14), (17) и (20) изображена на рис. 2 для $\bar{\varepsilon} = \varepsilon(m'(c_0) + f'(c_0)) = 0,1$ и для $\bar{\varepsilon} = \varepsilon(m'(c_0) + f'(c_0)) = 0,2$.

Может возникнуть вопрос, почему в этом последнем случае нам пришлось дополнительно вводить новое разложение (18), почему при $\dot{\varphi}^0 > 0$ нельзя было воспользоваться на всем промежутке $[0, \infty)$ разложением типа (9). Все это становится ясным, если мы обратимся к решению уравнения (4), которое даётся формулой (8). В точке поворота знаменатель подинтегрального выражения имеет нуль порядка не ниже $3/2$, благодаря чему интеграл имеет в точке поворота особенность, которая и не позволяет воспользоваться на интервале $(0, t_1)$ разложением (9).

Полученные результаты позволяют сделать ряд интересных выводов, которые, по нашему мнению, могут представлять технический интерес:

I. Как видно из рис. 2 при $\varepsilon > 0$ область захвата теряет свой симметричный относительно прямой $\psi^0 = 0$ вид. Теперь наибольшая ширина захвата получается (при достаточно малых $\varepsilon > 0$) не при $\psi^0 = 0$, а согласно формуле (I9) при

$$\dot{\psi}_{min} = \dot{\psi}^0(-2\varphi_s) = \sqrt{2(\varepsilon_m - U_m) + \bar{\varepsilon} \int \sqrt{2\varepsilon_m - 2U(\xi)} d\xi}$$

Она определяется ближайшим к ψ_m^1 корнем уравнения

$$(\dot{\psi}_{min})^2 = 2(\varepsilon_m - U(\psi)) + \bar{\varepsilon} \int_{\psi}^{\psi_m^1} \sqrt{2\varepsilon_m - 2U(\xi)} d\xi$$

и ближайшим к $-2\varphi_s$ корнем уравнения

$$(\dot{\psi}_{min})^2 = 2(U_m - U(\psi)) + \bar{\varepsilon} \int_{\psi}^{-2\varphi_s} \sqrt{2U_m - 2U(\xi)} d\xi.$$

Корень первого уравнения мы будем искать в виде $\psi = \psi_m^1 + \delta_1 \psi$, корень второго - в виде $\psi = -2\varphi_s + \delta_2 \psi$. Подставляя полученные выражения в наши уравнения легко находим, что в младшем члене разложения по ε

$$\delta_1 \psi = - \frac{\bar{\varepsilon}}{u'(\psi_m^1)} \int_{-2\psi_s}^{\psi_m^1} \sqrt{2\varepsilon_m - 2U(\xi)} d\xi, \quad a$$

$$\delta_2 \psi = - \sqrt{- \frac{2\bar{\varepsilon}}{u''(-2\psi_s)} \int_{-2\psi_s}^{\psi_m^1} \sqrt{2\varepsilon_m - 2U(\xi)} d\xi}$$

Нетрудно видеть, что с точностью до членов первого порядка по ε
 $\delta_1 \psi = -2 \delta \psi$, где $\delta \psi$ определяется по формуле (13).

Таким образом, при $\varepsilon > 0$ ширина захвата увеличивается в младшем члене разложения по ε на $- \delta_2 \psi$.

В переменных x° , \dot{x}° , т.е. при малых синхронных фазах в единицах ψ_s приращение области захвата равно $\delta_2 x = - \frac{\delta_2 \psi}{\psi_s} = \sqrt{\frac{2\psi}{5}} \bar{\varepsilon}$.
 При $\bar{\varepsilon} = 0,2$ $\delta_2 x = 1,0$, т.е. ширина захвата возрастает по сравнению с её величиной при $\dot{x}^\circ = 0$ в консервативном случае на 30%.

2. Если сдвиг начальной скорости части превышает (в единицах $\dot{\psi}$) $\dot{\psi}_{min}$ (см. выше), то частицы, захватываемые в синхронный режим ускорения, группируются в двух сгустках (участки (x_1, x_2) и (x_3, x_4)), отвечающие $\bar{\varepsilon} = 0,1$ на рис. 2), которые длительное время могут существовать раздельно, так как частицы с участка (x_1, x_2) , которые вынуждены проходить через положение неустойчивого равновесия $-2\psi_s$, имея там небольшую скорость, передвигаются на фазовой плоскости значительно медленнее, чем частицы с участка (x_3, x_4) . Возможно, что это обстоятельство окажется существенным в теории, учитывающей действие объемного заряда.

Эти выводы, могут представить наибольший интерес в применении к протонному линейному ускорителю с трубками дрейфа. Уравнение фазовых колебаний в этом случае можно записать в виде (см., например (II)):

$$\frac{d}{dt} (\nu_s^2 \psi) = \frac{e \mathcal{E} \omega \nu_s}{m} [\cos(\varphi_s + \psi) - \cos \varphi_s], \quad (21)$$

где $\psi = \frac{\omega}{\nu_s} q$, q - среднее расстояние между рассматриваемой и синхронной частицами на данном этапе, $\mathcal{E} = \frac{1}{L} \int \mathcal{E}_z \cos \frac{2\pi}{L} z dz$ (\mathcal{E}_z - напряженность ускоряющего поля на оси ускоряющего промежутка с длиной L , вдоль которой производится интегрирование), $\omega = \frac{2\pi}{T}$, T - период высокочастотных колебаний, e , m - заряд и масса частицы, ν_s - скорость синхронной частицы, t - время в сек. Отметим, что приращение её скорости на одном ускоряющем промежутке определяется формулой $\Delta \nu_s = \frac{e}{m} \mathcal{E} T \cos \varphi_s$. Мы примем для простоты, что эта величина постоянная, т.е. $\nu_s = \nu_{s0} + \frac{\Delta \nu_s}{T} t = \nu_{s0} (1 + \frac{t}{\tau})$, ν_{s0} - начальная скорость синхронной частицы, $\tau = \frac{\nu_{s0}}{\Delta \nu_s} T$. Введем безразмерную переменную $t' = \Omega t$, $\Omega^2 = \frac{e \omega \sin \varphi_s \mathcal{E}}{m \nu_{s0}}$ (очевидно, что Ω совпадает с частотой линейных фазовых колебаний при $\nu_s = \nu_{s0}$). Тогда уравнение (21) с точностью до величин первого порядка по ε можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt'} \left[(1 + 2\varepsilon t') \frac{d\psi}{dt'} \right] + (1 + \varepsilon t') u'(\psi) = 0, \quad (22)$$

где $u'(\psi) = -\frac{1}{\sin \varphi_s} [\cos(\varphi_s + \psi) - \cos \varphi_s]$, $\varepsilon = \frac{1}{\Omega \tau} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \tau \varphi_s} \sqrt{\frac{\Delta \nu_s}{\nu_{s0}}}$.

Принимая $\xi_0 = \frac{m \nu_{s0}^2}{2} = 4 \text{ мэВ}$, $\varphi_s = 20$, $\frac{\Delta \nu_s}{\nu_{s0}} = 0,04$ х)

х) Эти данные относятся к ускорителю Альвареца /II/

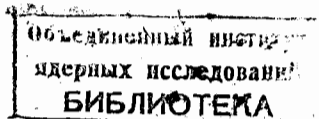
находим, что $\bar{\varepsilon} = 0,4$. Согласно (14) приращение ширины захвата при $\psi^0 = 0$ составляет (в единицах φ_s) для рассматриваемого случая $\delta x = \frac{\gamma}{5} \bar{\varepsilon} = 0,3$, т.е. 10%.

Если начальная энергия частиц превышает расчётную энергию ε_0 на величину, отвечающую $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{min} = \frac{1}{Q} \dot{\psi}_{min}$, т.е. на величину $\delta \varepsilon = \varepsilon_0 \varphi_s \sqrt{\frac{t_0 \varphi_s}{2\pi} \frac{\Delta v_s}{v_{s0}}} \left(\frac{dx}{dt}\right)_{min}$ (при малых синхронных фазах), то приращение ширины захвата составляет $\sqrt{\frac{2\gamma}{5} \bar{\varepsilon}}$. Иначе говоря, в рассматриваемом примере повышение энергии интегрируемых частиц с $\varepsilon_0 = 4 \text{ мэВ}$ на 160 кэВ должно привести к увеличению захвата примерно на 1,4, т.е. почти на 50% по сравнению с консервативным приближением, отвечающим $\psi^0 = 0$.

Интересно отметить, что в работе^{/12/}, посвященной описанию линейного ускорителя, предназначенного для инжектирования в берклиевский бэватрон, указывается, что наибольший захват получается, если начальная энергия протонов равна не расчётной (450 кв), а превышает её на 10 кв X/. Возможно, что это явление объясняется вышеизложенным образом, т.е. повышением захвата при увеличении начальной энергии по сравнению с расчётной за счёт неконсервативности фазового движения.

В заключение мы хотим подчеркнуть, что вышеизложенные техниче-

х) Согласно нашим формулам, максимальная ширина захвата, применительно к данным этого ускорителя, получается при энергии инъекции, превышающей расчётную на 30 кэВ.



кие соображения имеют место не только для линейных ускорителей, но и для циклических ускорителей типа фазотрона и синхрофазотрона. В частности, можно утверждать, что возрастание со временем амплитуды напряжения в ускоряющихся промежутках синхрофазотрона и некоторое повышение начальной энергии протонов, инжектируемых в него по сравнению с расчётной, могут привести к существенному увеличению числа частиц, захваченных в режим синхронного ускорителя.

Выражаем благодарность Л.А. Чудову, А.С. Шварцу и профессору А.С. Компанейцу за обсуждение результатов этой работы.

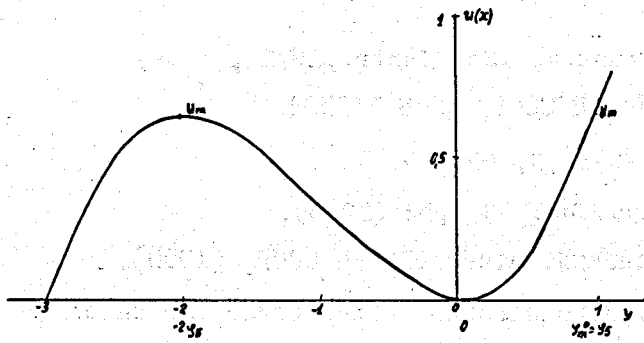


Рис 1

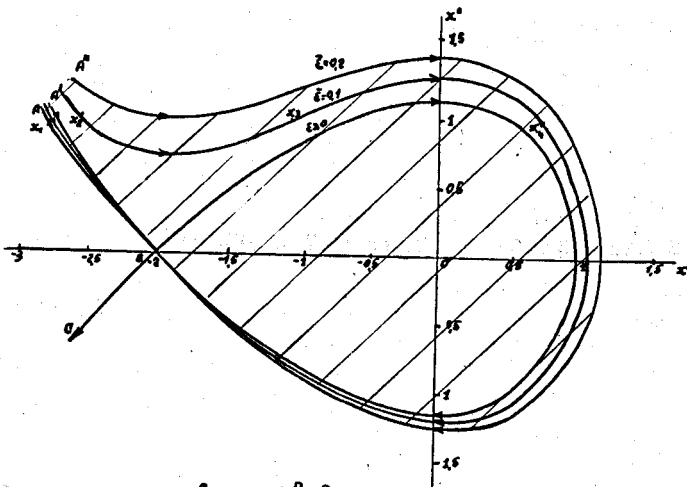


Рис 2

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. R.Q.Twiss and N.H.Frank, Rev.Sci.Instr., 20, I, (1949).
2. Ю.С.Саясов, отчет ИХФ АН СССР, 0248 (1950).
3. W.Dällenbach, Ann.d.Phys., 3, 89, (1947).
4. T.R.Kaiser, Proc.Phys.Soc., 63 A, 52 (1950).
5. А.И.Ахиезер, Г.И.Любарский, отчет ФТИ АН СССР, (1950).
6. Н.Н.Боголюбов и Ю.А.Митропольский "Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний", ГТТИ, 1955 г.
7. В.М.Волосов, Мат. сборник 3 (1955).
8. В.В.Голубев. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, ГТТИ, 1950 г., стр.153.
9. В.К.Мельников, Мат. сборник (в печати) (см. также препринт ОИЯИ)
10. В.И. Смирнов, Курс высшей математики, ч. III, ч. II, ГТТИ, 1949 г.
11. L.Smith, R.L.Glucustern, Rev.Sci.Instr., 26, 220, (1955)
12. В.Cork, Rev.Sci.Instr., 26, 210, (1955)

Работа поступила в издательский отдел 9/VI-1958г.