ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 2 - 2928

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

И.Т. Тодоров

# ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕКОМПАКТНЫХ ГРУПП И СИСТЕМАТИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

(Доклад на Международном конгрессе математиков,
Москва, 1966)

1966

Р - 2 - 2928



И.Т. Тодоров

# ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕКОМПАКТНЫХ ГРУПП И СИСТЕМАТИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

(Доклад на Международном конгрессе математиков, Москва, 1966)

1. Группы и алгебры Ли играют двоякую роль в квантовой теории. Во-первых, они могут задавать симметрию физической системы. В этом случае все операторы алгебры коммутируют с гамильтонианом, а собственные функции гамильтониана ,соответствующие одному и тому же значению энергии, преобразуются по неприводимому унитарному представлению группы. Во-вторых, неприводимые представления алгебры могут служить для классификации собственных векторов гамильтониана. При этом нет необходимости, чтобы алгебра определяла симметрию: достаточно, чтобы инвариантные операторы (т.н. операторы Казимира) обертывающей алгебры коммутировали с гамильтонианом. Крайним случаем второго типа является алгебра, в пространство одного неприводимого представления которой входят все собственные векторы гамильтониана (другими словами - все физические состояния системы). В таком случае говорят, что дана алгебра, порождающая спектр (а.п.с.)[/1/]. Поскольку реальные физические системы имеют бесконечное число возможных состояний, то а.п.с., как правило, должна быть алгеброй Ли некоторой некомпактной группы.

Классическим примером а.п.с. является алгебра Ли группы де Ситтера $SO(4,1)$ для нерелятивистского водородного атома[x/]. В[/4/] было предложено классифицировать адроны (т.е. сильновзаимодействующие элементарные частицы и резонансы) с заданным барионным числом по так называемым лестничным представлениям группы $U(6,6)$. В связи с этим в последнее время возрос интерес к вырожденным дискретным сериям унитарных представлений группы $U(p,q)$.

2. Недавно Гельфанд и Граев[/5/] предложили метод описания дискретной серии эрмитовых представлений алгебры Ли $\underline{U}(p,q)$ группы $U(p,q)$. Метод основан на обобщении схем Гельфанда и Цетлина[/6/], задающих базис конечномерных представлений компактной группы $U(N)$.

Неприводимые представления $\underline{U}(p,q)$ $(p \geq q)$, рассматриваемые в[/5/], характери-

[x/] См., например,[/2,3/], где имеются ссылки на классические работы Паули, Фока и Баргмана.

зуются системой $N = p+q$ целых чисел

$$m_{1N} \geq m_{2N} \geq \dots \geq m_{NN} \quad , \tag{1}$$

задающих номер представления, и разбиением числа $p$ на два неотрицательных целочисленных слагаемых

$$p = a^{+} + a^{-} \quad , \tag{2}$$

задающих тип представления. Базисные векторы такого неприводимого представления могут быть занумерованы системой $\frac{1}{2}N(N+1)$ целых чисел $m_{ik}$, $1 \leq i \leq k \leq N$ (включая номер представления (1)), подчиненных неравенствам

$$m_{1k} \geq m_{1\ k+1} + 1 \geq m_{2k} \geq m_{2\ k+1} + 1 \geq \dots \geq m_{a^+ k} \geq m_{a^+\ k+1} + 1 , \tag{3}$$

$$m_{k-a^-+2\ k+1} \geq m_{k-a^-+1\ k} + 1 \geq \dots \geq m_{k+1\ k+1} \geq m_{kk} + 1 ,$$

при $k = p, \dots, N-1$, и

$$m_{i\ k+1} \geq m_{ik} \geq m_{i+1\ k+1} \tag{4}$$

для остальных пар $i,k$ $(1 \leq i \leq k)$. Аналитическое выражение генераторов Вейля $A_j^i$ в терминах схем ( $m_{ik}$ ) тождественно с выражением этих генераторов в случае компактной группы $U(N)$ (см. [6,5]).

3. В случае вырождения, когда $r > q$ соседних чисел в номере (1) представления $U(p,q)$ равны между собой, существуют еще дополнительные, вырожденные представления с тем же номером и с типом ( $a^+, a^-$ ), где

$$N - r \leq a^{+} + a^{-} < p. \tag{5}$$

Более того, неравенства $m_{a^+ N} \geq m_{a^+ + 1\ N}$ и $m_{N-a^- N} \leq m_{N-a^- + 1N}$ могут нарушаться, если числа $m_{kN}$ при $a^+ + 1 < k \leq N - a^-$ равны между собой[x]. Оказывается, что именно среди этих вырожденных дискретных представлений $\underline{U}(p,q)$ находятся важные для физических приложений лестничные представления и представления, сопряженные к ним, а также и простейшие самосопряженные представления (более подробное изложение этих результатов дано в [7]).

В частности, для лестничной серии $m_{2N} = \dots = m_{NN} = 0$, $a^{+} = 1$, $a^{-} = 0$, так что числа $m_{1k}$, удовлетворяющие неравенствам $m_{1N} + q \leq m_{1\ N-1} + q - 1 \leq \dots \leq m_{1p} \geq m_{1p-1} \geq \dots \geq m_{11}$, — единственные отличные от нуля числа в обобщенной схеме Гельфанда-Граева. Максимально вырожденная серия самосопряженных представлений определяется как совокупность представлений с номером $m_{1N} = -m_{NN} = m$, $m_{2N} = \dots = m_{N-1\ N} = 0$ и типом $a_+ = a_- = 1$. Эта серия, которая в случае $p=q=6$ может быть использована для классификации мезонов, впервые описана в [7].

---

[x] Возможно, что представления, соответствующие такому аномальному номеру, на самом деле могут рассматриваться как "особые точки" в полунепрерывных сериях представлений $U(p,q)$; это во всяком случае справедливо для $U(1,1)$. Полная классификация дискретных представлений с аномальным номером еще не получена.

4. Хотя схемы Гельфанда-Граева непосредственно приспособлены для описания редукции неприводимого представления алгебры $\underline{U}(p,q)$ по неприводимым представлениям цепочки вложенных подалгебр $\underline{U}(p,q) \supset \underline{U}(p,q-1) \supset \ldots \supset \underline{U}(p) \supset \underline{U}(p-1) \supset \ldots \supset \underline{U}(1)$, в их терминах нетрудно описать также редукцию по представлениям максимальной компактной подгруппы $U(p) \times U(q)$ . Для этой цели удобно работать со старшими векторами неприводимых представлений этой подгруппы. Неприводимые представления $\underline{U}(p) \times \underline{U}(q)$, которые содержатся в данном неприводимом представлении $\underline{U}(p,q)$ дискретной серии, задаются числами $p$ – ой строки $m_{1p}, \ldots m_{pp}$ . Эти числа определяют старший вес представления $\underline{U}(p)$ . Старший вес соответствующего представления подалгебры $\underline{U}(q)$ задается в общем случае набором чисел

$$m_1 = m_{a^+ +1\, N} + \sum_{j=1}^{a^-} (m_{N-a^- +j\, N} - m_{p-a^- +j\, p} - q) + a^- - a^+ ,$$

$$m_k = m_{a^+ +k\, N} + a^- - a^+ , \quad k = 2, \ldots, q-1, \tag{6}$$

$$m_q = \sum_{j=1}^{a^+} (m_{jN} - m_{jp} + q) + m_{N-a^-\, N} + a^- - a^+ .$$

5. В [8], где воспринята классификация адронов по лестничным представлениям $\underline{U}(6,6)$, выводится формула для оператора квадрата массы в функции от генераторов лестничных представлений. При этом используется то обстоятельство, что в алгебре $\underline{U}(6,6)$ содержится семейство подалгебр, изоморфных алгебре Ли группы Пуанкаре. В частности, имеется семейство генераторов, которые могут быть поставлены в соответствие с 4-мерным импульсом. В 12-рядном представлении $\underline{U}(6,6)$ – это операторы

$$T^{\mu}_{\pm}(\lambda) = (1 \pm i\gamma^5)\gamma^{\mu} \times \lambda , \tag{7}$$

где $\lambda$ – произвольная диагональная трехрядная матрица. Существенно, что матрицы (7) коммутируют с матрицами, соответствующими наблюдаемым характеристикам частиц: заряду и гиперзаряду.

Наряду с выводом массовых формул для известных адронов в [8] содержится предсказание о существовании скалярного нейтрального мезона S с массой 1000 Мэв. Недавно (после выхода в свет работы [8]) мезон с такими свойствами действительно был обнаружен на опыте [9], причем его экспериментальная масса равна $(1068 \pm 10)$ Мэв, что замечательно согласуется с предсказанием, если учесть сделанные в [8] приближения.

Автор выражает благодарность профессорам И.М. Гельфанду и М.И. Граеву за ознакомление с результатами их работы, а также А.В.Николову и К.Ремиху за полезное обсуждение вопросов, затронутых в п. 3 и 4.

## Литература


1. Y. Ne'eman. Algebraic Methods and their Observational Implications. Lectures Given at the Pacific Summer School in Physics, Honolulu, 1965, Tel-Aviv University preprint TAUP–2–65.
2. H. Bacry. Nuovo Cimento, 41A, 222 (1966).
3. M. Bander and C. Itzykson. Rev. Mod. Phys., 38, 330 and 346 (1966).
4. Y. Dothan, M. Gell-Mann and Y. Ne'eman. Phys. Letters, 17, 148 (1965).
5. И.М. Гельфанд и М.И. Граев. Изв. АН СССР, сер. мат., 29, 1329 (1965).
6. И.М. Гельфанд и М.Л. Цетлин. ДАН СССР, 71, 825 (1950).
7. I.T. Todorov. Discrete Series of Hermitian Representations of the Lie Algebra of U(p,q) (Lecture Notes). Preprint IC (66) 71, Trieste, 1966.
8. Д.Ц. Стоянов и И.Т. Тодоров. Динамическая симметрия и спектр масс адронов. Препринт ОИЯИ, Р - 2621, Дубна, 1966 (см. также Preprint IC/66/53, Trieste, 1966).
9. D.J. Crennell et al. Phys. Rev. Letters, 16, 1026 (1966).



Рукопись поступила в издательский отдел
13 сентября 1966 г.