ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-1996

ЛАБОРАТОРИЯ НЕЙТРОННОЙ ФИЗИКИ

Б. Козик

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАЗМНОЖЕНИЯ НЕЙТРОНОВ И ШУМЫ В СТАЦИОНАРНЫХ ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРАХ

1965

Р-1996

Б. Козик[x)]

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАЗМНОЖЕНИЯ НЕЙТРОНОВ И ШУМЫ В СТАЦИОНАРНЫХ ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРАХ

x) Центральный институт ядерных исследований Дрезден-Россендорф, ГДР.

Производящая функция

Пусть $P(n_0, n_1, \dots n_\ell)$ – вероятность того, что случайные величины A_0, $A_1, \dots A_\ell$ принимают целочисленные положительные значения n_0, $n_1, \dots n_\ell$. При изучении случайных процессов обычно проще рассматривать некоторое преобразование вероятности $P(n_0, \dots n_\ell)$, например, ее производящую функцию, которая определяется соотношением

$$H(x_0, x_1, \dots x_\ell) = \sum_{n_0 \dots n_\ell} P(n_0, \dots n_\ell)\, x_0^{n_0} x_1^{n_1} \dots x_\ell^{n_\ell} . \tag{1}$$

Обратное преобразование имеет вид

$$P(n_0, \dots n_\ell) = \frac{1}{n_0! \dots n_\ell!} \frac{\partial^{(n_0 + \dots + n_\ell)}}{\partial x_0^{n_0} \dots \partial x_\ell^{n_\ell}} H \Big|_{x_0 = \dots = x_\ell = 0} . \tag{2}$$

Моменты случайных величин $n_0, n_1, \dots n_\ell$ получаются из соотношения

$$\langle n_0^{r_0} n_1^{r_1} \dots n_\ell^{r_\ell} \rangle = \frac{\partial}{\partial \ell n^{r_0} x_0 \dots \partial \ell n^{r_\ell} x_\ell} H \Big|_{x_0 = \dots x_\ell = 1} . \tag{3}$$

Если в уравнении (1) положить $x_0 = x_1 = \dots = x_\ell = x$, то получается производящая функция $H_N(x)$ распределения P_N суммы $N = n_0 + n_1 + \dots + n_\ell$:

$$H(x, \dots x) = \sum_{n_0 \dots n_\ell} P(n_0, \dots n_\ell)\, x^{n_0 + \dots + n_\ell} \tag{4}$$

$$= \sum_N x^N \sum_{n_0 + n_1 + \dots + n_\ell = N} P(n_0, \dots n_\ell) \equiv \sum_N P_N x^N = H_N(x) .$$

Когда случайные величины $n_0, \dots n_\ell$ между собой независимы, вероятность $P(n_0, \dots n_\ell)$ имеет вид

$$P(n_0, \dots n_\ell) = P_0(n_0)\, P_1(n_1) \dots P_\ell(n_\ell)$$

и тогда $H_N(x)$ будет просто произведением

$$H_N(x) = \prod_{i=0}^{\ell} H_i(x) ; \qquad H_i(x) = \sum_{n_i} P_i(n_i)\, x^{n_i} . \tag{5}$$

2. Процесс размножения частиц

Пусть в процессе размножения участвуют частицы $\ell+1$ сортов, и пусть нет посторонних источников частиц. Через некоторое среднее время r каждая частица сорта $i=0,1,\dots\ell$ превращается с вероятностью $\phi_i(k_{0i},\dots k_{\ell i})$ в $\vec{k}_i=(k_{0i},\dots k_{\ell i})$ частиц всех остальных сортов. Соответствующей производящей функцией будет выражение:

$$G_i(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}_i} \phi_i(\vec{k}_i)\, x_0^{k_{0i}}\, x_1^{k_{1i}} \dots x_\ell^{k_{\ell i}} . \tag{6}$$

В некотором поколении r' имеем $\vec{n}_{r'}=(n_{0r'},\dots n_{\ell r'})$ частиц, а в некотором поколении $r>r'$ число частиц будет $\vec{n}_r=(n_{0r},\dots n_{\ell r})$. Пусть $P_{r',r}(\vec{n}_{r'},\vec{n}_r)$ будет соответствующей вероятностью, а

$$H_{r',r}(\vec{x}',\vec{x}) = \sum_{\vec{n}_{r'},\vec{n}_r} P_{r',r}\, x_{0r}^{n_{0r'}} \dots x_{\ell r}^{n_{0r'}} \dots x_{\ell r}^{n_{\ell r}} - \tag{7}$$

соответствующей производящей функцией.

Если зафиксировать r' и рассмотреть переход от поколения $r-1$ к поколению r, то, учитывая марковское свойство процесса

$$P_{r',r}(\vec{n}_{r'},\vec{n}_r) = \sum_{\vec{n}_{r-1}} P_{r',r-1}(\vec{n}_{r'},\vec{n}_{r-1})\, P(\vec{n}_r\,|\,\vec{n}_{r-1}) \tag{8}$$

и очевидное соотношение

$$\sum_{\vec{n}_r} x_{0r}^{n_{0r}} \dots x_{\ell r}^{n_{\ell r}}\, P(\vec{n}_r\,|\,\vec{n}_{r-1}) = G_0^{n_{0r-1}}(\vec{x}) \dots G_\ell^{n_{\ell r-1}}(\vec{x}), \tag{9}$$

где $P(\vec{n}_r\,|\,\vec{n}_{r-1})$ – условная вероятность того, что в поколении r имеется $\vec{n}_r$ частиц при условии, что в поколении $r-1$ имелось $\vec{n}_{r-1}$ частиц, из (7) получаем рекуррентное соотношение:

$$H_{r',r}(\vec{x}',\vec{x}) = H_{r',r-1}(\vec{x}',\vec{G}(\vec{x})) , \tag{10}$$

где

$$\vec{G}(\vec{x}) = (G_0(\vec{x}),\dots G_\ell(\vec{x})).$$

Поскольку нас интересует переход к непрерывным временам, то (10) удобно записать в виде

$$H_{r',r}(\vec{x}',\vec{x}) = H_{r',r-1}(\vec{x}',\vec{x}+\vec{g}\,\delta t), \tag{11}$$

где

$$\vec{g}(\vec{x}) = \frac{\vec{G}(\vec{x})-\vec{x}}{r}. \tag{12}$$

Если в рассматриваемую систему постоянно попадают частицы посторонних источников, то к правой части (11) нужно еще добавить некоторый множитель.

Пусть вероятность испускания источником частиц сорта i одной частицы за интервал времени δt равна

$$S_i\,\delta t + O(\delta t).$$

Соответствующей производящей функцией будет выражение

$$1 - S_i\,\delta t + S_i(\delta t)x_i = 1 + S_i\,\delta t(x_i - 1),$$

где S_i –интенсивность источника, отнесенная к единице времени. Если считать, что частицы разных сортов излучаются независимо от друга, то множитель, который нужно добавить к правой стороне (11), чтобы учесть действие источника на рассматриваемый рост населения нейтронов, будет иметь вид:

$$\prod_{i=0}^{\ell}(1 + S_i\,\delta t(x_i - 1)) = 1 + \delta t \sum_i S_i(x_i - 1) + O(\delta t). \tag{13}$$

Умножая правую сторону (11) на (13) и разлагая $H_{r',r-1}$ в ряд по степеням $\vec{g}(\vec{x})\delta t$, получаем

$$H_{r',r}(\vec{x}',\vec{x}) = H_{r',r-1}(\vec{x}',\vec{x}) + \frac{\partial H_{r',r-1}}{\partial \vec{x}}\vec{g}\,\delta t + H_{r',r-1}\delta t \sum_i S_i(x_i - 1) + O(\delta t). \tag{14}$$

Если обозначить $t' = r'\tau$; $t = r\tau$, то из (14) переходом $\delta t \to 0$ получается уравнение для производящей функции

$$H_{r',r}(\vec{x}',\vec{x}) \quad \to \quad H_2(\vec{x}', t'; \vec{x}, t):$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial t} = \vec{g}(\vec{x})\frac{\partial H_2}{\partial \vec{x}} + H_2\,\vec{S}(\vec{x} - 1); \qquad t' < t, \tag{15}$$

где

$$\vec{g}(x)\frac{\partial H_2}{\partial \vec{x}} = \sum_{i=0}^{\ell} g_i(\vec{x})\frac{\partial H_2}{\partial x_i};$$

$$\vec{S} = (S_0, S_1, \ldots S_\ell). \tag{16}$$

Для многих рассуждений удобно знать производящую функцию $H^i(\vec{x}, t; t_0)$ распределения частиц в системе без постороннего источника в момент t при условии, что в момент $t_0 < t$ в системе имелась лишь одна частица сорта i. Такая частица за время τ порождает следующее поколение с вероятностью $\phi_i(\vec{k}_i)$. Каждая частица этого второго поколения за время $t = r\tau$ порождает распределение частиц с производящей функцией H^i_r. Поэтому производящая функция распределения поколения $r + 1$ (принимая за первое поколение первоначальную частицу) дается соотношением

$$H^i_{r+1}(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}_i} \phi_i(\vec{k}_i)\{H^0_r(\vec{x})\}^{k_{0i}} \ldots \{H^\ell_r(\vec{x})\}^{k_{\ell i}} = G_i\{\vec{H}_r(\vec{x})\},$$

где

$$\vec{H}_r(\vec{r}) = (H^0_r(\vec{x}), H^1_r(\vec{x}), \ldots H^\ell_r(\vec{x})).$$

Отсюда таким же образом, как и выше, получаются уравнения для функций $H^i(\vec{x}, t; \tau t_0)$:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}(\vec{x}, t; t_0) = \vec{g}\{\vec{H}(\vec{x}, t; t_0)\}; \tag{17}$$

$$\vec{H}(\vec{x}, t_0; t_0) \equiv \vec{x}. \tag{18}$$

3. Размножение нейтронов в реакторах

Уравнения (16) и (17) могут быть применены к процессу размножения нейтронов.

Рассматривается одногрупповая модель с пространственно усредненными величинами. Индекс "0" пусть относится к нейтронам, а индексы "$1,2,\dots \ell$" пусть обозначают нейтроноактивные осколки деления. Пусть, далее, τ –среднее время жизни мгновенных нейтронов. За это время каждый нейтрон может с вероятностью $p(t)$ вызвать деление ядра горючего или с вероятностью $1-p(t)$ "бесполезно" погибнуть. Осколок сорта i за время τ может распасться, испуская (запаздывающие) нейтроны, или не распасться, "порождая" тем самым самого себя. Предположим, что при каждом делении образуется лишь один нейтроноактивный осколок и что последний не может испускать больше одного нейтрона. Вероятность излучения осколком сорта i за время τ нейтрона будет равна $\lambda_i \tau$, где λ_i – постоянная распада осколка сорта i. Поэтому "распределение" нейтронов и осколков деления, порожденных одним первичным осколком сорта i за время τ, будет иметь производящую функцию

$$G_i(x,\vec{y}) = \lambda_i \tau \; x + (1-\lambda_i \tau)\, y_i \; ; \quad i = 1,2,\dots \ell \, . \tag{19}$$

Один первичный нейтрон с вероятностью $\phi_0(k_0,\dots k_\ell)$ за время τ превратится в k_0 мгновенных нейтронов и k_i осколков деления сорта $i = 1,2,\dots \ell$.

Производящую функцию

$$G(x,\vec{y}) = \sum_k \phi_0(\vec{k})\, x^{k_0} y_1^{k_1} \dots y_\ell^{k_\ell}$$

можно представить в форме

$$G(x,\vec{y}) = 1 - p(t) + p\, G_\nu(x,\vec{y}) \; ;$$
$$G_\nu(x,\vec{y}) = \sum_\nu P_\nu(\nu_0,\dots\nu_\ell)\, x^{\nu_0} y^{\nu_1} \dots y^{\nu_\ell} \, , \tag{20}$$

где $P_\nu(\nu_0,\dots\nu_\ell)$– вероятность того, что при одном делении рождаются ν_0 мгновенных нейтронов и ν_i нейтроноактивных осколков сорта i. Уравнение (15) для производящей функции $H(x',\vec{y}',t';x,\vec{y},t)$ принимает вид:

$$\frac{\partial H_2}{\partial t} = \frac{G(x,\vec{y}) - x}{\tau} \frac{\partial H_2}{\partial x} + \sum_k \lambda_k (x-y_k) \frac{\partial H_2}{\partial y_k} + S(t)\, H_2(x-1), \qquad t' < t \, , \tag{21}$$

где $S(t)$ – мощность постороннего источника нейтронов. Если в уравнении (21) положить $x' = y_i' = 1$, то оно переходит в известное уравнение /1/ для производящей функции

$$H_1(x,\vec{y},t) \equiv H_2(1,1,t';\; x,\vec{y},t)$$

распределения нейтронов и осколков деления в момент t. Легко проверить, что производящую функцию $H_1(x,\vec{y},t)$ можно представить в виде

$$H_1(x,\vec{y}) = J\{H^\circ(x,\vec{y},t;t_0), \vec{H}\} \exp \int_{t_0}^{t} dt\, S\{H^\circ(x,\vec{y},t;t') - 1\} \, , \tag{22}$$

где $J(x,\vec{y})$ – производящая функция начального распределения нейтронов и осколков деления, а $H^{\circ}(x,\vec{y},t;t_0)$, H^i – решения уравнений (17):

$$\tau \frac{\partial H^{\circ}}{\partial t} = G\{H^{\circ}, H^1, \dots H^{\ell}\} - H^{\circ} ,$$
$$\frac{\partial H^i}{\partial t} = \lambda_i (H^{\circ} - H^i(x,\vec{y},t;t_0)) ; \qquad i = 1,2,\dots \ell , \tag{23}$$

причем система уравнений для H^i может быть формально решена:

$$H^i = y_i e^{-\lambda_i(t-t_0)} + \lambda_i \int_{t_0}^{t} dt' H^{\circ}(x,\vec{y},t';t_0) e^{-\lambda_i(t-t')} ;$$
$$i = 1,2,\dots \ell . \tag{24}$$

Из производящей функции $G(x,\vec{y})$ (20) получаем при $x = y_i = z$ дифференцированием по z соотношение

$$\bar{k}'_0 \equiv \langle k \rangle = p(t)(\bar{\nu}_0 + \sum_i \bar{\nu}_i) \equiv p\bar{\nu} \tag{25}$$

или

$$\bar{k}'_0 = \bar{k}_0 + \sum_i \bar{k}'_i \equiv k_0 + \sum_i \beta_i \equiv k_0 + \beta . \tag{26}$$

Для цели данной работы достаточно знать первые центральные моменты

$$\sigma^2 = \langle (n - \bar{n})^2 \rangle ; \quad \mu_k = \langle (n - \bar{n})(c_k - \bar{c}_k) \rangle ;$$
$$\rho_{ik} = \langle (c_i - \bar{c}_i)(c_k - \bar{c}_k) \rangle ; \quad \bar{n} \equiv \langle n \rangle ; \quad \bar{c}_k \equiv \langle c_k \rangle ; \tag{27}$$

где n – число нейтронов, а c_i – число осколков деления сорта i, содержащихся в системе в момент времени t. Из уравнения (21) для $H_1(x,\vec{y},t)$ получаются уравнения для $\bar{n}$ и $\bar{c}_k$:

$$\frac{d\bar{n}}{dt} + \alpha_0 \bar{n} = \sum_k \lambda_k \bar{c}_k + S(t) ;$$
$$\frac{d\bar{c}_k}{dt} + \lambda_k \bar{c}_k = \alpha_k \bar{n} ; \tag{28}$$

а также уравнения для центральных моментов (27):

$$\frac{d\sigma^2}{dt} + 2\alpha_0 \sigma^2 - 2\sum_k \lambda_k \mu_k = 2A\bar{n} - \alpha_0 \bar{n} + \sum_k \lambda_k \bar{c}_k + S(t) ;$$

$$\frac{d\mu_k}{dt} - \alpha_k \sigma^2 + (\lambda_k + \alpha_0)\mu_k - \sum_i \lambda_i \rho_{ik} = A_k \bar{n} + \alpha_k \bar{n} - \lambda_k \bar{c}_k ; \tag{29}$$

$$\frac{d\rho_{ik}}{dt} - \alpha_k \mu_i - \alpha_i \mu_k + (\lambda_i + \lambda_k)\rho_{ik} = A_{ik}\bar{n} + (\lambda_i \bar{c}_i - \alpha_i \bar{n})\delta_{ik} ,$$

где

$$\alpha_0 = \frac{1 - \bar{k}_0}{\tau}; \qquad \alpha_i = \frac{\beta_i}{\tau} ; \tag{30}$$

$$A = \frac{\overline{k_0(k_0-1)}}{2\tau} + \alpha_0 ; \quad A_k = \frac{\overline{k_0 k_k}}{\tau} - 2\alpha_k ; \quad A_{ik} = \frac{\overline{k_i k_k}}{\tau} + \alpha_i \delta_{ik} . \tag{31}$$

Легко проверить правильность следующего соотношения:

$$2A + 2\sum_k A_k + \sum_k \sum_{ik} A_{ik} = \frac{\overline{k(k-1)}}{r} + 2a \quad , \tag{32}$$

где

$$k = \sum_i k_i + k_0 \; ; \qquad a = \frac{1-\bar{k}}{r} \; . \tag{33}$$

В дальнейшем будут рассматриваться только стационарные подкритические системы ($a > 0$, $S > 0$). В этом случае из (28) следует

$$\bar{n} = S / a \, ,$$

а уравнения (28) принимают вид:

$$\begin{aligned} &a_0 \sigma^2 - \sum_k \lambda_k \mu_k = A \bar{n} \; ; \\ -&a_k \sigma^2 + (\lambda_k + a_0) \mu_k - \sum_i \lambda_i \rho_{ik} = A_k \bar{n} \; ; \\ -&a_k \mu_i - a_i \mu_k + (\lambda_k + \lambda_i) \rho_{ik} = A_{ik} \bar{n} \; . \end{aligned} \tag{34}$$

В общем случае их нужно решить численно. В случае, когда полный коэффициент размножения $\bar{k}$ очень мало отличается от единицы, для μ_k можно получить приближенное решение /1/:

$$\mu_i \cong \frac{a_i}{\lambda_i} \sigma^2 \left(1 - \frac{a}{\lambda_i}\right) \cong \frac{a_i}{\lambda_i} \sigma^2 \tag{35}$$

при условии

$$1 - \bar{k} \ll \frac{\lambda_i r}{\sum_k \frac{a_k}{\lambda_k}} \; . \tag{36}$$

Из уравнений (34) и соотношения (32) легко получить уравнение

$$\sigma^2 + \sum_k \mu_k = \bar{n} + \frac{\overline{k(k-1)}}{2 a r} \bar{n} \; , \tag{37}$$

откуда для σ^2 в приближении (35) имеем:

$$\sigma^2 \cong \bar{n} \frac{\overline{k(k-1)}}{2 a r q} \; ; \qquad q = 1 + \sum_k \frac{a_k}{\lambda_k} \; . \tag{38}$$

Множитель $\overline{k(k-1)}$ легко выразить через измеримые величины ν, $\overline{\nu^2}$. Из производящей функции (20) для $x = y_i = z$ двойным дифференциованием по z получаем:

$$\overline{k(k-1)} = p\overline{\nu(\nu-1)} = \bar{k}\,\frac{\overline{\nu(\nu-1)}}{\bar{\nu}} \equiv \Gamma \, . \tag{39}$$

4. Корреляционная функция процесса размножения нейтронов

Для определения дисперсии числа испускаемых нейтронов в не конечном интервале времени Δt, а также для определения спектральной плотности мощности нейтронных шумов в стационарном реакторе удобно знать корреляционные функции

$$K(t',t) = \langle n(t')\,n(t)\rangle - \langle n(t')\rangle\langle n(t)\rangle \;;$$

$$R_k(t',t) = \langle n(t')\,c_k(t)\rangle - \langle n(t')\rangle\langle c_k(t)\rangle \;. \qquad (40)$$

Из уравнения (15) дифференцированием по x', y_k и x, y_k получаем уравнения для корреляционных функций (40):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial t}(t',t) &= -a_0 K + \sum_k \lambda_k R_k \\ \frac{\partial R_k}{\partial t} &= -\lambda_k R_k + a_k K \end{aligned}\right\} \quad t' < t \qquad (41)$$

с начальными условиями

$$K(t',t') = \sigma^2(t'); \qquad R_k(t',t') = \mu_k(t'). \qquad (42)$$

Уравнения (41) по внешней форме совпадают с кинетическими уравнениями (28). Как будет видно в дальнейшем, благодаря этому к стационарным линейным реакторным системам может быть применена линейная динамическая модель (28), хотя случайные величины n, c_k не являются непрерывными функциями времени.

Из соображения симметрии следует:

$$K = \begin{cases} K(t',t) & \text{для } t' \le t, \\ K(t,t') & \text{для } t' \ge t \end{cases}$$

$$R_k = \begin{cases} R_k(t',t) & \text{для } t' \le t, \\ R_k(t,t') & \text{для } t' \ge t, \end{cases}$$

где $K(t',t)$, $R_k(t',t)$ – решения уравнений (41). Производные от K и R_k по t и t' имеют в точке $t = t$ разрыв, откуда следует, что n, c_i не являются непрерывными функциями времени /2/.

В стационарном случае корреляционные функции зависят только от разности своих аргументов:

$$K(t_1, t_2) = K(t_2 - t_1) = K(t).$$

Тогда система (41) решается так же, как система кинетических уравнений (28), посредством преобразования Лапласа:

$$K(t) = \sum_{k=0}^{\ell} \rho_k\, e^{-\gamma_k |t|} \;; \qquad \rho_k = \frac{\sigma^2 + \sum_i \frac{\lambda_i \mu_i}{\lambda_i - \gamma_k}}{1 + \sum_i \frac{\lambda_i a_i}{(\lambda_i - \gamma_k)^2}}\,, \qquad (42)$$

где γ_k – корни уравнения

$$a_0 - s = \sum_i \frac{\lambda_i a_i}{\lambda_i - s}. \qquad (43)$$

В приближении (35) корреляционная функция (42) принимает вид:

$$K(t) = \sigma^2 \sum_{k=0}^{\ell} B_k e^{-\gamma_k |t|} \quad ; \quad B_k = \frac{1 + \sum_i \frac{a_i}{\lambda_i - \gamma_k}}{1 + \sum_i \frac{\lambda_i a_i}{(\lambda_i - \gamma_k)^2}} \quad . \tag{44}$$

Дисперсия $\sigma^2_{\Delta t}$ числа испускаемых системой нейтронов за промежуток времени $t - t = \Delta t$ получается из соотношения

$$\sigma^2_{\Delta t} = 2 \int_0^{\Delta t} \frac{dt'}{r} \int_0^{t'} \frac{dt''}{r} K(t''), \tag{45}$$

откуда для относительной дисперсии получаем выражение уже ранее выведенное /3/:

$$\frac{\sigma^2_{\Delta t}}{\bar{n}_{\Delta t}} = \sum_{k=0}^{\ell} D_k \Psi_k(\Delta t) \; ; \qquad \bar{n}_{\Delta t} = \bar{n} \frac{\Delta t}{r} \; ;$$

$$\Psi_k(\Delta t) = 1 - \frac{1 - e^{-\gamma_k \Delta t}}{\gamma_k \Delta t} ; \qquad D_k = \frac{2 \rho_k}{\gamma_k r \bar{n}} \quad . \tag{46}$$

5. Спектральная плотность мощности нейтронных шумов

В рассматриваемой стационарной системе число нейтронов n в каждый момент времени обладает дисперсиоей σ^2. Практически же интересна частотная зависисимость этих флюктуаций.

Известно, что средняя спектральная плотность мощности случайной величины $n - \langle n \rangle$ связана с корреляционной функцией $K(t)$ обычным преобразованием Фурье. Если спектральную плотность мощности нейтронных шумов, отнесенную к частотному интервалу шириной 1 гц, обозначить через $\langle |n(f)|^2 \rangle$, то имеет место следующее соотношение /2/:

$$\langle |n(f)|^2 \rangle = 4 \int_0^{\infty} dt \, K(t) \cos(2\pi f t), \tag{47}$$

где f – частота в гц. Но полученная из (37) таким образом форма спектральной плотности

$$\langle |n|^2 \rangle = 4 \sum_k \rho_k \frac{\gamma_k}{\gamma_k^2 + (2\pi f)^2} \tag{48}$$

не удобна для практического пользования. С другой стороны, можно сразу к уравнениям (41) применить преобразование Фурье, или, что то же самое, исходить из преобразования Лапласа функции $K(t)$:

$$L\{K(t)\} \equiv \bar{K}(s) = \frac{\sigma^2 + \sum_i \frac{\lambda_i \mu_i}{\lambda_i + s}}{s + a_0 - \sum_i \frac{\lambda_i a_i}{\lambda_i + s}} \tag{49}$$

и учесть соотношение

$$<|n|^2> = 4\,\mathrm{Real}\,\{\bar{K}(s)\}_{s=-i\omega} \quad ;$$

$$\omega = 2\pi f .$$

Тогда спектральная плотность $<|n|^2>$ получится в более компактном виде, не содержащем корней γ_k :

$$<|n|^2> = \frac{C}{B^2 + \omega^2 L^2} \quad ; \tag{50}$$

$$C = 4\,(\sigma^2 + \sum_i \frac{\lambda_i^2 \mu_i}{\lambda_i^2 + \omega^2}) \quad B - 4L\omega^2 \sum_i \frac{\lambda_i \mu_i}{\lambda_i^2 + \omega^2} \quad ; \tag{51}$$

$$B = a_0 - \sum_i \frac{\lambda_i^2 a_i}{\lambda_i^2 + \omega^2} \quad ; \tag{52}$$

$$L = 1 + \sum_i \frac{\lambda_i a_i}{\lambda_i^2 + \omega^2} . \tag{53}$$

Легко проверить, что выражение

$$(B - i\omega L)^{-1} \tag{54}$$

есть переходная функция кинетических уравнений (28), сведенных к уравнению для одной нейтронной функции $n(t)$. Переходная функция $T(-i\omega)$ получается из преобзования Лапласа этого уравнения и имеет вид

$$T(s) = (s + a_0 - \sum_k \frac{\lambda_k a_k}{\lambda_k + s})^{-1} . \tag{55}$$

Но тогда уравнение (50) можно истолковать как уравнение линейной динамической системы, которая задана кинетическими уравнениями (28) (или функцией (55)), и шум на "выходе" $<|n|^2>$ можно понимать как преобразованный системой шум на "входе" со спектральной плотностью мощности

$$<|S_0|^2> = C . \tag{56}$$

Таким образом, выражение (50) может быть представлено в виде уравнения

$$<|n(f)|^2> = |T(-i\omega)|^2 <|S_0(\omega)|^2> . \tag{57}$$

С другой стороны, при измерении реакторных шумов принято считать, что спектральная плотность $<|n|^2>$ этих шумов пропорциональна квадрату модуля переходной функции $T(-i\omega)$. В терминах модели (53) это означает, что шум на "входе" принято считать белым, т.е. не зависящим от частоты /4/:

$$<|S_0|^2> = 2\bar{k}\,\frac{\overline{\nu(\nu-1)}}{\bar{\nu}\,\tau}\,\bar{n} = \frac{2\Gamma\bar{n}}{\tau} . \tag{58}$$

Так как такое предположение хорошо согласуется с опытом, то можно подозревать, что на первый взгляд сложное выражение (51) для $<|S_0|>$ в интересующей нас области частот $10^{-3} < \omega < 10^3$ очень слабо зависит от частоты и мало отличается от постоянной (58). Рассмотрим предельные значения $<|S_0|^2>$(51) для $\omega \to {}^{0}_{\infty}$. Для $\omega^2 \ll \lambda_i^2$ (51) принимает вид:

$$< | S_0 |^2 > = \frac{2\overline{k(k-1)}\,\bar{n}}{r} + 4\,a\,\bar{n} \; . \tag{59}$$

В случае $\omega^2 \gg \lambda_i^2$ (51) превращается в выражение:

$$< | S_0 |^2 > = \frac{2\overline{k_0(k_0-1)}\,\bar{n}}{r} + 4\,a_0\,\bar{n} \; . \tag{60}$$

Из производящей функции (14) получается точное соотношение:

$$\overline{k(k-1)} = \overline{k_0(k_0-1)} + 2\sum_i \overline{k_0 k_i} + \sum_i \sum_k (\overline{k_i k_k} - \bar{k}_i \delta_{ik}) \; ,$$

откуда для разности выражений (59) и (60) следует

$$\Delta_{S_0} = \frac{2\bar{n}}{r} \{ 2\sum_i \overline{k_0 k_i} + \sum_i \sum_k \overline{k_i k_k} - 3\beta \} \; . \tag{61}$$

Для оценки порядка выражения (61) можно пользоваться упрощенным предположением, что мгновенные нейтроны излучаются независимо от запаздывающих. Кроме того, предполагалось, что при каждом делении возникает только один нейтроноактивный осколок, который может излучить не больше одного нейтрона. Вероятность того, что при делении возникает один осколок типа i будет тогда $\bar{\nu}_i$. Вероятность $P(\nu_0, \dots \nu_\ell)$ в (20) имеет теперь вид:

$$P(\nu_0, \dots \nu_\ell) = P_0(\nu_0)\, P_d(\nu_1, \dots \nu_\ell) \; ,$$

а производящую функцию (20) можно записать в форме:

$$G(x, \vec{y}) = 1 - p + p\, G_{\nu_0}(x) \{ 1 + \sum_k \bar{\nu}_k (y_k - 1) \} \; , \tag{62}$$

где

$$G_{\nu_0}(x) = \sum_{\nu_0} P_{\nu_0}(\nu_0)\, x^{\nu_0} \; . \tag{63}$$

Отсюда следует:

$$\overline{k_0 k_i} = p\, \bar{\nu}_i \bar{\nu}_0 = \beta_i \bar{\nu}_0 \; ; \qquad \overline{k_i k_k} = \beta_i \delta_{ik} \; . \tag{64}$$

Таким образом, разность (61) будет порядка

$$\Delta_{S_0} = \frac{4\bar{n}}{r} \beta (\bar{\nu}_0 - 1) \approx \frac{4\bar{n}}{r} \beta \, . \tag{65}$$

Это и будет ширина полосы, в которой изменяется величина $< | S_0 |^2 >$.

Интересно отметить, что в приближении (35) получается $\Delta_{S_0} = 0$ без какого-либо предположения о функции $G(x, \vec{y})$. Действительно, из (35) и (37) следует:

$$\sigma^2 a\, q = \frac{\overline{k(k-1)}}{2r} \bar{n} + a\, \bar{n} \; ,$$

а из первого уравнения (34) при помощи (35) получаем:

$$\sigma^2 a\, q = \frac{\overline{k_0(k_0-1)}}{2r} \bar{n} + a_0 \bar{n} \, .$$

Сравнение обоих выражений дает:

$$\overline{k(k-1)} - \overline{k_0(k_0-1)} = 2\beta \; ,$$

т.е. $\Delta_{S_0} = 0$. Поэтому можно с достаточной точностью считать, что в случае почти критических систем производящая функция единичного акта размножения может быть выбрана в виде (62). Наконец, запишем $< | S_0 |^2 >$ (51) для одной группы запаздывающих нейтронов. После простого преобразования получаем:

$$<|S_0|^2> = \frac{\overline{2k(k-1)\bar{n}}}{r} + 4a\bar{n} - \Delta_{S_0}\frac{\omega^4+\omega^2}{(\lambda^2+\omega^2)^2} \quad . \tag{66}$$

Как видно, все выражения (59), (60) и (66) практически совпадают с постоянной (58), если коэффициент размножения достаточно близок к единице.

6. Замечания о критичности реактора

Все выше изложенные рассуждения, связанные со спектральной плотностью мощности, относятся к стационарному подкритическому реактору. Но обычно при измерении спектральной плотности мощности шумов в критических системах ($\bar{k}=1,\ S=0$) также применяют выражения (57), (58), где в переходную функцию подставляют условие критичности $\bar{k}=1$ /4,5/.

Допустим, что реактор работает при "линейном режиме", т.е. уравнения кинетики могут быть примнены в линейной форме (28), или, точнее, может быть применена линейная модель размножения нейтронов (21). Пусть нет посторонних источников нейтронов ($S = 0$), тогда из требования постоянства среднего числа нейтронов $\bar{n} = const$ из уравнений (28) получается условие критичности

$$a_0 = \sum_i a_i \tag{67}$$

или

$$\bar{k} = \bar{k}_0 + \beta = 1 \quad . \tag{68}$$

Но со статистической точки зрения условия $\bar{n} = const$ еще недостаточно для стационарного режима реактора. Должно быть выполнено более общее условие

$$\frac{\partial H_1}{\partial t}(x, \vec{y}, t) = 0 \quad . \tag{69}$$

Стационарность процесса можно понимать и в более широком смысле, когда достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\begin{gathered} \bar{n} = const; \quad \sigma^2 = const; \quad \rho_{ik} = const; \\ \bar{c}_i = const; \quad \mu_i = const; \quad K(t', t) = K(t - t'). \end{gathered} \tag{70}$$

Допустим, что выполнено условие $\bar{n} = const$, т.е. имеет место условие критичности (67), (68). С другой стороны, сумма уравнений (29) при условии (67) дает:

$$\frac{d}{dt}\left\{\sigma^2 + 2\sum_k \mu_k + 2\sum_i\sum_k \rho_{ik}\right\} = \frac{\overline{k(k-1)}\,\bar{n}}{r} \quad . \tag{71}$$

Выражение в скобках есть дисперсия σ_Q^2 случайной величины $Q = n + \sum_i c_i$. Отсюда следует, что реальная линейная реакторная система без посторонних источников не допускает стационарного режима даже в широком смысле (70), так как $\overline{k(k-1)}$ есть величина, существенно отличная от нуля:

$$\overline{k(k-1)} = \Gamma \approx 2 \; .$$

Если производная (71) отлична от нуля, то отличны от нуля и все производные в уравнениях (29). Дисперсия числа нейтронов неограниченно растет со временем. Но для нестационарного процесса корреляционная функция $K(t', t)$ зависит от t' и t, а не от разности $t - t'$, поэтому понятие спектральной плотности мощности $\langle |n|^2 \rangle$ для такого процесса не имеет смысла. Это видно и из самого выражения для спектральной плотности (50), где σ^2 и μ_f для $a = 0$ расходятся. Поэтому, строго говоря, нельзя применять выражения (57) к "критическим" линейным системам.

Смысл нестационарности критических систем состоит в следующем. Рассмотрим размножающую нейтроны систему без посторонних источников и допустим мысленно, что она не содержит ни одного нейтрона. В такую систему инжектируем в момент $t_0 = 0$ один нейтрон. Нас интересует вероятность того, что для больших t потомство инжектируемого нейтрона выродится, т.е. вероятность того, что при большом t в системе не будет ни одного нейтрона. Если производящую функцию распределения нейтронов и осколков деления в момент t при условии, что в момент $t_0 = 0$ инжектировался один нейтрон, обозначить через $H^\circ(x, \vec{y}, t)$, то искомая вероятность W будет равна

$$W = \underset{t \to \infty}{H^\circ}(0, 0, t). \tag{72}$$

Но функция H° удовлетворяет уравнению (23), поэтому для W имеем уравнение :

$$G(W, \dots W) = W, \tag{73}$$

где функция

$$G(x, \vec{y}) = 1 - p + p\, G_\nu(x, \vec{y})$$

определена в (20). Если рассмотреть лишь очень малые отклонения от критичности $|\bar{k} - 1| \ll 1$, то для $G(x, \vec{y})$ можно было бы взять приближение (62). Но если учесть, что W в таком случае будет очень близко к 1, то уравнение (73) можно записать в виде

$$\ln W = \ln G(W, \dots W) \tag{74}$$

и правую часть разложить в ряд Тейлора по степеням $\ln W$. Учитывая, что

$$\frac{\partial \ln}{\partial \ln z} G(z, \dots z)\Bigg|_{z=1} = \bar{k}; \qquad \frac{\partial^2 \ln}{\partial (\ln z)^2} G(z, \dots z)\Bigg|_{z=1} = \overline{k^2} - \bar{k}^2 \equiv \Delta^2, \tag{75}$$

и пренебрегая членами третьего и высших порядков в $\ln W$, получаем:

$$\ln W = \bar{k} \ln W + \frac{\Delta^2}{2} \ln^2 W$$

или

$$W = \begin{cases} 1 - \dfrac{2(\bar{k} - 1)}{\Delta^2}; & \bar{k} - 1 > 0; \\ 1 \qquad ; & \bar{k} - 1 \le 0. \end{cases} \tag{76}$$

Отсюда видно, почему критическая линейная система ($\bar{k} = 1$) будет нестационарной; в конечном счете она выродится, хотя из-за безграничного роста флюктуаций она в промежуточном состоянии может "взорваться", т.е. может, в отличие от подкритической системы, временно достигнуть высоких уровней мощности.

С другой стороны, известно, что выражение (57), (58) для спектральной плотности мощности хорошо согласуется с измерениями в "критических" системах, если в переходной функции учесть условие критичности $\bar{k} = 1$ /5/. Это объясняется, очевидно, тем фактом, что всегда существуют "посторонние" источники нейтронов и поэтому реальные "критические" системы в линейном режиме в действительности всегда будут почти критическими, так что выполнено условие (36). Поэтому формула (57), (58) для спектральной плотности мощности будет применена, и на ней можно положить $1 - \bar{k}_0 \cong \beta$.

7. Связь статистики числа отсчетов со статистикой нейтронов в реакторе

Для того, чтобы определить влияние детектора на измерение спектральной плотности шумов, достаточно определить корреляционную функцию детектора в процессе измерения.

Рассмотрим сначала статистику измерений числа нейтронов за определенный интервал времени Δt. Индекс N пусть относится к статистике нейтронов в реакторе, а индекс m - к статистике измерений. Пусть далее эффективность детектора ϵ -величина постоянная. Если N -число нейтронов, поглощенных в реакторе за время Δt, то вероятность того, что из этого числа m нейтронов будут поглощены детектором за время Δt, равна

$$P_m = \binom{N}{m} \epsilon^m (1-\epsilon)^{N-\epsilon},$$

а соответствующая производящая функция имеет вид:

$$[1+\epsilon(z-1)]^N.$$

Так как N -величина случайная с распределением P_N и производящей функцией H_N, то производная функция распределения всех зарегистрированных нейтронов за время Δt имеет вид:

$$H_m(z) = \sum_N P_N [1+\epsilon(z-1)]^N = H_N\{1+\epsilon(z-1)\}, \tag{77}$$

и (77) дает связь статистики числа отсчетов со статистикой нейтронов в реакторе. Так, для среднего числа отсчетов в интевале Δt из (77) следует

$$\bar{m} = \bar{N}\epsilon, \tag{78}$$

а для дисперсии $\sigma^2 = \overline{m^2} - \bar{m}^2$ получаем

$$\sigma_m^2 = \epsilon \bar{N} (1-\epsilon) + \epsilon^2 \sigma_N^2 = \epsilon \bar{N} + \epsilon^2 \sigma_N^2 , \tag{79}$$

где $\sigma_N^2 = \overline{N^2} - \bar{N}^2$.

Можно также построить двумерную производящую функцию, из которой получается корреляционная функция детектирования нейтронов. Вероятность того, что из поколения около момента t_1, содержащего n_1 нейтронов, некоторое число нейтронов будет поглощено детектором, имеет производящую функцию

$$[1+\epsilon(z_1-1)]^{n_1/\tau}.$$

Такую же производящую функцию имеем для поглощения детектором нейтронов из поколения около момента $t_2 > t_1$. Поэтому производящей функцией вероятности того, что детектор зарегистрировал около момента t_1 некоторое число нейтронов из поколения n_1 и около момента t_2 – некоторое число нейтронов из поколения n_2, будет выражение

$$H(z_1, t_1; z_2, t_2) = \sum P_{12}(n_1, n_2)[1+\epsilon(z_1-1)]^{n_1/\tau}[1+\epsilon(z_2-1)]^{n_2/\tau}, \tag{80}$$

где P_{12} – вероятность того, что поколение около момента t_1 содержит n_1 нейтронов, а поколение около момента $t_2 - n_2$ нейтронов. Дифференцируя (80) по z_1 и z_2, получаем при $z_1 = z_2 = 1$

$$\overline{m_1 m_2} = \overline{n_1 n_2}\frac{\epsilon^2}{\tau^2}; \quad \overline{m_1^2} = \frac{\bar{n}_1 \epsilon}{\tau} + \overline{n_1^2}\frac{\epsilon^2}{\tau^2}, \tag{81}$$

а отсюда для корреляционной функции детектирования $k(t_1, t_2)$ имеем:

$$k(t_1, t_2) = \overline{m_1 m_2} - \overline{m_1}\,\overline{m_2} = \bar{n}(t_1)\frac{\epsilon}{\tau}\delta(t_2 - t_1) + \frac{\epsilon^2}{\tau^2}K(t_1, t_2), \tag{82}$$

где $K(t_1, t_2)$ - корреляционная функция процесса размножения нейтронов в (40), а дельта-функция $\delta(t_2 - t_1)$ получается из требования нормировки (79):

$$\sigma_m^2 = \epsilon \bar{N} + \epsilon^2 \sigma_N^2 = \int_{t_1}^{t_2} dt' \int_{t_1}^{t_2} dt'' \, k(t', t''),$$

где

$$\bar{N} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt'}{\tau} \bar{n}(t'); \qquad \sigma_N^2 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt'}{\tau} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt''}{\tau} K(t', t'').$$

При стационарном режиме реактора $K(t_1, t_2)$ зависит только от разности $t = t_1 - t_2$:

$$k(t) = \frac{\epsilon \bar{n}}{\tau}\delta(t) + \frac{\epsilon^2}{\tau^2}K(t). \tag{83}$$

Отсюда получается спектральная плотность мощности детекторных шумов при измерении шумов в реакторе:

$$\langle |m(f)|^2 \rangle = \frac{2\epsilon \bar{n}}{\tau} + \frac{\epsilon^2}{\tau^2}\langle |n(f)|^2 \rangle . \tag{84}$$

Если детектор при каждом поглощенном нейтроне отдает средний заряд Q, то средний детекторный ток будет

$$J = \frac{\epsilon Q}{\tau}\bar{n} . \tag{85}$$

Тогда для небелой части спектральной плотности шумов детекторного тока $\langle |J|^2 \rangle$ (85) дает связь

$$\langle |J|^2 \rangle_2 = \frac{\epsilon^2 Q^2}{r^2} \langle |n|^2 \rangle \, . \tag{86}$$

Первый же член в правой части (84) – белый шум с интенсивностью $\bar{r} = \frac{\epsilon \bar{n}}{r}$.
Для него из

$$J = Q \bar{r}$$

следует

$$\langle |J|^2 \rangle_1 = Q^2 \langle |r|^2 \rangle = Q^2 \bar{r} \, . \tag{87}$$

Окончательно для спектральной плотности детекторного тока имеем известное выражение/4/

$$\langle |J|^2 \rangle = 2 Q^2 \frac{\epsilon \bar{n}}{r} \left(1 + \frac{\epsilon}{r} \langle |n|^2 \rangle \right) \, . \tag{88}$$

Наконец, укажем на связь между корреляционной функцией нейтронов $K(t)$ и вероятностью двух последовательных регистраций нейтронов в интервалах dt_1 и dt_2 с расстоянием $t_2 - t_1 = t$. Вероятность того, что из всех нейтронов поколения n_1 некоторые будут поглощены детектором в интервале dt_1, имеет производящую функцию

$$\left[1 + \frac{dt_1}{r} \epsilon \, (z_1 - 1) \right]^{n_1} .$$

Такую же производящую функцию имеем для интервала dt_2, так что вероятность того, что в интервале dt_1 будут поглощены некоторые нейтроны из поколения n_1, а в интервале dt_2 – некоторые нейтроны из поколения n_2, имеет производящую функцию:

$$H_m(z_1, dt_1; z_2 dt_2) = \sum_{n_1, n_2} P_{12} \left[1 + \frac{dt_1}{r} \epsilon \, (z_1 - 1) \right]^{n_1} \left[1 + \frac{dt_2}{r} \epsilon (z_2 - 1) \right]^{n_2} . \tag{89}$$

Вероятность того, что в интервале dt_1 будет зарегистрирован нейтрон поколения n_1, а в интервале dt_2 –нейтрон поколения n_2, равна:

$$W_{12} dt_1 \, dt_2 = \frac{\partial^2 H_m}{\partial z_1 \partial z_2} \Big|_{z_1 = z_2 = 0} = \overline{n_1 n_2} \, \epsilon^2 \frac{dt_1}{r} \frac{dt_2}{r} + O(\epsilon^2 dt^2)$$

или

$$W_{12} \, dt_1 \, dt_2 = \frac{\bar{n}^2 \epsilon^2}{r^2} dt_1 \, dt_2 + \frac{\epsilon^2}{r^2} K(t) \, dt_1 \, dt_2 \, . \tag{90}$$

Так как $\frac{\bar{n} \epsilon}{r} dt_1$ есть вероятность регистрации одного нейтрона из поколения около момента t_1 в интервале dt_1, то

$$\frac{\epsilon^2}{r^2} K(t) \; dt_1 \, dt_2 \tag{91}$$

есть вероятность регистрации в интервалах dt_1 и dt_2 одной коррелированной пары нейтронов, а выражение

$$P(t) \, dt = \left(\frac{\bar{n} \epsilon}{r} + \frac{\epsilon}{r} \frac{K(t)}{\bar{n}} \right) dt \tag{92}$$

есть условная вероятность того, что в интервале dt около момента t будет зарегистрирован один нейтрон при условии, что в интервале dt_0 около момента $t_0 = 0$ произошла уже регистрация нейтрона.

При учете одних мгновенных нейтронов вероятность (92) совпадает с выведенной ad hoc вероятностью в работе /6/. Действительно, корреляционная функция $K(t)$ следует для этого случая из уравнений (41) в виде

$$K(t) = \sigma^2 e^{-a|t|} ,$$

где σ^2, в свою очередь, получается из первого уравнения (34):

$$\sigma^2 = \bar{n} + \frac{\Gamma \bar{n}}{2 a r} .$$

Отсюда

$$P(t)\,dt = \frac{\epsilon \bar{n}}{r}\,dt + \epsilon\,\frac{\overline{\nu(\nu-1)}}{2\bar{\nu}\,a r^3}\,\bar{k}\,e^{-at}\,dt .$$

Когда определяют дисперсию числа отсчетов в некотором интервале времени Δt, практически регистрируют частицы в последовательных интервалах времени Δt с расстоянием θ. Числа отсчетов ξ_i, $\xi_{i'}$ в двух интервалах времени между собой коррелированы. Явное выражение для корреляционной функции

$$K_{ii'}(\theta, \Delta t) = \langle \xi_i \xi_{i'} \rangle - \langle \xi_i \rangle \langle \xi_{i'} \rangle \tag{93}$$

было выведено в работе /3/. Это выражение получается просто из корреляционной функции детектора (82). Действительно, корреляционная функция (93) связана с корреляционной функцией (82) следующим образом:

$$K_{ii'}(\theta, \Delta t) = \int_{t_a}^{t_b} dt' \int_{t_c}^{t_d} dt'' \; k(t'' - t') , \tag{94}$$

где $t_b - t_a = \Delta t$ – интервал, в котором число отсчетов равно ξ_i, а $t_d - t_c = \Delta t$ – интервал, в котором число отсчетов равно $\xi_{i'}$. После преобразования переменных

$$t'' - t' \to t ; \qquad t - t' \to s$$

имеем

$$K_{ii'}(\theta, \Delta t) = \int_{(i-i')(\theta+\Delta t) - \Delta t}^{(i-i')(\theta+\Delta t)} ds \; \cdot \; \int_{s}^{s+\Delta t} dt \; k(t) . \tag{95}$$

Подставляя $k(t)$ (82) и (44) в (95), получаем окончательно

$$\begin{aligned} K_{ii'}(\theta, \Delta t) &= \left(\frac{\Delta t\, \epsilon}{r}\right)^2 \sum_k \rho_k \left[1 - \Psi_k(\Delta t)\right]^2 e^{\gamma_k \Delta t - \gamma_k (\theta + \Delta t)|i - i'|} = \\ &= \tfrac{1}{2}\, C_1 (\Delta t)^2 \epsilon \sum_k \gamma_k D_k \left[1 - \Psi_k(\Delta t)\right]^2 e^{-\gamma_k \theta |i - i'|} , \end{aligned} \tag{96}$$

где $C_1 = \frac{\bar{n}\epsilon}{r}$ – скорость счета детектора, D_k связано с ρ_k по (46), а Δt в экспоненте с правой стороны второго уравнения по сравнению с θ отброшено, так как обычно $\theta \gg \Delta t$. Для $i = i'$ имеем, очевидно,

$$K_{ii} = \sigma_m^2 .$$

Литература

1. E.Courant, P.Wallace. Phys. Rev., 72, 1033 (1947).
2. В.Пугачев. Теория случайных функций. Москва, Физматгиз, 1962.
3. L.Pál. Acta Phys. Hung., 14, 369 (1962).
4. M.Moore. Nucl. Sci. Eng., 3, 387 (1958);
   C.Cohn. Nucl. ESci. Eng., 7, 472 (1960).
5. C.Cohn. Nucl. Sci. Eng., 5, 33 (1959).
6. J.Orndoff. Nucl. Sci. Eng., 2, 5450 (1957).

Рукопись поступила в издательский отдел
9 февраля 1965 г.