1991

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-1991

Нгуен Ван Хьеу

ГРУППА СИММЕТРИИ SL(6) И РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ОБОБЩЕНИЕ ГРУППЫ СИММЕТРИИ SU(6). II.

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1965

P-1991

Нгуен Ван Хьеу

ГРУППА СИММЕТРИИ SL(6) И РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ОБОБЩЕНИЕ ГРУППЫ СИММЕТРИИ SU(6). II.

Направлено в журнал "Ядерная физика"

1. Введение. Формулировка метода изучения нарушенной симметрии SL(6)

Возможности релятивистских обобщений симметрии SU(6) Гурсея, Радикати, Пайса и Сакиты/1-4/ обсуждались в ряде работ/5-13/. В предыдущей работе автора/13/, посвященной изучению следствий симметрии SL(6), были рассмотрены трансформационные свойства спиноров группы SL(6), волновых уравнений, векторных и аксиальных токов и лагранжиана взаимодействия. В частности, было показано, что существует лагранжиан взаимодействия, инвариантный относительно преобразований группы SL(6). Однако волновые уравнения инвариантны только относительно подгруппы $SU(3) \times L$, где L – группа Лоренца, и нарушают симметрию SL(6) даже для свободных частиц, и поэтому, например, S -матрица не будет инвариантной относительно группы SL(6). Здесь мы обсуждаем один возможный метод изучения следствий симметрии SL(6), позволяющий учесть влияния этого нарушения.

Для этого рассмотрим сначала волновые уравнения для частиц, описываемых спинорами первого ранга $\phi^{(\alpha a)}$ и $\chi^{(\dot\alpha \dot a)}$

$$
\begin{aligned}
&(i\hat p)_{a}^{\dot a'}\,\phi^{(\alpha a)} + m\,\chi^{(\dot\alpha \dot a')} = 0,\\
&(i\hat p)_{\dot a}^{a'}\,\chi^{(\dot\alpha \dot a)} + m\,\phi^{(\alpha a')} = 0,
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

где

$$
\begin{aligned}
&(\hat p)_{a}^{\dot a'} = p_\mu (\sigma_\mu)_{a}^{\dot a'}, \quad (\hat p)_{\dot a}^{a'} = p_\mu (\sigma_\mu)_{\dot a}^{a'}, \quad p_\mu = -i\,\frac{\partial}{\partial x_\mu},\\
&(\sigma_4)_{a}^{\dot a'} = (\sigma_4)_{\dot a}^{a'} = \delta_{a'a}, \quad (\sigma_i)_{a}^{\dot a'} = -(\sigma_i)_{\dot a}^{a'} = i[\sigma_i]_{a'a},
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

$$
\mu = 1,2,3,4, \quad i = 1,2,3,
$$

α – унитарный индекс, $\alpha = 1, 2, 3$, а a – спиновый индекс, $a = 1, 2$ (подробно см. работу автора/13/). Это уравнение неинвариантно относительно группы SL(6). Представим себе, что обычные операторы импульсы в (1) и (2) являются лишь компонентами (в некоторой системе "координат" группы SL(6)) некоторых тензорных операторов, преобразующихся как спиноры второго ранга группы $SL(6)$, а именно $(\hat{P})^{(\dot{\alpha}'\dot{a}')}_{(\alpha a)}$ и $(\hat{P})^{(\alpha' a')}_{(\dot{\alpha}\dot{a})}$. Тогда можно написать инвариантные уравнения

$$(i\hat{P})^{(\dot{\alpha}'\dot{a}')}_{(\alpha a)}\,\phi^{(\alpha a)} + m\,\chi^{(\dot{\alpha}'\dot{a}')} = 0,$$

$$(i\hat{P})^{(\alpha' a')}_{(\dot{\alpha}\dot{a})}\,\chi^{(\dot{\alpha}\dot{a})} + m\,\phi^{(\alpha' a')} = 0. \qquad (3)$$

В этом случае инвариантность лагранжиана взаимодействия влечет за собой инвариантность, например, S -матрицы. Это заключение приводит к следующему методу изучения следствий симметрии $SL(6)$ с учетом нарушения, вызываемого волновыми уравнениями вида (1).

При изучении волновых уравнений или матричных элементов процессов рассеяния или распада мы сначала рассмотрим обычные импульсы частиц $(\hat{p})^{\dot{a}'}_{a}$ и $(\hat{p})^{a'}_{\dot{a}}$ как компоненты тензоров $(\hat{P})^{(\dot{\alpha}'\dot{a}')}_{(\alpha a)}$ и $(\hat{P})^{(\alpha' a')}_{(\dot{\alpha}\dot{a})}$. Мы потребуем, чтобы волновые уравнения и матричные элементы, содержащие волновые функции частиц и тензоры $(\hat{P})^{(\dot{\alpha}'\dot{a}')}_{(\alpha a)}$ и $(\hat{P})^{(\alpha' a')}_{(\dot{\alpha}\dot{a})}$, были инвариантными относительно группы $SL(6)$, а затем в полученных инвариантных уравнениях или матричных элементах сделаем замену[x)]

$$(\hat{P})^{(\dot{\alpha}'\dot{a}')}_{(\alpha a)} \to (\hat{p})^{\dot{a}'}_{a}\,\delta_{\alpha'\alpha}, \quad (\hat{P})^{(\alpha' a')}_{(\dot{\alpha}\dot{a})} \to (\hat{p})^{a'}_{\dot{a}}\,\delta_{\alpha'\alpha}. \qquad (4)$$

Волновые уравнения или матричные элементы, полученные после замены (4), не будут инвариантными относительно группы $SL(6)$. Иначе говоря, симметрия $SL(6)$ нарушается при этой замене. Однако это нарушение не является произвольным, и в частности, инвариантность относительно группы $SU(3)\times L$ сохраняется.

Для применения предложенного метода к изучению процессов рассеяния и распада необходимо прежде всего определить явный вид волновых функций частиц в различных мультиплетах группы $SL(6)$ и изучить волновые уравнения для этих частиц. Это будет сделано для спиноров второго и третьего ранга в следующих параграфах настоящей работы. Мы показали, в частности, что спиноры третьего ранга $\phi^{\underline{(\alpha a)(\beta b)(\dot{\gamma}\dot{c})}}$ и $\chi^{(\beta b)\underline{(\dot{\gamma}\dot{c})(\dot{\alpha}\dot{a})}}$, где черта обозначает симметричность относительно соответствующих пар индексов, описывают состояния 56-плета, и волновые уравнения для спиноров эквивалентны уравнению Рариты-Швингера /14/ для состояний со спином 3/2 и уравнению Дирака для состояний со спином 1/2. Полученные выражения волновых функций будут использованы при изучении физических следствий симметрии $SL(6)$.

---

x) Этот метод называем шпурионным формализмом теории нарушенной симметрии $SL(6)$ по аналогии с введением шпурионов при изучении следствий правил отбора в слабых взаимодействиях. Аналогичная процедура также была предложена в работе /7/.

В заключение этого параграфа отметим, что система уравнений (3) приводит к следующим уравнениям второго порядка для каждого спинора $\phi^{(\alpha a)}$ и $\chi^{(\dot{\alpha}\dot{a})}$

$$(\hat{P})^{(\alpha a)}_{(\dot{\beta}\dot{b})}\,(\hat{P})^{(\dot{\beta}\dot{b})}_{(\gamma c)}\,\phi^{(\gamma c)} + m^2\phi^{(\alpha a)} = 0,$$

$$(\hat{P})^{(\dot{\alpha}\dot{a})}_{(\beta b)}\,(\hat{P})^{(\beta b)}_{(\dot{\gamma}\dot{c})}\,\chi^{(\dot{\gamma}\dot{c})} + m\,\chi^{(\dot{\alpha}\dot{a})} = 0. \qquad (5)$$

После замены (4) эти уравнения превращаются в уравнение Клейна-Гордона, и они являются обобщением последнего уравнения. Это замечание относится также к уравнениям для спиноров высших рангов.

2. Барионный 56-плет

Рассмотрим барионный мультиплет, характеризуемый спинорами $\phi^{\underline{(\alpha a)(\beta b)(\dot{\gamma}\dot{c})}}$ и $\chi^{(\beta b)\underline{(\dot{\gamma}\dot{c})(\dot{\alpha}\dot{a})}}$. Каждый из этих спиноров обладает 126 компонентами. Однако в силу волновых уравнений не все компоненты являются независимыми. Следуя предложенному методу, мы сначала рассмотрим импульсы как компоненты тензора $(\hat{P})^{(\dot{\alpha}'\dot{a}')}_{(\alpha a)}$ и $(\hat{P})^{(\alpha' a')}_{(\dot{\alpha}\dot{a})}$. Тогда инвариантные уравнения, связывающие спиноры $\phi^{\underline{(\alpha a)(\beta b)}(\dot{\gamma}\dot{c})}$ и $\chi^{(\beta b)\underline{(\dot{\gamma}\dot{c})(\dot{\alpha}\dot{a})}}$, имеют вид:

$$(i\hat{P})^{(\dot{\alpha}'\dot{a}')}_{(\alpha a)}\,\phi^{\underline{(\alpha a)(\beta b)}(\dot{\gamma}\dot{c})} + m\,\chi^{(\beta b)\underline{(\dot{\gamma}\dot{c})(\dot{\alpha}'\dot{a}')}} = 0,$$

$$(i\hat{P})^{(\alpha' a')}_{(\dot{\alpha}\dot{a})}\,\chi^{(\beta b)\underline{(\dot{\gamma}\dot{c})(\dot{\alpha}\dot{a})}} + m\,\phi^{\underline{(\alpha' a')(\beta b)}(\dot{\gamma}\dot{c})} = 0. \qquad (6)$$

Осуществляя замену (4), мы получим систему уравнений

$$(i\hat{p})^{\dot{a}'}_{a}\,\phi^{\underline{(\alpha a)(\beta b)}(\dot{\gamma}\dot{c})} + m\,\chi^{(\beta b)\underline{(\dot{\gamma}\dot{c})(\dot{\alpha}\dot{a}')}} = 0,$$

$$(i\hat{p})^{a'}_{\dot{a}}\,\chi^{(\beta b)(\dot{\gamma}\dot{c})(\dot{\alpha}\dot{a})} + m\,\phi^{\underline{(\alpha a')(\beta b)}(\dot{\gamma}\dot{c})} = 0, \qquad (7)$$

которая инвариантна относительно подгруппы $SU(3)\times L$, но нарушает симметрию $SL(6)$. Значения спиноров $\phi^{\underline{(\alpha a)(\beta b)}(\dot{\gamma}\dot{c})}$ и $\chi^{(\beta b)\underline{(\dot{\gamma}\dot{c})(\dot{\alpha}\dot{a})}}$ в системе покоя частиц обозначим через $\phi_0^{\underline{(\alpha a)(\beta b)}(\dot{\gamma}\dot{c})}$ и $\chi_0^{(\beta b)\underline{(\dot{\gamma}\dot{c})(\dot{\alpha}\dot{a})}}$ и рассмотрим их как представления подгруппы $SU(6)$. Тогда не существует разницы между пунктирными и непунктирными индексами. Так как в системе покоя

$$(i\hat{p})^{\dot{a}'}_{a} = (i\hat{p})^{a'}_{\dot{a}} = -m\,\delta_{a'a},$$

то уравнения (7) и симметричность рассматриваемых спиноров по соответствующим парам индексов приводят к равенству

$$\phi_0^{\underline{(\alpha a)(\beta b)(\dot\gamma\dot c)}} = \chi_0^{(\beta b)\underline{(\dot\gamma\dot c)(\dot\alpha\dot a)}} = \chi_0^{(\beta b)\underline{(\dot\alpha\dot a)(\dot\gamma\dot c)}} =$$

$$= \phi_0^{\underline{(\gamma c)(\beta b)}(\dot\alpha\dot a)} = \dots \qquad (8)$$

Таким образом, спиноры $\phi_0^{\underline{(\alpha a)(\beta b)(\dot\gamma\dot c)}}$ и $\chi_0^{(\beta b)\underline{(\gamma c)(\alpha a)}}$, рассматриваемые как представления подгруппы $SU(6)$, полностью симметричны по всем парам индексов, т.е. являются неприводимыми представлениями. Каждый из этих спиноров имеет 56 независимых компонент, и они описывают состояния барионного 56-плета.

Теперь выразим $\phi^{\underline{(\alpha a)(\beta b)}(\dot\gamma\dot c)}$ и $\chi^{(\beta b)\underline{(\dot\gamma\dot c)(\dot\alpha\dot a)}}$ через волновые функции декуплета со спином 3/2 и октета со спином 1/2. Для этого введем полностью антисимметричные тензоры второго ранга e^{ab}, e_{ab}, $e^{\dot a\dot b}$ и $e_{\dot a\dot b}$, удовлетворяющие условиям

$$e^{ab}e_{bc} = e^{\dot a\dot b}e_{\dot b\dot c} = \delta_{ac}, \qquad e_{\dot a\dot b} = -e_{ab}. \qquad (9)$$

Спиноры $\phi^{\underline{(\alpha a)(\beta b)}(\dot\gamma\dot c)}$ и $\chi^{(\beta b)\underline{(\dot\gamma\dot c)(\dot\alpha\dot a)}}$ будем рассматривать как представления подгруппы $SU(3)\times L$. Отметим, что относительно группы $SU(3)$ спиноры с пунктирными унитарными индексами $\dot\alpha$, $\dot\beta$ и т.д. и с непунктирными индексами α, β и т.д. преобразуются одинаково. Поэтому в данном случае (когда рассматривается подгруппа $SU(3)\times L$, а не сама группа $SL(6)$), спиноры $\phi^{\underline{(\alpha a)(\beta b)}(\dot\gamma\dot c)}$ и $\chi^{(\beta b)\underline{(\dot\gamma\dot c)(\dot\alpha\dot a)}}$ будем обозначать через $\phi^{ab\dot c,\,\alpha\beta\gamma}$ и $\chi^{b\dot c\dot a,\,\beta\gamma\alpha}$, соответственно.

Пусть $\phi^{\underline{ab\dot c},\,\underline{\alpha\beta\gamma}}$ и $\chi^{\underline{b\dot c\dot a},\,\underline{\beta\gamma\alpha}}$ – спиноры, характеризующие состояния декуплета со спином 3/2, а $\phi_\beta^{a,\alpha}$ и $\chi_\beta^{\dot a,\alpha}$ – спиноры, характеризующие состояния октета со спином 1/2. Эти спиноры являются неприводимыми представления группы $SU(3)\times L$. Спиноры $\phi^{ab\dot c,\,\alpha\beta\gamma}$ и $\chi^{b\dot c\dot a,\,\beta\gamma\alpha}$ выражаются через эти неприводимые спиноры следующим образом

$$\phi^{ab\dot c,\alpha\beta\gamma} = \phi^{\underline{ab\dot c},\,\underline{\alpha\beta\gamma}} + \frac{1}{3\sqrt2}\{ e^{ab}\,\epsilon^{\alpha\beta\delta}\chi_\delta^{\dot c,\gamma}$$

$$+ \left(\frac{i\hat p}{m}\right)^{b\dot c}\epsilon^{\beta\gamma\delta}\phi_\delta^{a,\alpha} + \left(\frac{i\hat p}{m}\right)^{a\dot c}\epsilon^{\alpha\gamma\delta}\phi_\delta^{b,\beta}\}$$

$$\chi^{b\dot c\dot a,\,\beta\gamma\alpha} = \chi^{\underline{b\dot c\dot a},\,\underline{\beta\gamma\alpha}} + \frac{1}{3\sqrt2}\{ e^{\dot c\dot a}\,\epsilon^{\alpha\gamma\delta}\phi_\delta^{b,\beta} \qquad (10)$$

$$+ \left(\frac{i\hat p}{m}\right)^{b\dot a}\epsilon^{\beta\alpha\delta}\chi_\delta^{\dot c,\gamma} + \left(\frac{i\hat p}{m}\right)^{b\dot c}\epsilon^{\beta\gamma\delta}\chi_\delta^{\dot a,\alpha}\},$$

где

$$(\hat p)^{a\dot c} = (\hat p)^{a}_{\dot b}\, e^{\dot b\dot a} = (\hat p)^{\dot c}_{b}\, e^{ba}, \qquad (11)$$

а $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ – полностью антисимметричный тензор третьего ранга. В системе центра масс выражения (10) превращаются в известные выражения, данные в работах /3,4/.

Как было показано в предыдущей работе /13/, инвариантная скалярная билинейная комбинация спиноров $\phi^{\underline{(\alpha a)(\beta b)}(\dot\gamma\dot c)}$ и $\chi^{(\beta b)\underline{(\dot\gamma\dot c)(\dot\alpha\dot a)}}$ равна

$$S = \chi^{+}_{\underline{(\alpha a)(\beta b)}(\dot\gamma\dot c)}\,\phi^{\underline{(\alpha a)(\beta b)}(\dot\gamma\dot c)} + \phi^{+}_{(\beta b)\underline{(\dot\gamma\dot c)(\dot\alpha\dot a)}}\,\chi^{(\beta b)\underline{(\dot\gamma\dot c)(\dot\alpha\dot a)}}. \qquad (12)$$

Введем четырехкомпонентные спиноры Дирака

$$\psi_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} \phi_\beta^{1,\alpha} \\ \phi_\beta^{2,\alpha} \\ \chi_\beta^{\dot 1,\alpha} \\ \chi_\beta^{\dot 2,\alpha} \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

характеризующие состояния октета, и 16-компонентные спин-тензоры Рариты-Швингера

$$\psi_\mu^{\alpha\beta\gamma} = \begin{pmatrix} \phi_\mu^{1,\underline{\alpha\beta\gamma}} \\ \phi_\mu^{2,\underline{\alpha\beta\gamma}} \\ \chi_\mu^{\dot 1,\underline{\beta\gamma\alpha}} \\ \chi_\mu^{\dot 2,\underline{\beta\gamma\alpha}} \end{pmatrix}, \qquad (14)$$

где

$$\phi_\mu^{a,\underline{\alpha\beta\gamma}} = \frac{1}{\sqrt2}(q_\mu)_{b\dot c}\,\phi^{\underline{ab\dot c},\,\underline{\alpha\beta\gamma}}, \quad \chi_\mu^{\dot a,\underline{\beta\gamma\alpha}} = \frac{1}{\sqrt2}(\sigma_\mu)_{b\dot c}\,\chi^{\underline{b\dot c\dot a},\,\underline{\beta\alpha\gamma}}, \qquad (15)$$

$$(\sigma_\mu)_{b\dot c} = e_{bd}\,(\sigma_\mu)^{d}_{\dot c} = e_{\dot c\dot d}\,(q_\mu)^{\dot d}_{b}, \qquad (16)$$

и положим

$$(\psi^+)^\alpha_\beta = (\psi_\alpha^\beta)^+, \qquad (17)$$

$$(\psi_\mu^+)_{\alpha\beta\gamma} = \eta_\mu(\psi_\mu^{\alpha\beta\gamma})^+ \qquad (18)$$

$$\eta_\mu = -1 \text{ для } \mu = 4 \qquad (19)$$

$$1 \text{ для } \mu = 1,2,3.$$

Скалярные билинейные комбинации волновых функций ψ_β^α и $\psi_\mu^{\alpha\beta\gamma}$, инвариатные относительно подгруппы $SU(3)\times L$, равны

$$\bar\psi_\beta^\alpha \; \psi_\alpha^\beta = (\psi^+)_\beta^\alpha \, \gamma_4 \, \psi_\alpha^\beta \tag{20}$$

и

$$\bar\psi_{\mu,\alpha\beta\gamma} \; \psi_\mu^{\alpha\beta\gamma} = (\psi_\mu^+)_{\alpha\beta\gamma} \gamma_4 \, \psi_\mu^{\alpha\beta\gamma}. \tag{21}$$

Рассмотрим состояния с определенным импульсом. Тогда скалярная билинейная комбинация (12), инвариантная относнтельно группы $SL(6)$, выражается через билинейные комбинации (20) и (21) следующим образом

$$\chi^+_{\underline{(\alpha_a)(\beta_b)}(\dot\gamma_{\dot c})} \, \phi^{\underline{(\alpha_a)(\beta_b)}(\dot\gamma_{\dot c})} + \phi^+_{(\beta_b)\underline{(\dot\gamma_{\dot c})(\dot\alpha_{\dot a})}} \, \chi^{(\beta_b)\underline{(\dot\gamma_{\dot c})(\dot\alpha_{\dot a})}} =$$

$$\bar\psi_{\mu,\underline{\alpha\beta\gamma}} \, \psi_\mu^{\underline{\alpha\beta\gamma}} + \bar\psi_\beta^\alpha \;\; \psi_\alpha^\beta . \tag{22}$$

Из уравнений (7) для спиноров $\phi^{\underline{(\alpha_a)(\beta_b)}(\dot\gamma_{\dot c})}$ и $\chi^{(\beta_b)\underline{(\dot\gamma_{\dot c})(\dot\alpha_{\dot a})}}$ и выражений (10) этих спиноров можно получить следующие известные уравнения для спиноров ψ_β^α и спин-тензоров $\psi_\mu^{\alpha\beta\gamma}$.

$$(i p_\nu \gamma_\nu + m)\, \psi_\beta^\alpha = 0 , \tag{23}$$

$$(i p_\nu \gamma_\nu + m)\, \psi_\mu^{\underline{\alpha\beta\gamma}} = 0 , \qquad p_\mu \, \psi_\mu^{\underline{\alpha\beta\gamma}} = \gamma_\mu \, \psi_\mu^{\underline{\alpha\beta\gamma}} = 0 . \tag{24}$$

Обратно, из уравнений (23) и (24) следует система уравнений (7). Таким образом, уравнение (7) полностью эквивалентно уравнению Дирака для октета со спином 1/2 и уравнению Рариты-Швингера для декуплета со спином 3/2.

Рассмотрим, наконец, трансформационные свойства указанных спиноров относительно пространственного отражения P. Как было показано в предыдущей работе /13/, в отражении P пунктирные индексы превращаются в непунктирные и обратно. В частности, $\phi^{\underline{(\alpha_a)(\beta_b)}(\dot\gamma_{\dot c})}$ и $\chi^{(\gamma_c)\underline{(\dot\beta_{\dot b})(\dot\alpha_{\dot a})}}$ переходят друг в друга. Можно показать, что если они преобразуются следующим образом при отражении P :

$$\phi^{\underline{(\alpha_a)(\beta_b)}(\dot\gamma_{\dot c})} \to \eta\, \chi^{(\gamma_c)\underline{(\dot\beta_{\dot b})(\dot\alpha_{\dot a})}}$$

$$\chi^{(\beta_b)\underline{(\dot\gamma_{\dot c})(\dot\alpha_{\dot a})}} \to \eta\, \phi^{\underline{(\alpha_a)(\gamma_c)}(\dot\beta_{\dot b})} , \tag{25}$$

то спиноры ψ_β^α и спин-тензоры $\psi_\mu^{\alpha\beta\gamma}$ преобразуются следующим образом:

$$\psi_\beta^\alpha \to \eta\, \gamma_4 \, \psi_\beta^\alpha , \tag{26}$$

$$\psi_\mu^{\alpha\beta\gamma} \to \eta\, \eta_\mu \, \gamma_4 \, \psi_\mu^{\alpha\beta\gamma} . \tag{27}$$

Таким образом, октет со спином 1/2 и декуплет со спином 3/2, описываемые спинорами $\phi^{\underline{(\alpha_a)(\beta_b)}(\dot\gamma_{\dot c})}$ и $\chi^{(\beta_b)\underline{(\dot\gamma_{\dot c})(\dot\alpha_{\dot a})}}$, обладают одной и той же четностью.

3. Мезонный мультиплет, взаимодействующий с векторными и аксиальными токами

Как было показано в предыдущей работе /13/, мезонный мультиплет, взаимодействующий с векторными и аксиальными токами, характеризуется спинорами второго ранга $\Phi^{(\alpha_a)}_{(\beta_b)}$ и $\Phi^{(\dot\alpha_{\dot a})}_{(\beta_b)}$. Следуя предложенному методу, мы сначала рассмотрим импульсы как компоненты тензоров $(\hat P)^{(\dot\alpha'_{\dot a'})}_{(\alpha_a)}$ и $(\hat P)^{(\alpha'_{a'})}_{(\dot\alpha_{\dot a})}$. Тогда инвариантные волновые уравнения, связывающие данные спиноры $\Phi^{(\alpha_a)}_{(\dot\beta_{\dot b})}$ и $\Phi'^{(\dot\alpha_{\dot a})}_{(\beta_b)}$ с новыми спинорами $\chi^{(\dot\alpha_{\dot a})}_{(\dot\beta_{\dot b})}$, $\chi'^{(\alpha_a)}_{(\beta_b)}$, имеют вид:

$$\begin{aligned} &(i\hat P)^{(\dot\alpha'_{\dot a'})}_{(\alpha_a)} \; \Phi^{(\alpha_a)}_{(\dot\beta_{\dot b})} + m\,\chi^{(\dot\alpha'_{\dot a'})}_{(\dot\beta_{\dot b})} = 0 , \\ &(i\hat P)^{(\alpha'_{a'})}_{(\dot\alpha_{\dot a})} \; \chi^{(\dot\alpha_{\dot a})}_{(\dot\beta_{\dot b})} + m\,\Phi^{(\alpha'_{a'})}_{(\dot\beta_{\dot b})} = 0 , \end{aligned} \tag{28}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} &(i\hat P)^{(\alpha'_{a'})}_{(\dot\alpha_{\dot a})} \; \Phi'^{(\dot\alpha_{\dot a})}_{(\beta_b)} + m\,\chi'^{(\alpha'_{a'})}_{(\beta_b)} = 0 , \\ &(i\hat P)^{(\dot\alpha'_{\dot a'})}_{(\alpha_a)} \; \chi'^{(\alpha_a)}_{(\beta_b)} + m\,\Phi'^{(\dot\alpha'_{\dot a'})}_{(\beta_b)} = 0 . \end{aligned} \tag{29}$$

Если сделать замену (4), то эти уравнения превращаются в уравнения, аналогичные уравнениям (7), инвариантные относительно подгруппы $SU(3)\times L$, но нарушающие симметрию $SL(6)$. Так как спиноры $\chi^{(\dot\alpha_{\dot a})}_{(\dot\beta_{\dot b})}$ и $\chi'^{(\alpha_a)}_{(\beta_b)}$ являются неприводимыми, то они удовлетворяют условию

$$\chi^{(\dot\alpha_{\dot a})}_{(\dot\alpha_{\dot a})} = \chi'^{(\alpha_a)}_{(\alpha_a)} = 0 . \tag{30}$$

Если вместо ковариантных спиноров $\Phi^{(\alpha_a)}_{(\dot\beta_{\dot b})}$ и $\Phi'^{(\dot\alpha_{\dot a})}_{(\beta_b)}$ пользоваться обычными четырехмерными векторами и псевдовекторами в качестве волновых функций, то мы имеем

$$(V_\mu)^\alpha_\beta = \tfrac12\{(\sigma_\mu)^{\dot b}_a\, \Phi^{(\alpha a)}_{(\dot\beta\dot b)} + (\sigma_\mu)^b_{\dot a}\, \Phi'^{(\dot\alpha\dot a)}_{(\beta b)}\},$$

$$(A_\mu)^\alpha_\beta = \tfrac12\{(\sigma_\mu)^{\dot b}_a\, \Phi^{(\alpha a)}_{(\dot\beta\dot b)} - (\sigma_\mu)^b_{\dot a}\, \Phi'^{(\dot\alpha\dot a)}_{(\beta b)}\}. \qquad (31)$$

Из волновых уравнений следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}(V_\mu)^\alpha_\beta = -\frac{m}{2}\left(\chi^{(\dot\alpha\dot a)}_{(\dot\beta\dot a)} + \chi'^{(\alpha a)}_{(\beta a)}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}(A_\mu)^\alpha_\beta = -\frac{m}{2}\left(\chi^{(\dot\alpha\dot a)}_{(\dot\beta\dot a)} - \chi'^{(\alpha a)}_{(\beta a)}\right). \qquad (32)$$

Эти соотношения вместе с условием неприводимости спиноров и $\chi^{(\dot\alpha\dot a)}_{(\dot\beta\dot b)}$ и $\chi'^{(\alpha a)}_{(\beta b)}$ приводят к равенству

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}(V_\mu)^\alpha_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\mu}(A_\mu)^\alpha_\alpha = 0. \qquad (33)$$

Для того, чтобы четырехмерные векторы $(V_\mu)^\alpha_\beta$ и псевдовекторы $(A_\mu)^\alpha_\beta$ описывали частицы с определенными спинами, эти функции должны удовлетворять некоторым дополнительным условиям. Если они характеризуют частицы со спином 1, то мы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}(V_\mu)^\alpha_\beta = \frac{\partial}{\partial x_\mu}(A_\mu)^\alpha_\beta = 0, \qquad (34)$$

и соотношение (33) является лишь частным случаем этого соотношения. Если же $(V_\mu)^\alpha_\beta$ описывают частицы со спином 1, а $(A_\mu)^\alpha_\beta$ –частицы со спином 0, то мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}(V_\mu)^\alpha_\beta = 0, \quad (A_\mu)^\alpha_\beta = \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\phi_p)^\alpha_\beta, \qquad (35)$$

где $(\phi_p)^\alpha_\beta$–псевдоскалярные волновые функции. В этом случае из соотношения (33) следует, что $(\phi_p)^\alpha_\beta$ должны удовлетворять условию

$$(\phi_p)^\alpha_\alpha = 0, \qquad (36)$$

т.е. характеризуют состояния октета псевдоскалярных мезонов.

Теперь образуем векторные и аксиальные токи из компонент данных спиноров, характеризующих рассматриваемой мезонный мультиплет. Для этого образуем прежде всего самосопряженные билинейные комбинации $J^{(\alpha a)}_{(\dot\beta\dot b)}$ и $J'^{(\dot\alpha\dot a)}_{(\beta b)}$, преобразующие как соответствующие спиноры

$$J^{(\alpha a)}_{(\dot\beta\dot b)} = im\{(\chi^+)^{(\alpha a)}_{(\gamma c)}\,\Phi^{(\gamma c)}_{(\dot\beta\dot b)} + (\Phi^+)^{(\alpha a)}_{(\dot\gamma\dot c)}\,\chi^{(\dot\gamma\dot c)}_{(\dot\beta\dot b)}\},$$

$$J'^{(\dot\alpha\dot a)}_{(\beta b)} = im\{(\chi'^+)^{(\dot\alpha\dot a)}_{(\dot\gamma\dot c)}\,\Phi'^{(\dot\gamma\dot c)}_{(\beta b)} + (\Phi'^+)^{(\dot\alpha\dot a)}_{(\gamma c)}\,\chi'^{(\gamma c)}_{(\beta b)}\}. \qquad (37)$$

Здесь для удобства мы ввели численный коэффициент, равный массе частиц. Векторные и аксиальные токи имеют вид:

$$(j^V_\mu)^\alpha_\beta = \tfrac12\{(\sigma_\mu)^{\dot b}_a\, J^{(\alpha a)}_{(\dot\beta\dot b)} + (\sigma_\mu)^b_{\dot a}\, J'^{(\dot\alpha\dot a)}_{(\beta b)}\},$$

$$(j^A_\mu)^\alpha_\beta = \tfrac12\{(\sigma_\mu)^{\dot b}_a\, J^{(\alpha a)}_{(\dot\beta\dot b)} - (\sigma_\mu)^b_{\dot a}\, J'^{(\dot\alpha\dot a)}_{(\beta b)}\}. \qquad (38)$$

Подставим в выражения для $J^{(\alpha a)}_{(\dot\beta\dot b)}$ и $J'^{(\dot\alpha\dot a)}_{(\beta b)}$ вместо спиноров $\chi^{(\dot\alpha\dot a)}_{(\dot\beta\dot b)}$ и $\chi'^{(\alpha a)}_{(\beta b)}$ их выражения через $\Phi^{(\alpha a)}_{(\dot\beta\dot b)}$ и $\Phi'^{(\dot\alpha\dot a)}_{(\beta b)}$, полученные из волновых уравнений. Так как последние уравнения инвариантны лишь относительно подгруппы $SU(3)\times L$, то данные спиноры также будем рассматривать как представления этой подгруппы и, следовательно, не будем различать пунктирные и непунктирные унитарные индексы (например, a и $\dot a$). Мы получим

$$J^{(\alpha a)}_{(\dot\beta\dot b)} = i\left\{(\sigma_\nu)^{\dot d}_c \frac{\partial(\Phi^+)^{(\alpha a)}_{(\gamma\dot d)}}{\partial x_\nu}\,\Phi^{(\gamma c)}_{(\dot\beta\dot b)} - (\Phi^+)^{(\alpha a)}_{(\gamma\dot c)}(\sigma_\nu)^{\dot c}_d \frac{\partial\Phi^{(\gamma d)}_{(\dot\beta\dot b)}}{\partial x_\nu}\right\},$$

$$J'^{(\dot\alpha\dot a)}_{(\beta b)} = i\left\{(\sigma_\nu)^d_c \frac{\partial(\Phi'^+)^{(\dot\alpha\dot a)}_{(\gamma d)}}{\partial x_\nu}\,\Phi'^{(\gamma\dot c)}_{(\beta b)} - (\Phi'^+)^{(\dot\alpha\dot a)}_{(\gamma c)}(\sigma_\nu)^c_{\dot d} \frac{\partial\Phi'^{(\gamma\dot d)}_{(\beta b)}}{\partial x_\nu}\right\}. \qquad (39)$$

Спиноры $\Phi^{(\alpha a)}_{(\beta b)}$, $\Phi'^{(\alpha\dot a)}_{(\beta b)}$ в этих соотношениях выражаются через векторные и псевдовекторные функции $(V_\mu)^\alpha_\beta$ и $(A_\mu)^\alpha_\beta$ следующим образом

$$\Phi^{(\alpha a)}_{(\dot\beta\dot b)} = \tfrac12(\sigma_\mu)^a_{\dot b}\{(V_\mu)^\alpha_\beta + (A_\mu)^\alpha_\beta\},$$

$$\Phi'^{(\alpha\dot a)}_{(\beta b)} = \tfrac12(\sigma_\mu)^{\dot a}_b\{(V_\mu)^\alpha_\beta - (A_\mu)^\alpha_\beta\}. \qquad (40)$$

Из соотношений (38), (39) и (40) мы получим выражение, например, для векторных токов

$$(j^{V}_{\mu})^{\alpha}_{\beta} = i\,(V^{+}_{\nu})^{\alpha}_{\gamma}\Big[\delta_{\mu\nu}\Big(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_{\lambda}} - \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_{\lambda}}\Big) + \delta_{\mu\lambda}\Big(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_{\nu}}\Big) - \delta_{\lambda\nu}\Big(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_{\mu}}\Big)\Big](V_{\lambda})^{\gamma}_{\beta} + [(V_{\nu})^{\alpha}_{\gamma} \to (A_{\nu})^{\alpha}_{\gamma}]. \tag{41}$$

В случае, когда $(V^{\alpha}_{\mu})_{\beta}$ и $(A_{\mu})^{\alpha}_{\beta}$ описывают нонеты векторных и псевдовекторных мезонов, в силу условия (34) мы имеем:

$$(j^{V}_{\mu})^{\alpha}_{\beta} = i\,(V^{+}_{\nu})^{\alpha}_{\gamma}\Big[\delta_{\lambda\nu}\Big(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_{\mu}}\Big) + \delta_{\mu\nu}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_{\lambda}} - \delta_{\mu\lambda}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_{\nu}}\Big](V_{\lambda})^{\gamma}_{\beta} + i\,(A^{+}_{\nu})^{\alpha}_{\gamma}\Big[\delta_{\lambda\nu}\Big(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_{\mu}}\Big) + \delta_{\mu\nu}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_{\lambda}} - \delta_{\mu\lambda}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_{\nu}}\Big](A_{\lambda})^{\gamma}_{\beta}, \tag{42}$$

а в случае, когда $(V_{\mu})^{\alpha}_{\beta}$ и $(A_{\mu})^{\alpha}_{\beta}$ описывают нонет векторных мезонов и октет псевдоскалярных мезонов, соответственно, в силу соотношений (35) мы имеем

$$(j^{V}_{\mu})^{\alpha}_{\beta} = i\,(V^{+}_{\nu})^{\alpha}_{\gamma}\Big[\delta_{\lambda\nu}\Big(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_{\mu}}\Big) + \delta_{\mu\nu}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_{\lambda}} - \delta_{\mu\lambda}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_{\nu}}\Big](V_{\lambda})^{\gamma}_{\beta} + i\,(\phi^{+}_{P})^{\alpha}_{\gamma}\Big(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_{\mu}}\Big)(\phi_{P})^{\gamma}_{\beta}. \tag{43}$$

Эти выражения для векторных токов также можно получить из лагранжиана с унитарной симметрией при изучении инвариантности этого лагранжиана относительно калибровочных преобразований первого типа. Вопрос о структуре векторных и аксиальных токов для 56-плета будет обсужден в следующей работе, посвященной изучению электромагнитных и слабых взаимодействий.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Н.Н.Боголюбову, М.А.Маркову, Я.А.Смородинскому и А.Н.Тавхелидзе за интерес к работе, а также Р.А.Асанову за обсуждения.

Литература

1. F. Gursey and L.A.Radicati, Phys.Rev. Lett., 13, 173 (1964).
2. A.Pais, Phys.Rev.Lett., 13, 175 (1964).
3. M.A.Beg, B.W.Lee and A.Pais. Phys.Rev.Lett., 13, 514 (1964).
4. B.Bakita, Phys.Rev.Lett., 13, 643 (1964).
5. A.Salam, Phys.Lett. 13, 354 (1964).
6. R.Delbourgo, A.Salam and T.Strathdee, Preprint Trieste, 1964.
7. R.Delbourgo, A.Salam and J.Strathdee, Preprint, Trieste,
8. M.A.Beg and A.Pais, Preprint, New York, 1964.
9. K.Bardacki, J.M.Cornwall, P.G.O.Freund and B.W.Lee, Phys.Rev.Lett., 13, 698 (1964).
10. T.Fulton and J.Wess, Phys.Lett., 14, 57 (1965).
11. В.Г.Кадышевский, Р.М.Мурадян, А.Н.Тавхелидзе, И.Т.Тодоров, Препринт ОИЯИ Д-1829, 1965 г.
12. H.Bacry and J.Nuyts, Preprint, CERN, 1964.
13. Нгуен Ван Хьеу, Препринт ОИЯИ Р-1954, 1965 г.
14. W.Rarita and J.Schwinger, Phys.Rev. 60, 61 (1941).

Рукопись поступила в издательский отдел
6 февраля 1965 г.