

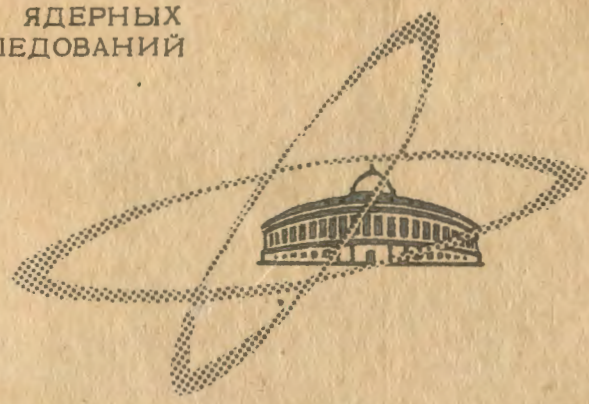
С 345 И
Д-536

15/III - 65 ✓

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P - 1981



В.П. Дмитриевский, В.В. Кольга,
Н.И. Полумордвинова

ПОЛУЧЕНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТОТ
РАДИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ
В РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЦИКЛОТРОНАХ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

1965

P - 1881

В.П. Дмитриевский, В.В. Кольга,
Н.И. Полумордвинова

ПОЛУЧЕНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТОТ
РАДИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ
В РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЦИКЛОТРОНАХ

3009/2 чр.

УДК 621.372.6.01
621.372.6.01
621.372.6.01
621.372.6.01

В в е д е н и е

Проблема высокоэффективного вывода ускоренных частиц из релятивистского циклотрона (РЦ) является одной из основных, так как успешное использование РЦ как физической установки и нормальная эксплуатация ускорителя возможны только при практически полном выводе частиц из камеры и применении внешних мишеней. Известные методы непрерывного вывода ускоренных частиц из циклических ускорителей со стационарным магнитным полем можно разделить на три группы.

К первой группе относятся методы, использующие значительное увеличение радиуса кривизны на конечном радиусе за счет применения электростатического поля. Ускоряющее напряжение должно обеспечить соответствующий прирост энергии, при котором частицы смогут войти внутрь электростатического дефлектора, а поле дефлектора должно обеспечить необходимое для вывода увеличение радиуса кривизны частиц заданной энергии.

Вторая группа объединяет методы, в которых вывод частиц происходит за счет нарушения радиальной устойчивости в спадающем магнитном поле на краю электромагнита ускорителя. При этом необходимо ускорить частицы до радиуса, где показатель поля $n = \frac{R}{H(R)} \frac{dH}{dr} \Big|_R \leq -1$ и частота радиальных колебаний $Q_r = 0$. Однако частота аксиальных колебаний (Q_z) в спадающем магнитном поле резко возрастает, проходя ряд резонансных значений, при которых неизбежны значительные потери ускоренных частиц для ускорителей большого радиуса.

Третья группа методов вывода основана на создании резонансной связи между азимутальной и радиальной степенями свободы ускоряемой частицы на заданном радиусе. При достаточно сильной связи радиальная компонента импульса частицы резко возрастает и достигает величины, при которой возможен выход частицы из области магнитного поля ускорителя. Если при этом будут обеспечены условия отсутствия связи с аксиальной степенью свободы частицы, то эти методы могут быть использованы для создания высокоэффективной системы вывода частиц из ускорителя.

В релятивистском циклотроне на энергию протонов 700 ± 800 Мэв радиальное расстояние между соседними орбитами на конечном радиусе составляет обычно $0,3 \pm 1$ мм. Применение электростатического дефлектора исключено из-за чрезмерно большой требуемой величины напряженности электрического поля и малого радиального разделения ор-

бит. С другой стороны, наличие спиральной структуры магнитного поля в РЦ вызывает появление внутренних нелинейных резонансов при частоте радиальных колебаний $Q_r = \frac{N}{q}$, где N - число спиралей, q - целое число (порядок резонанса). При $N = 8$ нелинейный резонанс 4-го порядка ($Q_r = 2$) соответствует энергии примерно 820 Мэв. Проект релятивистского циклотрона Окряджской национальной лаборатории (США)^{1/2/} предусматривает использование нелинейного резонанса $Q_r = 8/4$ для создания системы вывода с эффективностью порядка 95%, которая получена на электронной модели этого ускорителя.

В проекте реконструкция синхроциклотрона Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ^{1/1/} конечная энергия РЦ составляет 700 Мэв. При этом $Q_r = 1,8$ и непосредственное применение резонансного метода вывода невозможно.

В настоящей работе предлагается метод, при использовании которого частота радиальных колебаний на заданном радиусе может быть увеличена до необходимого значения, например, до двух. При этом частота аксиальных колебаний не изменяется. Следовательно, устраняется жесткая связь частоты радиальных колебаний с величиной энергии на заданном радиусе, существующая в РЦ, и становится возможным применение резонансного метода вывода заряженных частиц, ускоряемых в РЦ, в широком диапазоне конечных энергий.

§ 1. Радиальное движение при введении в структуру поля $1/2 N$ -ой гармоники

Рассмотрим радиальное движение в релятивистском циклотроне, структура магнитного поля которого в медианной плоскости имеет вид

$$H_z(r, \phi) = H(r) \left\{ 1 + \epsilon_1 \sin\left(\frac{r}{\lambda} - N\phi\right) + \epsilon_2 \sin\left(\frac{r}{2\lambda} - \frac{N}{2}\phi + \delta\right) \right\}, \quad (1)$$

где $H(r)$ - среднее магнитное поле, ϵ_1 - амплитуда рабочей гармоники, ϵ_2 - амплитуда дополнительно введенной гармоники, δ - фаза этой гармоники относительно рабочей, $2\pi\lambda$ - радиальный шаг основной структуры магнитного поля. В дальнейшем всюду будем полагать, что N - четное и $\epsilon_2 < \epsilon_1$.

Как видно из (1), фаза введенной $N/2$ -ой гармоники изменяется с радиусом так же, как и фаза основной гармоники, и сдвинута относительно нее на некоторую постоянную величину.

Уравнение движения в медианной плоскости ($z = 0$) при квазистационарном приближении ($p = \text{const}$) и цилиндрической системе координат можно записать в виде

$$r'' + \frac{2r^{12}}{r} - r = - \frac{e}{pc} r^2 \left(1 + \frac{r^{12}}{r^2} \right)^{3/2} \cdot H_z(r, \phi), \quad (2)$$

где p - импульс частицы. Уравнение (2) с магнитным полем (1) имеет частное периодическое решение, описывающее равновесную орбиту. С точностью до $\left(\frac{e}{N}\right)^2$ это решение имеет вид

$$r = R + \frac{\epsilon_1 R}{N^2 - 1 - n} \sin 2\Phi + \frac{4\epsilon_2 R}{N^2 - 4 - 4n} \sin(\Phi + \delta), \quad (3)$$

где $n = \frac{R}{H(R)} \frac{dH(r)}{dr} \Big|_R$ - показатель поля, $\Phi = \frac{R}{2\lambda} - \frac{N}{2}\phi$, $R = \frac{pc}{eH(R)}$.

Для исследования радиальной устойчивости найдем обычным путем^{1/3/} уравнение в вариациях, описывающее в линейном приближении отклонения частицы ρ от равновесной орбиты $R + \bar{\rho}$, определяемой выражением (3). После пренебрежения несущественными для данного исследования членами уравнение в вариациях имеет вид

$$\rho'' + \left\{ 1 + n + \frac{\epsilon_1 R}{\lambda} \cos 2\Phi - \frac{\epsilon_1 R}{\lambda^2} \bar{\rho} \sin 2\Phi - \frac{\epsilon_1 R}{2\lambda^3} \bar{\rho}^2 \cos 2\Phi + \right. \\ \left. + \frac{\epsilon_2 R}{2\lambda} \cos(\Phi + \delta) - \frac{\epsilon_2 R}{4\lambda^2} \bar{\rho} \sin(\Phi + \delta) - \frac{\epsilon_2 R}{16\lambda^3} \bar{\rho}^2 \cos(\Phi + \delta) \right\} \rho = 0. \quad (4)$$

В уравнение (4) подставим равновесную орбиту из (3), получим уравнение свободных радиальных колебаний частицы около замкнутой орбиты

$$\rho'' + \left\{ 1 + n - \frac{\epsilon_1^2 R^2}{2\lambda^2(N^2 - 1 - n)} - \frac{\epsilon_2^2 R^2}{2\lambda^2(N^2 - 4 - 4n)} \left[1 - \frac{15\epsilon_1 R}{4\lambda(N^2 - 4 - 4n)} \cos 2\delta \right] + \right. \\ \left. + \frac{\epsilon_1 R}{\lambda} \cos 2\Phi + \frac{\epsilon_2 R}{2\lambda} \cos(\Phi + \delta) - \frac{17\epsilon_1 \epsilon_2 R^2}{8\lambda^2(N^2 - 4 - 4n)} \cos(\Phi - \delta) \right\} \rho = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) по форме совпадает с уравнением Хилла, однако, в отличие от последнего, коэффициент при высшей гармонике в несколько раз больше коэффициента при гармонике, определяющей период структуры поля. В этом случае обычные формулы для определения характеристического показателя уравнения Хилла оказываются непригодными. Однако можно воспользоваться тем фактом, что нам известно решение уравнения (5) при $\epsilon_2 = 0$. Это решение имеет вид^{1/4/}

$$\rho = D_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{2k} \cos(Q_0 + kN)\phi + D_2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{2k} \sin(Q_0 + kN)\phi, \quad (6)$$

где c_k — коэффициенты, определяемые рекуррентными соотношениями ^{15/}, Q_{r0} — частота радиальных колебаний при $\epsilon_2 = 0$. Полагая $\epsilon_2 \ll \epsilon_1$, будем считать, что введение $N/2$ -ой гармоники приведет в основном к некоторой поправке на частоту радиальных колебаний. Тогда, применяя линейную подстановку

$$\rho = \Psi_1 \eta + \frac{1}{Q_{r0}} \Psi_2 \eta', \quad (7)$$

где $\Psi_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{2k} \cos kN\phi$, $\Psi_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{2k} \sin kN\phi$, можно уравнение (6) преобразовать в уравнение с постоянными коэффициентами и периодической правой частью, пропорциональной ϵ_2 . Можно показать, что с достаточной для практических расчетов точностью уравнение радиальных колебаний можно привести к виду

$$\rho'' + \left\{ Q_{r0}^2 - \frac{\epsilon_2^2 R^2}{2\lambda^2 (N^2 - 4 - 4n)} \left[1 - \frac{15\epsilon_1 R}{4\lambda(N^2 - 4 - 4n)} \cos 2\delta \right] + \frac{\epsilon_2 R}{2\lambda} \cos(\Phi + \delta) - \frac{17\epsilon_1 \epsilon_2 R^2}{8\lambda(N^2 - 4 - 4n)} \cos(\Phi - \delta) \right\} \rho = 0. \quad (8)$$

После простых преобразований уравнение (8) запишется в виде обобщенного уравнения Матье, причем период коэффициентов равен $\frac{4\pi}{N}$

$$\rho'' + [A_r + B_r \cos \Phi + B_{2r} \sin \Phi] \rho = 0, \quad (9)$$

где

$$A_r = Q_{r0}^2 - \frac{\epsilon_2^2 R^2}{2\lambda^2 (N^2 - 4 - 4n)} \left[1 - \frac{15\epsilon_1 R}{4\lambda(N^2 - 4 - 4n)} \cos 2\delta \right],$$

$$B_{1r} = \frac{\epsilon_2 R}{2\lambda} \left[1 - \frac{17\epsilon_1 R}{4\lambda(N^2 - 4 - 4n)} \right] \cos \delta,$$

$$B_{2r} = \frac{\epsilon_2 R}{2\lambda} \left[1 + \frac{17\epsilon_1 R}{4\lambda(N^2 - 4 - 4n)} \right] \sin \delta.$$

Нетрудно заметить, что при $Q_{r0} = 1,8$ и значениях других входящих в (9) величин, соответствующих проектным параметрам РЦ, изображающая точка будет находиться в I-ой области устойчивости уравнения Матье, пересекая при увеличении ϵ_2 линии характеристических показателей $\mu = 0,9 - 1$. Следовательно, "гладкая" аппроксимация в данном случае не применима, и частота периодического решения обобщенного уравнения Матье (9) должна определяться выражением

$$\cos \frac{4\pi}{N} Q_r = \cos \frac{4\pi}{N} \sqrt{A_r} - \frac{4\pi}{N^2} \frac{\sin \frac{4\pi}{N} \sqrt{A_r}}{\sqrt{A_r}} \cdot \frac{B_{1r} + B_{2r}}{1 - \frac{16}{N^2} A_r}, \quad (10)$$

где Q_r — частота радиальных колебаний при наличии $1/2 N$ -ой гармоники с амплитудой ϵ_2 .

Уравнение (9) и формула (10) показывают, что частота радиальных колебаний существенно зависит от фазового сдвига $1/2 N$ -ой гармоники относительно основной гармоники. При $\delta = 0$ коэффициент при периодическом члене уравнения Матье минимален и может равняться нулю, следовательно, Q_{r0} увеличивается незначительно; при $\delta = \frac{\pi}{2}$ этот коэффициент максимален и даже при малой величине ϵ_2 происходит заметное изменение Q_r . Для иллюстрации этого эффекта на рис. 1 изображена зависимость Q_r от δ при $\epsilon_2 = 0,04$ и $0,03$ и значениях остальных величин, соответствующих проектным параметрам РЦ на конечном радиусе $R_k = 325$ см. Приведем эти значения: $N = 8$, $\lambda = 7,7$ см; $n = 2,05$; $\epsilon_1 = 0,273$; $Q_{r0} = 1,8$. В магнитное поле введена 4-ая гармоника. Из рис. 1 видно, что при $\delta = \frac{\pi}{2}$ 4-ая гармоника с амплитудой $\epsilon_2 = 0,04$ вызывает увеличение частоты радиальных колебаний до $Q_r = 2$, то есть появляется возможность в РЦ на энергию 700 Мэв использовать резонансный метод вывода частиц на нелинейном резонансе $Q_r = 8/4$.

На рис. 2 сплошной линией представлена зависимость частоты радиальных колебаний от амплитуды 4-ой гармоники при $\delta = \frac{\pi}{2}$ для РЦ на 700 Мэв. Если нужно, чтобы частота радиальных колебаний достигала резонансного значения при меньших энергиях, то следует просто несколько увеличить амплитуду 4-ой гармоники. Например, если необходимо создать нелинейный резонанс при энергии 600 Мэв, что в проекте РЦ соответствует радиусу $R = 313,5$ см и $\epsilon_1 = 0,256$; $n = 1,7$; $Q_{r0} = 1,86$, то необходимо увеличить амплитуду 4-ой гармоники до $0,073$. Все частицы, достигнув энергии 600 Мэв, резко увеличат амплитуды радиальных колебаний, и определенная часть их попадет внутрь выводного канала. Таким образом, изменяя амплитуду 4-ой гармоники, можно изменять радиус нелинейного резонанса и в некоторых пределах регулировать энергию выведенного пучка. Если фазовый сдвиг гармоник $\delta = \frac{\pi}{2}$ окажется неприемлемым при реализации предлагаемой структуры магнитного поля, то возможно несколько изменить фазовый сдвиг гармоник при соответствующем увеличении амплитуды 4-ой гармоники, чтобы величина Q_r осталась неизменной.

В первом приближении для небольших отклонений от $\delta = \frac{\pi}{2}$ зависимость амплитуды 4-ой гармоники от фазового сдвига при неизменном Q_r можно выразить формулой

$$\epsilon_2 = \frac{\epsilon_{20}}{\sin \delta}, \quad (11)$$

где ϵ_{20} — амплитуда 4-ой гармоники при $\delta = \frac{\pi}{2}$.

На рис. 3 представлена зависимость амплитуды 4-ой гармоники ϵ_2 от δ

при $Q_z = 2$ и проектных параметрах РЦ на 700 Мэв. Видно, что когда максимумы 4-ой и 8-ой гармоник совпадают ($\delta = \frac{\pi}{4}$), то необходимая амплитуда 4-ой гармоники составляет $\approx 0,06$.

§ 2. Аксиальное движение при наличии $1/2 N$ -ой гармоники

Рассмотрим аксиальное движение частиц в релятивистском циклотроне при введении в структуру магнитного поля $1/2 N$ -ой гармоники. Уравнения, описывающие движение частицы около медианной плоскости, в квазистационарном приближении имеют вид

$$\begin{aligned} r'' - \frac{2r'^2}{r} - r &= -\frac{e}{pc} \left[1 + \frac{r'^2}{r^2} + \frac{z'^2}{r^2} \right] \cdot [(r^2 + z'^2)H_z - r'z'H_r - z'r'H_\phi], \\ z'' - \frac{2r'z'}{r} &= \frac{e}{pc} \left[1 + \frac{r'^2}{r^2} + \frac{z'^2}{r^2} \right] \cdot [r^2 + z'^2]H_z - z'r'H_r - r'r'H_\phi. \end{aligned} \quad (12)$$

Компоненты магнитного поля возьмем в виде

$$H_r = -z \cdot \frac{\partial H_z}{\partial r} \Big|_{z=0}, \quad H_\phi = \frac{z}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \Big|_{z=0},$$

где $H_z|_{z=0}$ определяется выражением (1).

Для исследования аксиальной устойчивости в линейном приближении достаточно рассмотреть отклонения в аксиальном направлении от равновесной орбиты, то есть найти уравнение в вариациях таким же образом, как и при рассмотрении радиальной устойчивости. После пренебрежения несущественными для данного исследования членами уравнение в вариациях получим в виде

$$\begin{aligned} z'' + \left\{ -n - \frac{\epsilon_1 R}{\lambda} \cos 2\Phi + \frac{\epsilon_1 R}{\lambda^2} \bar{\rho} \sin 2\Phi + \frac{\epsilon_1 R}{2\lambda^3} \bar{\rho}^2 \cos 2\Phi - \right. \\ \left. - \frac{\epsilon_1 R}{2\lambda} \cos(\Phi + \delta) + \frac{\epsilon_2 R}{4\lambda^2} \bar{\rho} \sin(\Phi + \delta) + \frac{\epsilon_2 R}{16\lambda^3} \bar{\rho}^2 \cos(\Phi + \delta) \right\} z = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

После подстановки в уравнение (13) равновесной орбиты (3) получим уравнение аксиальных колебаний частицы около замкнутой орбиты

$$\begin{aligned} z'' + \left\{ -n + \frac{\epsilon_1^2 R^2}{2\lambda^2 (N^2 - 1 - n)} + \frac{\epsilon_2^2 R^2}{2\lambda^2 (N^2 - 4 - 4n)} \left[1 - \frac{15\epsilon_1 R}{4\lambda (N^2 - 4 - 4n)} \cos 2\delta \right] - \right. \\ \left. - \frac{\epsilon_1 R}{\lambda} \cos 2\Phi - \frac{\epsilon_2 R}{2\lambda} \cos(\Phi + \delta) + \frac{17\epsilon_1 \epsilon_2 R^2}{8\lambda^2 (N^2 - 4 - 4n)} \cos(\Phi - \delta) \right\} z = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

С помощью преобразований, аналогичных использованным при исследовании радиальной устойчивости, уравнение (14) может быть записано в форме обобщенного уравнения Матье, коэффициенты которого изменяются с частотой $N/2$:

$$z'' + [A_n + B_{1n} \cos \Phi + B_{2n} \sin \Phi] z = 0, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} A_n &= Q_{z0}^2 + \frac{\epsilon_2^2 R^2}{2\lambda^2 (N^2 - 4 - 4n)} \left[1 - \frac{15\epsilon_1 R}{4\lambda (N^2 - 4 - 4n)} \cos 2\delta \right], \\ B_{1n} &= -\frac{\epsilon_2 R}{2\lambda} \left[1 - \frac{17\epsilon_1 R}{4\lambda (N^2 - 4 - 4n)} \right] \cos \delta, \\ B_{2n} &= \frac{\epsilon_2 R}{2\lambda} \left[1 + \frac{17\epsilon_1 R}{4\lambda (N^2 - 4 - 4n)} \right] \sin \delta, \end{aligned}$$

Q_{z0} - частота аксиальных колебаний при $\epsilon_2 = 0$. Так как диапазон изменения частоты аксиальных колебаний составляет $0 < Q_z < 0,5$, то изображающая точка уравнения Матье (15) будет находиться между характеристическими показателями $0 < \mu < 0,25$. Следовательно, частота периодического решения уравнения (15) может быть определена при использовании "гладкой" аппроксимации, которая получается при разложении в ряд выражения (10):

$$\begin{aligned} Q_z^2 &= Q_{z0}^2 + \frac{\epsilon_2^2 R^2}{2\lambda^2 (N^2 - 4 - 4n)} \left[1 - \frac{15\epsilon_1 R}{4\lambda (N^2 - 4 - 4n)} \cos 2\delta \right] + \\ &+ \frac{\epsilon_2^2 R^2}{2\lambda^2 N^2} \left[1 - \frac{17\epsilon_1 R}{4\lambda (N^2 - 4 - 4n)} \right]^2 \cos^2 \delta + \frac{\epsilon_2^2 R^2}{2\lambda^2 N^2} \left[1 + \frac{17\epsilon_1 R}{4\lambda (N^2 - 4 - 4n)} \right]^2 \sin^2 \delta. \end{aligned} \quad (16)$$

Из выражения (16) видно, что введенная в структуру магнитного поля $1/2 N$ -ая гармоника вызывает дополнительную аксиальную фокусировку, величина которой существенно зависит от фазового сдвига δ . Рассмотрим этот эффект на примере РЦ на 700 Мэв, параметры которого были приведены ранее. В таблице 1 приведены частоты аксиальных колебаний в зависимости от фазового сдвига δ при $Q_{z0} = 0,3$ и $\epsilon_2 = 0,04$.

Т а б л и ц а 1

δ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
Q_z	0,31	0,40	0,47

Таблица 1 показывает, что фазовые сдвиги, соответствующие максимальному изменению радиальной и аксиальной частот свободных колебаний, совпадают. Поэтому появляется возможность одновременно с введением $1/2 N$ -ой гармоники, служащей для увеличения частоты радиальных колебаний, несколько уменьшить амплитуду рабочей гармоники для сохранения неизменной частоты аксиальных колебаний. Частота Q_r при этом уменьшении практически не изменится, так как рабочая гармоника очень слабо влияет на частоту радиальных колебаний. Таким образом, изменением амплитуд N -ой и $1/2 N$ -ой гармоник в структуре поля можно независимо регулировать частоты аксиальных и радиальных колебаний. Эта возможность может иметь самостоятельное значение, например, для регулировки частот свободных колебаний в фазотроне со спиральной структурой магнитного поля. В релятивистском циклотроне на 700 Мэв возможность некоторого уменьшения N -ой гармоники в области конечного радиуса может быть использована для увеличения зазора между спиральными шиммами, формирующими рабочую гармонику. Полагая, что частота аксиальных колебаний остается неизменной, можно из выражения (16) получить приближенную зависимость амплитуды $1/2 N$ -ой гармоники от величины рабочей гармоники. Для фазового сдвига $\delta = \frac{\pi}{2}$ эта зависимость получится в виде

$$\epsilon_2 = \frac{\sqrt{2} N \lambda}{R} \left(n + Q_z^2 - \frac{\epsilon_1^2 R^2}{N^2 \lambda^2} \right)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{15 \epsilon_1 R}{4 \lambda (N^2 - 4 - 4n)} + \left[1 + \frac{17 \epsilon_1 R}{4 \lambda (N^2 - 4 - 4n)} \right]^{2-1/2} \right\}.$$

Для РЦ на 700 Мэв при $Q_z = 0,3$ зависимость ϵ_2 от ϵ_1 , рассчитанная по формуле (17), приведена в таблице 2.

Т а б л и ц а 2

ϵ_1	0,273	0,26	0,25
ϵ_2	0	0,045	0,061

Однако для аксиального движения результаты, полученные с помощью выражений (16), (17), являются приближенными. Результаты исследования аксиального движения на электронно-вычислительной машине приведены ниже.

§ 3. Расчеты на электронно-вычислительной машине

При проведении данного аналитического исследования приходилось делать определенные допущения и приближения, поэтому количественные результаты были уточнены непосредственным интегрированием полной системы уравнений движения частицы (12)

при заданном распределении поля в медианной плоскости (1). Компоненты магнитного поля вне медианной плоскости находились из разложения компоненты H_z в ряд по четным степеням x и уравнений поля $\text{div } \vec{H} = 0$, $\text{rot } \vec{H} = 0$. Интегрирование проводилось методом Рунге-Кутты на электронно-вычислительной машине Вычислительного центра ОИЯИ. Шаг интегрирования выбирался таким образом, чтобы обеспечить 4 ÷ 5 верных значащих цифр. Вначале были найдены частоты радиальных колебаний при движении частицы в медианной плоскости в зависимости от величины амплитуды 4-ой гармоники. Значения необходимых параметров соответствовали конечному радиусу РЦ на 700 Мэв. Фазовый сдвиг был взят равным $\delta = \frac{\pi}{2}$. На рис. 2 крестиками отмечены значения частот, полученных при этом расчете. Была исследована зависимость частоты радиальных колебаний от амплитуды колебаний (a) в нерезонансной зоне. Найдено, что при $a \leq 3$ см, частота Q_r практически не зависит от амплитуды. Наблюдалось действие резонанса $Q_r = 8/4$ при соответствующем увеличении частоты радиальных колебаний за счет введения 4-ой гармоники. На рис. 4 в качестве примера показаны радиальные колебания на конечном радиусе РЦ на 700 Мэв. Амплитуда 4-ой гармоники составляет $\epsilon_2 = 0,032$; $\delta = \frac{\pi}{2}$. Это значение ϵ_2 уже достаточно для попадания частицы в полосу нелинейного резонанса. Далее был проведен расчет аксиального движения при наличии 4-ой гармоники в структуре поля. На рис. 5 приведены значения частот аксиальных колебаний в зависимости от амплитуды рабочей гармоники при отсутствии 4-ой гармоники (кривая 1) и при наличии 4-ой гармоники с амплитудой $\epsilon_2 = 0,042$ и фазовым сдвигом $\delta = \frac{\pi}{2}$ (кривая 2). Из рис. 5 видно, что амплитуду основной гармоники можно уменьшить при введении 4-ой гармоники примерно на 0,025 тл, что соответствует увеличению зазора между спиральными шиммами на конечном радиусе примерно на 8 ÷ 10 мм.

Таким образом, прямые численные расчеты в основном подтверждают результаты аналитического исследования. В дальнейшем будут проводиться численные расчеты на электронно-вычислительной машине динамического режима, когда импульс частицы непрерывно увеличивается и частота радиальных колебаний, при наличии 4-ой гармоники, постепенно приближается в процессе ускорения к полосе нелинейного резонанса, где произойдет раскачка радиальных колебаний. Будет также исследоваться влияние дополнительной 1-ой гармоники в структуре поля с амплитудой 0,01 - 0,015 для выяснения возможности выделения одного направления, по которому будет идти развитие радиальной неустойчивости.

Эксперименты, выполненные на электронной модели релятивистского циклотрона в Окридже (циклотрон $MC^2/2$), показывают, что при реализации резонансного метода коэффициент вывода достигает значения 0,95.

Изложенный метод является одним из методов вывода пучка, которые предусматриваются при проектировании релятивистского протонного циклотрона на энергию 700 Мэв.

Л и т е р а т у р а

1. А.А. Глазов, Ю.Н. Денисов, В.П. Желепов и др. Труды международной конференции по ускорителям. М., Атомиздат, 1964, стр. 547.
2. R.S.Livingston, J.A.Martin.
Труды международной конференции по ускорителям. М., Атомиздат, 1964, стр. 561.
3. И.Г. Малкин. Теория устойчивости движения. М., Гостехиздат, 1962.
4. Д.П. Василевская и др. Атомная энергия, 8, 189 (1960).
5. Н.В. Мак-Лахлан. Теория и применения функций Матье. М., ИЛ, 1953.
6. В.П. Дмитриевский, В.В. Кольга, Н.И. Полумордвинова. Труды международной конференции по ускорителям. М., Атомиздат, 1964, стр. 833.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 февраля 1965 г.

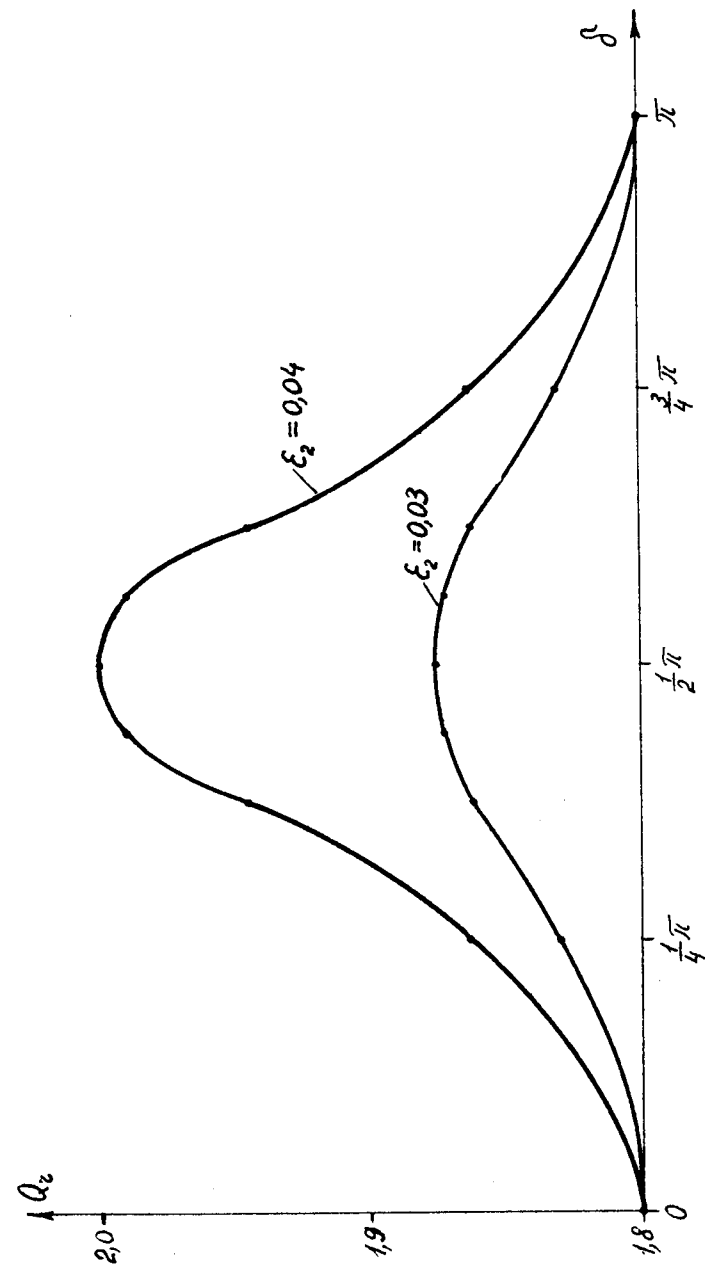


Рис. 1.

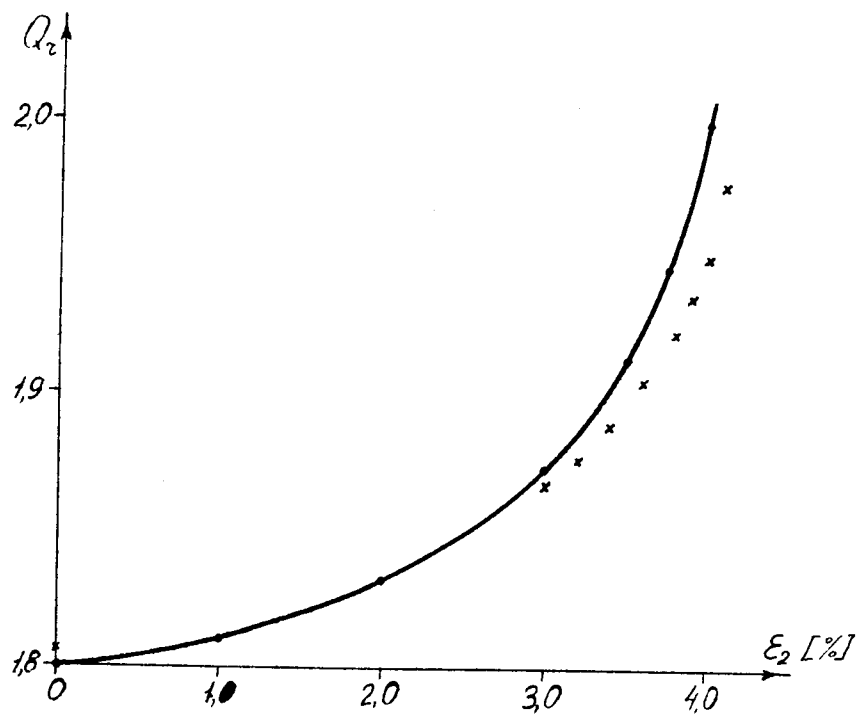


Рис. 2.

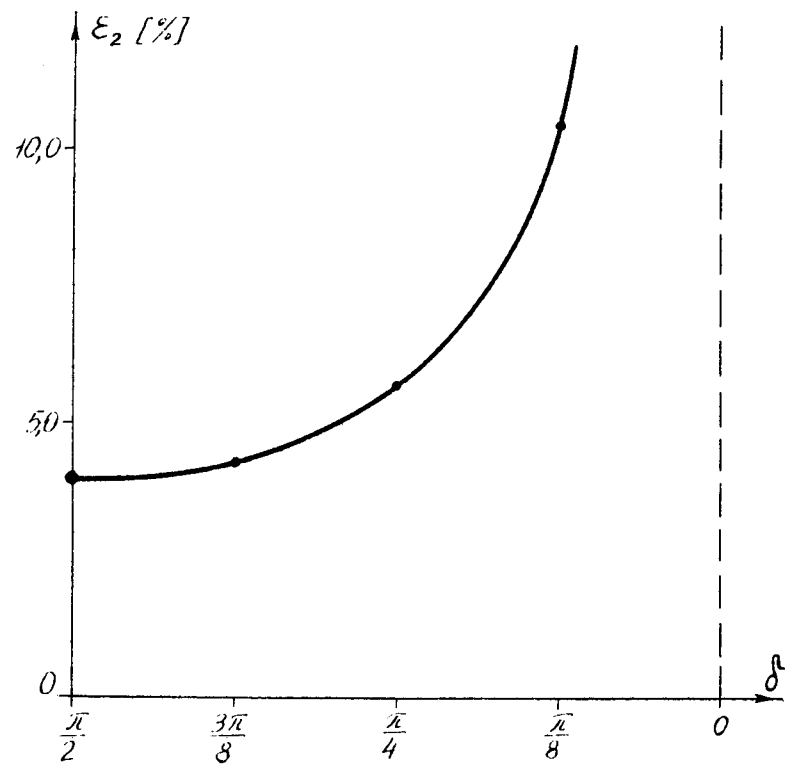


Рис. 3.

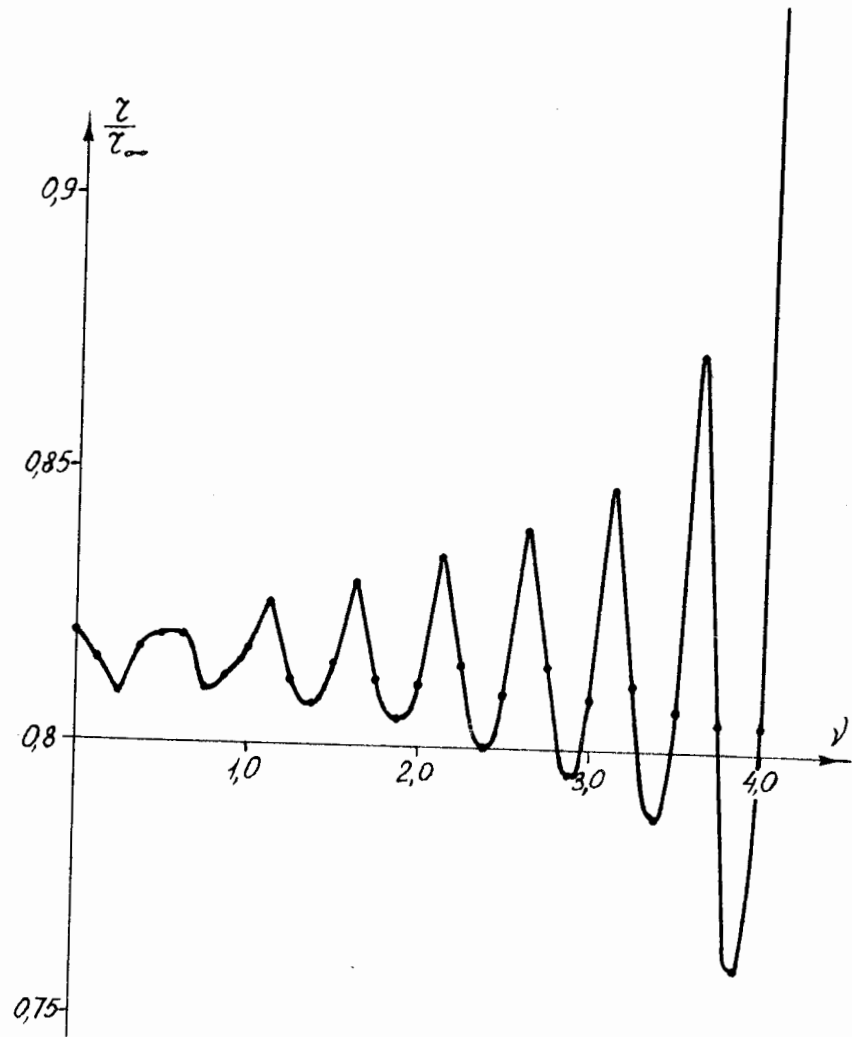


Рис. 4.

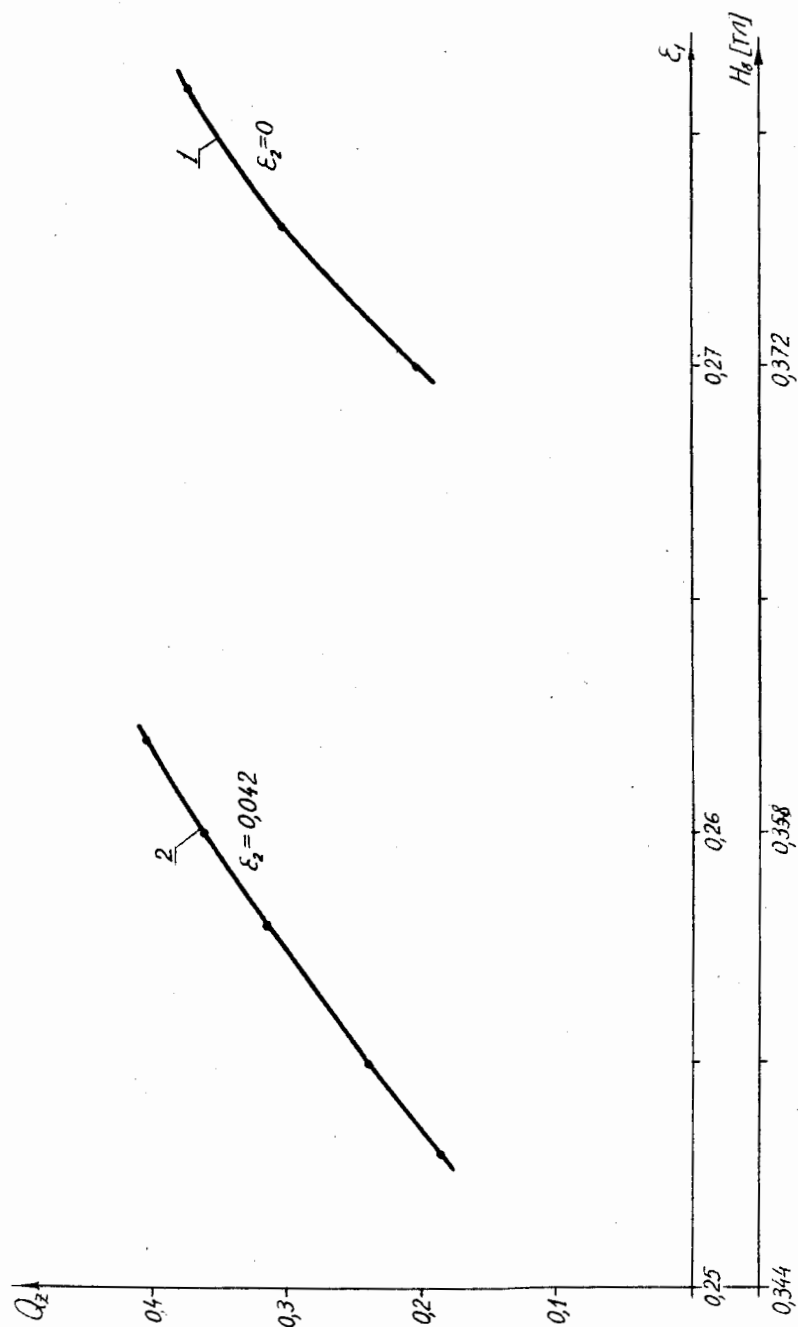


Рис. 5.