15/III-65

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 1965

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.А. Мещеряков

МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА УРАВНЕНИЙ ЧУ-ЛОУ

1965

Р - 1965

В.А. Мещеряков

МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА УРАВНЕНИЙ ЧУ-ЛОУ

В в е д е н и е

Известно, что задача о рассеянии мезонов на фиксированном центре в двухчастичном приближении в условии унитарности описывается уравнениями Чу–Лоу[1], которые имеют вид:

$$h_i(\omega) = \frac{\lambda_i}{\omega} + \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \left(\frac{\operatorname{Im} h_i(\omega')}{\omega' - \omega} + \frac{A_{ij}\operatorname{Im} h_j(\omega')}{\omega' + \omega}\right) d\omega'. \qquad (1)$$

Здесь $h_i(\omega) = \frac{e^{i\delta_i(\omega)}\sin\delta_i(\omega)}{q^{2\ell+1}u^2(q^2)}$, ω – энергия мезона и $u(q^2)$ –фурье–образ функции источника, A_{ij}–матрица перекрестной симметрии. Уравнения (1) можно рассматривать как статический предел строго доказанных дисперсионных соотношений для $\pi - N$ рассеяния[3]. Уравнения для парциальных волн с различными ℓ расщепляются[4] и отличаются друг от друга видом матрицы перекрестной симметрии A_{ij} и числами λ_i, ℓ. К уравнениям типа (1) приводится также задача о $\pi-\pi$ рассеянии[5]. Сформулируем общие для всех этих примеров свойства функций $h_i(\omega)$ и матриц A_{ij}.

Постановка задачи

Перечислим сперва основные свойства матрицы перекрестной симметрии A_{ij}, которые следуют из ее определения[6]:

а) $A^2 = E$ или $A = \sqrt{E}$ (E –единичная матрица),

б) $\sum_j A_{ij} = 1$,

в) $\sum c_i A_{ij} = c_j$, где числа c_i суть размерности представления со значком i. Условия а)–в) позволяют строить матрицы перекрестной симметрии. Так, в случае двухрядной матрицы, соответствующей сложению моментов ℓ, 1/2, они приводят к выражению

$$A = \frac{1}{2\ell+1}\begin{pmatrix} -1, & 2\ell+2 \\ 2\ell & +1 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Из условия а) следует, что собственные значения матрицы A равны ± 1. Условие б) означает, что S -матрица без взаимодействия удовлетворяет требованию перекрестной симметрии. Из него также видно, что матрица перекрестной симметрии A всегда имеет хотя бы одно собственное значение $+1$, которому соответствует собственный вектор со всеми компонентами, равными 1. Пусть вообще ψ_n будет таким, что

$$A\psi_n = (-1)^n \psi_n \ . \qquad (3)$$

Аналитические свойства $h_i(\omega)$ удобней формулировать на языке матричных элементов S -матрицы - функций $S_i(\omega)$. Будем искать функции $S_i(\omega)$, удовлетворяющие следующим требованиям:

1) $S_i(\omega)$ -мероморфные аналитические функции в комплексной плоскости ω с разрезами $(-\infty, -1], [+1, +\infty)$.

2) $S_i^*(\omega) = S_i(\omega^*)$.

3) $|S_i(\omega)|^2 = 1$ при $\omega > 1$, $\lim\limits_{\epsilon \to 0} S_i(\omega + i\epsilon) =$ физическая амплитуда и $\sqrt{(\omega + i0)^2 - 1} > 0$.

4) $S_i(-\omega) = A_{ij} S_j(\omega)$.

Из условия унитарности 3) следует/7/, что точка ветвления $+1$ имеет корневой характер $(\sqrt{\omega - 1})$, тогда из условия перекрестной симметрии 4) вытекает, что точка ветвления -1 также имеет корневой характер $\sqrt{\omega + 1}$. В работе/8/ было показано, что условия 1)-4) приводят к тому, что Риманова поверхность функций $S_i(\omega)$ бесконечнолистна. Это утверждение справедливо для нетривиальных матриц $(A \neq E)$ перекрестной симметрии. Ряд решаемых моделей/6,8-10/ служит хорошей иллюстрацией его правильности. Для реализации этого факта произведем конформное преобразование всей римановой поверхности ω на плоскость w с помощью функции

$$w = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc Sin} \omega \ .$$

Физический лист перейдет в полосу $-½ \le \operatorname{Re} w \le +½$, разрез $\omega > +1$ изобразится линией $\operatorname{Re} w = ½$, на которой

$$w + w^* = 1 \ . \qquad (5)$$

Условие (2) означает, что $S_i(w)$ -действительные функции на линии $\operatorname{Im} w = 0$ плоскости w. Поэтому $S_i(w)$ ищем в виде:

$$S_i(w) = \prod_{n=1}^{N_i} \frac{w - a_n^{(i)}}{hw - (1 - a_n^{(i)})} \cdot \frac{w - (2 - a_n^{(i)})}{w + (1 - a_n^{(i)})} \ ,$$

или

$$a_n^{(i)*} = a_n^{(i)} \ , \qquad (6)$$

$$S_i(w) = \prod_{n=1}^{N_i} \frac{w - a_n^{(i)}}{w - (1 - a_n^{(i)})} \cdot \frac{w + (1 - a_n^{(i)})}{w + (1 - a_n^{(i)})} \ .$$

Такой специальный выбор вида функций $S_i(w)$ удобен. В самом деле, из а)-в) видно, что множество W_i^2, состоящее из квадратов значений нулей знаменателей $S_i(w)$, не зависит от номера i. Поэтому все знаменатели функций $S_i(w)$ в (6) выражаются через одну четную функцию $\phi(w)$.

$$\phi(w) = \phi(-w) \ . \qquad (7)$$

Кроме того, функции $S_i(w)$ в виде (6) удовлетворяют условию унитарности 3). Для того, чтобы $S_i(w)$ удовлетворяли условию перекрестной симметрии 4) необходимо и достаточно, чтобы числители функций $S_i(w)$ имели вид:

$$S_i(w) = \sum_{n=1}^{N} w^n (\psi_n)_i c_n \ , \qquad (8)$$

где N -общее для всех S_i, а c_n -действительные числа. Тогда из уравнений (6), (8) и условия унитарности 3) следует, что

$$\phi(w) \cdot \phi(1-w) = \Big[\sum_{n=1}^{N} w^n (\psi_n)_i c_n\Big]\Big[\sum_{n=1}^{N} (1-w)^n (\psi_n)_i c_n\Big] \qquad (9)$$

независимо от индекса i. Рассматривая уравнения (7) и (9) совместно, можно находить функции $S_i(w)$ в виде (6).

Частные примеры

Для матрицы (2) функции $S_i(w)$ имеют вид

$$S(w) = \begin{pmatrix} \dfrac{w + \beta(w) - (\ell + 1)}{w + \beta(w) + \ell} \\ 1 \end{pmatrix} g(w) \ , \qquad (10)$$

где

$$g(w) = \prod_{n=1}^{\ell} \frac{w + \beta(w) - ½ + (-1)^{n-1}[½ - (\ell - n)]}{w + \beta(w) - ½ - (-1)^{n-1}[½ - (\ell - n)]}\, b(w) \ .$$

Здесь $\beta(w)$ -произвольная мероморфная функция, удовлетворяющая условиям

$$\beta^*(w) = \beta(w^*), \quad \beta(w) = -\beta(-w); \quad \beta(w) = \beta(w+1),$$

а $b(w)$ – функция Бляшке со специальным расположением особенностей, которое вытекает из 2) и 3)[6].

Матрица перекрестной симметрии A для рассеяния частицы с моментом 1 на источнике с моментом 1 имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & -1 & 5/3 \\ -1/3 & 1/2 & 5/6 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix} . \qquad (11)$$

Соответствующий столбец функций $S_i(w)$ записывается так:

$$S(w) = \begin{pmatrix} \dfrac{w+\beta(w)-5/2}{w+\beta(w)+3/2} \\ \dfrac{w+\beta(w)+1/2}{w+\beta(w)-3/2} \cdot \dfrac{w+\beta(w)-5/2}{w+\beta(w)+3/2} \\ \dfrac{w+\beta(w)+1/2}{w+\beta(w)-3/2} \end{pmatrix} b(w) . \qquad (12)$$

Здесь $\beta(w)$ и $b(w)$ имеют свойства, описанные в формуле (10). Уравнения (4)-(9) позволяют по матрице перекрестной симметрии A, обладающей свойствами а)–в) находить функции $S_i(w)$. Они зависят от одной произвольной мероморфной функции $\beta(w)$ и функции $b(w)$. Функция $b(w)$ описывает известный произвол решения дисперсионных соотношений (1), который был установлен в работе[11]. Произвол, связанный с функцией $\beta(w)$, имеет совершенно другую структуру. Впервые он был установлен в[8]. Расположение полюсов $S(w)$ для формул (10) определяется одним уравнением

$$w + \beta(w) = 0.$$

Даже в простейшем случае ($\beta(w) = A \sin 2\pi w$) число нулей этого уравнения бесконечно[12]. Однако их положения зависят лишь от одного параметра A. Произвол в выборе $\beta(w)$ и $b(w)$ позволяет обеспечить пороговое поведение $S_i(w)$.

Автор благодарен Д.В. Ширкову и А.В. Ефремову за интерес к работе и полезные дискуссии.

Литература

1. G.Chew, F.Low. Phys. Rev., 101, 1570 (1956); G.C.Wick. Rev. of Mod. Phys., 27, 339 (1955).
2. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. ГИТТЛ, Москва, 1957;
   Н.Н. Боголюбов, Б.В. Медведев, М.К. Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений. ГИФМЛ, Москва, 1958.
3. G.Chew, M.Goldberger, F.Low, Y.Nambu. Phys. Rev., 106, 1337 (1957).
4. S.F.Edwards, P.Matthews. Phil. Mag, 2, 839 (1957).
5. A.V.Efremov, V.A.Mesheryakov, D.V.Shirkov and Hun Yuan Tzu. Proc of the Rochester Conf., p.278;
   Д.В. Ширков. Международная зимняя школа теоретической физики при Объединенном институте ядерных исследований, т. 2, стр. 117 (1964);
   V.V.Serebryakov, D.V.Shirkov. Dispersion theory of Low Energy Scattering. Препринт ТФ-12, Новосибирск (1964).
6. В.А. Мещеряков. Общий вид решения уравнений Чу–Лоу и сильная зависимость S-фаз π–N рассеяния от изотопического спина. Препринт ОИЯИ, Р-1964, Дубна, 1965.
7. R.Oehme. Phys. Rev., 121, 1810 (1961); W.Zimmermann. Nuovo Cim., 21, 249 (1961); J.Gunson, J.G.Taylor. Phys. Rev., 119, 1121 (1960).
8. G.Wanders. Nuovo Cim., 23, 817 (1962).
9. J.Rothleitner. Z.Physik, 117, 277 (1964).
10. A.W.Martin, W.D.McGlinn. Phys. Rev., 136, 1515B (1964).
11. L.Castillejo, R.Dalitz, E.Dayson. Phys. Rev., 101, 453 (1956).
12. А.И. Маркушевич. Теория аналитических функций. ГИТТЛ, Москва–Ленинград, 1950.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 января 1965 г.