ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 1964

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.А. Мещеряков

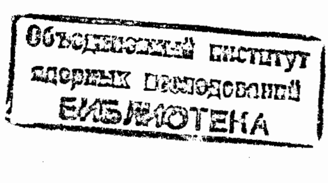
ОБЩИЙ ВИД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЧУ-ЛОУ И ЗАВИСИМОСТЬ S–ФАЗ π-N РАССЕЯНИЯ ОТ ИЗОТОПИЧЕСКОГО СПИНА

1965

Р - 1964

В.А. Мещеряков

ОБЩИЙ ВИД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЧУ-ЛОУ И ЗАВИСИМОСТЬ S-ФАЗ π-N РАССЕЯНИЯ ОТ ИЗОТОПИЧЕСКОГО СПИНА



В в е д е н и е

Рассмотрим ряд моделей взаимодействия мезонов с фиксированным источником (нуклоном):

а) взаимодействие нейтральных скалярных мезонов с источником

$$H_{int} = \sqrt{4\pi}\ g \int V(\vec r)\,\phi(\vec r)\,d\vec r \ ;$$

б) взаимодействие заряженных скалярных мезонов с источником

$$H_{int} = \sqrt{4\pi}\ g \int V(\vec r)(\tau_1\,\phi_2 + \tau_2\,\phi_1)\,d\vec r \ ;$$

в) взаимодействие нейтральных псевдоскалярных мезонов с источником

$$H_{int} = \sqrt{4\pi}\ \frac{g}{\mu} \int V(\vec r)(\vec\sigma\,\vec\nabla)\,\phi(\vec r)\,d\vec r \ ;$$

г) симметричное взаимодействие заряженных скалярных мезонов с источником

$$H_{int} = \sqrt{4\pi}\ g \int V(\vec r)\,\tau_i\ \phi_i(r)\,dr \ ;$$

д) симметричное взаимодействие заряженных псевдоскалярных мезонов с нуклоном (взаимодействие Чу-Лоу)

$$H_{int} = \sqrt{4\pi}\ \frac{g}{\mu} \int V(\vec r)(\vec\sigma\,\vec\nabla)\tau_i\ \phi_i(\vec r)\,dr \ .$$

В перечисленных моделях мезоны взаимодействуют с источником в состояниях с $\ell = 0,1$. В двухчастичном приближении задача рассеяния во всех этих случаях приводится к уравнениям Лоу [1]

$$h_l(\omega) = \frac{\lambda_l}{\omega} + \frac{1}{\pi}\int_{\mu}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{Im} h_l(\omega')}{\omega'-\omega-i\epsilon} + \frac{A_{lj}\operatorname{Im} h_j(\omega')}{\omega'+\omega}\,d\omega'\right), \tag{1}$$

где $\omega = \sqrt{q^2+1}$ – энергия мезона, $h_l(\omega) = \dfrac{e^{i\delta_l}\ \sin\delta_l}{q^{2\ell+1}\ U^2(q^2)}$, $U(q^2)$ – фурье-образ функции источника $V(\vec r)$. Известно, что уравнения Лоу являются приближенными (не учитываются неупругие процессы, например, $\pi + N \to 2\pi + N$ и т.п.). Однако даже эти уравнения не решены для гамильтониана взаимодействия Чу-Лоу.

Уравнения Лоу не обязательно связывать с каким-либо гамильтонианом взаимодействия. Их можно получать как статические пределы строго доказанных релятивистских дисперсионных соотношений [2]. Так, в работе ЧГЛН [3] было показано, как из дисперсионных соотношений для $\pi - N$ рассеяния при фиксированной передаче импульса следуют уравнения Лоу для взаимодействия (д). Кроме них, авторы получают аналогичное уравнение и для S-волн $\pi - N$ рассеяния

$$h_1(\omega) = \frac{1}{3}(1+2\omega)\,a_1 + \frac{2}{3}(1-\omega)\,a_3 + \frac{q^2}{\pi}\int^{\infty}\left\{\frac{\operatorname{Im}\ h_1(\omega')}{\omega'-\omega} + \frac{-\operatorname{Im} h_1 + 4\operatorname{Im} h_3}{3(\omega'+\omega)}\right\}d\omega' \ , \tag{2}$$

$$h_3(\omega) = \frac{1}{3}(2+\omega)a_3 + \frac{1}{3}(1-\omega)a_1 + \frac{q^2}{\pi}\int^{\infty}\left\{\frac{\mathrm{Im}\ h_3(\omega')}{\omega'-\omega} + \frac{2\,\mathrm{Im}\,h_1+\mathrm{Im}\,h_3}{3(\omega'+\omega)}\right\}d\omega',$$

которые несколько раньше были получены Оме [4]. Уравнения для высших D, F волн π-N рассеяния также могут быть получены методом работы ЧГЛН [3]. К такому же виду приводится уравнение для $\pi-\pi$ рассеяния [5]. Перечисленные примеры различаются по числу функций $h_i(\omega)$, виду матриц перекрестной симметрии A_{ij}. Для моделей а)-г) решения известны [6,7]. Наиболее полно свойства решений исследованы для модели а) в работе [6], где подробно проанализирована неоднозначность решений. Ниже будет дано решение модельных примеров а)-д), а также уравнений для D F... парциальных волн π-N рассеяния единым подходом, использующим конформные отображения.

Формулировка задачи

Уравнения (1) определяют аналитические функции $h_i(\omega)$ со следующими свойствами:

1) $h_i(\omega)$ аналитична в комплексной плоскости ω с разрезами вдоль действительной оси на отрезках $(-\infty,-1]$, $[+1,\infty)$;

2) $h_i^*(\omega) = h_i(\omega^*)$;

3) $\mathrm{Im}\, h_i(\omega+io) = q^{2\ell+1}u^2(q^2)\,|h_i(\omega+io)|^2$ –условие унитарности;

4) $h_i(-\omega) = A_{ij}h_j(\omega)$ – условие перекрестной симметрии;

5) $h_i(\omega)$ имеет в нуле полюс первого порядка, $\mathrm{Res}\, h_i(\omega) = \lambda_i$;

6) $h_i(\omega) \to 0$ для $|\omega| \to \infty$ и $\mathrm{Im}\,\omega \neq 0$.

Используя теорему Коши и свойства 1) - 6), можно придти к уравнениям (1). Если говорить об уравнениях (2), то функции $h_i(\omega)$ удовлетворяют свойствам 1)-4), но не имеют полюсов в нуле, и $h_i(\omega)$ не стремится к нулю при $|\omega|\to\infty$ и $\mathrm{Im}\,\omega \neq 0$. Аналогичное замечание можно сделать и относительно уравнений для $\pi-\pi$ рассеяния [5]. Поэтому общими для всех упомянутых выше моделей являются свойства 1)-4), которые будут считаться основными. Таким образом, ниже ищутся аналитические функции, удовлетворяющие условиям 1)-4). Остановимся подробнее на условии 4). Матрица перекрестной симметрии A обладает тем свойством, что

$$A^2 = E, \tag{3}$$

т.е. дважды примененная операция перекрестной симметрии приводит к исходной функции. Отсюда следует, что собственные значения этой матрицы λ равны ± 1. Другая форма записи уравнения (3) очевидна:

$$A = \sqrt{E}. \tag{4}$$

Кроме того, матрица A удовлетворяет еще двум уравнениям, а именно:

$$\sum_j A_{ij} = 1, \tag{5}$$

$$\sum_i c_i A_{ij} = c_j, \tag{6}$$

где c_i – размерность представления с индексом i. Поясним смысл условия (5), которое означает, что S –матрица при выключенном взаимодействии удовлетворяет условию перекрестной симметрии.

Равенства (3)-(6) следуют из определения матрицы A_{ij}. Пусть P_i–проекционные операторы процесса $a+b \to a'+b'$ на состояния с квантовыми числами i. Тогда по определению

$$P_i \cdot P_j = 0, \quad i \neq j, \quad P_i^2 = P_i \quad \text{и} \quad \sum_i P_i = 1. \tag{7}$$

Матрица A_{ij} определяется равенством

$$(P_i)_{rs} = A^T_{ii'}(P_{i'})_{sr}. \tag{8}$$

Применяя дважды преобразование (8) и используя (7), легко получить, что $(A^T)^2 = E$ или $A^2 = E$.

Суммируя равенство (8) по всем i или беря от него шпур, можно получить соответственно (5) и (6).

Перейдем от функций $h_i(\omega)$ (амплитуд рассеяния) к матричным элементам S –матрицы

$$S_i(\omega) = e^{2i\delta_i(\omega)} = 1 + 2iq^{2\ell+1}u^2(q^2)h_i(\omega+io). \tag{9}$$

Выберем ту ветвь $q = \sqrt{\omega^2-1}$, для которой $\mathrm{Im}\, q > 0$, что фиксирует физический лист. Из (9) и (5) тогда следует, что условие 4) выполняется для функции $S_i(\omega)$. Переход от функции $h_i(\omega)$ к $S_i(\omega)$, конечно, скажется на свойствах 5) и 6). За счет функции источника $u^2(q)$ добавятся новые особенности и изменится поведение на бесконечности. Однако этот переход не скажется на основных свойствах, которые теперь имеют вид:

1) $S_i(\omega)$– аналитические функции в комплексной плотности ω с разрезами вдоль действительной оси на отрезках $(-\infty, -1]$, $[+1, +\infty)$,

2) $S_i^*(\omega) = S_i(\omega^*)$,

3) $|S_i(\omega+io)|^2 = 1$ для $\omega > 1$,

4) $S_i(-\omega) = A_{ij}S_j(\omega)$.

Решение частных случаев

Вид функций, обладающих основными свойствами, зависит от числа их ($i=1,2..N$), а при данном N определяется матрицей A.

1. Простейшим является случай с $N=1$ и $A=1$. Он был подробно разобран в работе [6]. Укажем более простой путь решения в этом случае[x)].

Произведем конформное преобразование плоскости ω в плоскость η так, чтобы разрезы $(-\infty,-1][+1,+\infty)$ перешли в единичную окружность, а весь физический лист (т.е. лист с $\mathrm{Im}\ q>0$) во внутренность этой окружности. Чтобы сделать задачу более определенной, наложим на $\eta(\omega)$ условия $\eta(0)=0$ и $\eta(+1)=+1$. Тогда

$$\eta=\frac{1+iq}{\omega}. \tag{10}$$

Очевидно, сама функция $\eta(\omega)$ удовлетворяет основным условиям. Однако она не является наиболее общей функцией, удовлетворяющей условию 3). Такой функцией является функция Бляшке, которая для единичной окружности имеет вид:

$$b(\eta)=\eta^{\lambda}\prod_{k=1}^{n}\frac{|\eta_k|}{\eta_k}\cdot\frac{\eta_k-\eta}{1-\eta_k^{*}\eta}. \tag{11}$$

Из условия унитарности 3) и 2) следует, что нули η_k должны быть расположены симметрично относительно оси $\mathrm{Im}\,\eta=0$. Условие перекрестной симметрии приводит к тому, что они симметричны относительно оси $\mathrm{Re}\,\eta=0$. Поэтому n всегда четно.

$$b(\eta)=\eta^{\lambda}\prod_{n_1}\frac{\eta_{n_1}-\eta^2}{1-\eta_{n_1}^2\eta^2}\cdot\prod_{n_2}\left(\frac{-\eta_{n_2}^2+\eta^2}{1+\eta_{n_2}^2\eta^2}\right)\prod_{n_3}\frac{(|\eta_3|^2+\eta^2)^2+(2\,\mathrm{Re}\,\eta_{n_3}^{x}\eta)^2}{(1+|\eta_{n_3}|^2\eta^2)^2+(2\,\mathrm{Re}\,\eta_{n_3}\eta)^2}, \tag{12}$$

где $n_{1,2,3}$ — числа полюсов на положительных действительных и мнимых лучах и в первом квадрате плоскости η соответственно, а λ — порядок особенности в нуле. Указанное представление (12) удобно тем, что в нем независимые параметры просто связаны с такими физическими характеристиками, как положения и ширины резонансов и массы связанных состояний. Число особенностей может быть и бесконечным, и возникающие при этом ограничения на η_{n_1} хорошо изучены [8].

2. Перейдем к случаю $N=2$ [xx)]. В качестве простейшего примера рассмотрим матрицу A, соответствующую моделям в), г). $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1, & 4\\ 2, & 1\end{pmatrix}$

---

x) Этот способ был предложен М.Г.Крейном на рабочем совещании по теории дисперсионных соотношений в Дубне (1959 г.).

xx) Этот случай решен в [7]. Ниже результаты от формулы (14) до (22) совпадают с аналогичными результатами из [7]. Дальнейшее рассмотрение проведено другим методом.

c_i	2	4
2	-1/3	4/3
4	2/3	1/3

(13)

Она соответствует моментам 1, 1/2 взаимодействующих частиц и удовлетворяет уравнениям (5), (6). Выясним сперва, какие ограничения налагают на столбец S_i условия перекрестной симметрии 4), для чего разобьем $S_i(\omega)$ на симметричную $s_i(\omega)$ и антисимметричную $a_i(\omega)$ части. Тогда

$$A_{ij}\,s_j(\omega)=s_i(\omega),\qquad A_{ij}\,a_j(\omega)=-a_i(\omega). \tag{14}$$

В силу того, что собственные значения A равны ±1, имеем:

$$s_i(\omega)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}s(\omega)\quad a_i(\omega)=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}a(\omega)\quad\text{и}\quad S_i(\omega)=\begin{pmatrix}s(\omega)-2a(\omega)\\ s(\omega)+a(\omega)\end{pmatrix}. \tag{15}$$

Формулы (15) дают наиболее общий вид столбца $S_i(\omega)$, удовлетворяющего 4). Отметим, что функции $s(\omega), a(\omega)$ обладают свойствами

$$s^*(\omega)=s(\omega^*),\quad a^*(\omega)=a(\omega^*). \tag{16}$$

Условие унитарности приводит к тому, что

$$|s(\omega)-2a(\omega)|^2=|s(\omega)+a(\omega)|^2=1\quad\text{при}\quad\omega>1. \tag{17}$$

Уравнения (17) определяют две единичные окружности с центрами в точках $2a(\omega)$, $-a(\omega)$. Очевидно, что не при любом отношении $\frac{s(\omega)}{a(\omega)}$ окружности пересекаются, т.е. уравнения (17) совместны. Из (17) имеем

$$\left|\frac{s}{a}-2\right|^2=\left|\frac{s}{a}+1\right|^2, \tag{18}$$

$$|s+a|^2=1. \tag{19}$$

В плоскости $\frac{s}{a}$ (18) есть уравнение двух окружностей одного радиуса, точки пересечения которых определяются условием

$$\frac{s}{a}+\left(\frac{s}{a}\right)^*=1. \tag{20}$$

Условие (20) является следствием (18) и определяет отношение $\frac{s}{a}$ для $\omega>1$. В силу нечетности функции $\frac{s}{a}$ правая часть (20) меняет знак при $\omega<-1$. Обозначим $\frac{s(\omega)}{a(\omega)}=\Phi(\omega)$. Тогда из определения $S_i(\omega)$ следует, что в (20) фигурирует $\Phi^{+}(\omega)=\Phi(\omega+io)$, а из (16) получается, что $\left(\frac{s}{a}\right)^*=\Phi^{(-)}(\omega)=\Phi(\omega-io)$. Окончательно:

$$\Phi^{(+)}(\omega)+\Phi^{(-)}(\omega)=\pm1;\quad\begin{matrix}\omega>1,\\ \omega<-1.\end{matrix} \tag{21}$$

Соотношение (21) представляет собой хорошо известную неоднородную линейную краевую задачу Римана, методы решения ее изложены, например, в [8]. Приведем результат решения:

$$\Phi(\omega)=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{arc\,Sin}\,\omega+i\sqrt{\omega^2-1}\,\beta(\omega),$$

$$\beta(\omega)=-\beta(-\omega). \tag{22}$$

Степень произвола определяется требованиями ограниченности $\Phi(\omega)$ на концах разрезов или интегрируемостью $\Phi(\omega)$ на разрезе, что приводит к специальному виду $\beta(\omega)$. Поскольку в основных условиях $S_i(\omega)$ -мероморфные функции /10/, то в нашей постановке $\beta(\omega)$ – произвольная нечетная мероморфная функция от ω. Интересно отметить геометрический смысл частного решения (21).

$$w = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,Sin} \omega \,, \qquad w + w^* = \pm 1 \,, \quad \omega \gtrless \pm 1 \,. \tag{23}$$

В комплексной плоскости w (23) есть уравнение двух прямых $\mathrm{Re}\ w = \pm \frac{1}{2}$. Поскольку мы ищем аналитическую функцию $\Phi(\omega)$, она должна осуществлять конформное отображение односвязной области ω (плоскость с надрезами) на односвязную область w, т.е. на полосу $-\frac{1}{2} \le \mathrm{Re}\ w \le \frac{1}{2}$. Соответствие точек границы очевидно, искомая функция $w = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,Sin} \omega$, что совпадает с (23). Так как отношение $\frac{s(\omega)}{a(\omega)}$ известно (формула (22)), то решение уравнения (19) сводится к нахождению, например, функции $a(\omega)$. Будем искать решение, как функцию w. Тогда $i\sqrt{\omega^2-1}\ \beta(\omega) = \cos \pi w\ \beta(\operatorname{Sin} \pi w) = \beta_o(w)$. Легко видеть, что $\beta_o(w) = \beta_o(w+1)$, $\beta_o(w) = -\beta_o(-w)$,

$$\frac{s(w)}{a(w)} = w + \beta_o(w) \,. \tag{24}$$

Введем новую функцию $\phi(w)$:

$$\phi(w) = s(w) + a(w) \,. \tag{25}$$

Из соотношений (19), (25) и (16) следует, что $\phi(w) \cdot \phi(w^*) = 1$.

Воспользовавшись определением w (23) получим функциональное уравнение на $\phi(w)$

$$\phi(w)\,\phi(1-w) = 1 \,. \tag{26}$$

Кроме того, $a(w) = \frac{\phi(w)}{w + \beta(w) + 1}$ является нечетной функцией ω, а значит, и w. Окончательно для определения $\phi(w)$ имеем два функциональных уравнения:

$$\phi(w)\,\phi(1-w) = 1 \,, \qquad \frac{\phi(w)}{w + \beta_o(w) + 1} = \frac{\phi(-w)}{-w - \beta_o(w) + 1} \,. \tag{27}$$

Для решения функциональных уравнений (27) их достаточно прологарифмировать, тогда первое из них дает, что $\phi(w) = e^{g(w-\frac{1}{2})}$, где $g(z)$ – любая антисимметричная функция своего аргумента. Окончательное решение имеет вид:

$$\phi(w) = \frac{w + \beta_o(w)}{w + \beta_o(w) - 1}\, e^{h(w-\frac{1}{2})} \,, \tag{28}$$

где $h(w) + h(-w) = 0$,

$h(w) + h(w+1) = 0$,

$$S(w) = \begin{pmatrix} [w + \beta_o(w)] - 2 \\ [w + \beta_c(w) + 1] \end{pmatrix} \frac{[w + \beta_o(w)]}{[w + \beta_o(w)]^2 - 1}\, e^{h(w-\frac{1}{2})} \tag{29}$$

Не обсуждая пока свойств решения (29), обобщим его на случай двухрядной матрицы A, соответствующей сложению моментов $\ell, \frac{1}{2}$. Будем строить ее, исходя из (4)–(6). Из (4) следует, что A представима в форме

$$A = \begin{pmatrix} x & \frac{1-x^2}{y} \\ y & -x \end{pmatrix} , \tag{30}$$

где x, y – независимые параметры.

Условие (5) приводит к выражению

$$A = \begin{pmatrix} x, & 1-x \\ x+1, & -x \end{pmatrix} . \tag{31}$$

В нашем случае $(\ell, \frac{1}{2})$ $c_i = (2\ell, 2\ell+2)$, и окончательно:

$$A_\ell = \frac{1}{2\ell+1} \begin{pmatrix} -1, & 2\ell+2 \\ 2\ell, & 1 \end{pmatrix} . \tag{32}$$

Выражение (13) есть частный случай (32) при $\ell = 1$. Аналогично изложенному получаем, что

$$S_\ell(\omega) = \begin{pmatrix} s_\ell(\omega) - \frac{\ell+1}{\ell} a_\ell(\omega) \\ s_\ell(\omega) + a_\ell(\omega) \end{pmatrix} \tag{33}$$

и

$$\Phi_\ell(\omega) = \frac{s_\ell(\omega)}{a_\ell(\omega)}$$

подчиняется уравнению

$$\Phi_\ell^{(+)}(\omega) + \Phi_\ell^{(-)}(\omega) = \pm \frac{1}{\ell} \,; \quad \begin{matrix} \omega > 1 \,, \\ \omega < -1 \,. \end{matrix} \tag{34}$$

Очевидно, что общее решение уравнения (34) имеет вид

$$\Phi_\ell(\omega) = \frac{1}{\ell}\,\frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,Sin} \omega + i\sqrt{\omega^2-1}\ \beta(\omega) \,. \tag{35}$$

Будем так же, как и для случая $\ell = 1$, искать решения как функцию переменной w. Введем новую функцию

$$\phi_\ell(w) = s_\ell(w) + a_\ell(w) \,, \tag{36}$$

запишем систему (27) в следующей форме:

$$\phi_\ell(w)\,\phi_\ell(1-w) = 1 \,, \qquad \frac{\phi_\ell(w)}{\frac{1}{\ell} w + \beta_o(w) + 1} = \frac{-\phi_\ell(-w)}{-\frac{1}{\ell} w - \beta_o(w) + 1} \,. \tag{37}$$

Для любого целого ℓ решение уравнений задается формулой.

$$\phi_{\ell}(w) = \prod_{n=1}^{\ell} \frac{w + \ell\,\beta_o(w) - \tfrac{1}{2} + (-1)^{n-1}[\tfrac{1}{2} - (\ell - n)]}{w + \ell\,\beta_o(w) - \tfrac{1}{2} - (-1)^{n-1}[\tfrac{1}{2} - (\ell - n)]} \quad \ell^{h(w - \frac{1}{2})} \tag{38}$$

Окончательно получаем, что

$$S_{\ell}(w) = \left(\frac{w + \ell\,\beta_o(w) - (\ell + 1)}{w + \ell\,\beta_o(w) + \ell} \atop 1 \right) \phi_{\ell}(w) \quad . \tag{39}$$

Решение для произвольных целых ℓ имеет структуру, аналогичную случаю $\ell = 1$, поэтому ниже рассмотрим аналитические свойства $S_1(\omega)$.

Анализ функций $S_1(\omega)$

Рассмотрим подробнее свойства решения $S_1(\omega)$ (формула (29)). Выясним вид $h(w - \frac{1}{2})$ как функций ω, где $h(w)$ имеет свойства (28). Прежде всего заметим, что

$$\frac{\arcsin\omega + \arccos\omega}{\pi} = \tfrac{1}{2}\,, \tag{40}$$

т.е. $h(w - \frac{1}{2})$ зависит от $\frac{1}{\pi}\arccos\omega$. Пользуясь тем, что функция $h(w)$ имеет период 2 и нечетна (см. (28)), представим ее в виде ряда Фурье:

$$h(w) = \sum_m a_m \sin \pi(2m + 1)w\,,$$

где $a^*_m = a_m$.

Воспользовавшись равенством (40), можно показать, что

$$h(\omega) = \sqrt{1 - \omega^2} \sum_m b_m \omega^{2m}\,. \tag{41}$$

Таким образом, $h(\omega)$ является аналитической функцией на двулистной римановой поверхности, а $\ell^{h(w - \frac{1}{2})}$ удовлетворяет всем свойствам рассмотренной ранее задачи с $N = 1$ и $A = 1$. Поэтому наиболее общий вид $\ell^{h(w - \frac{1}{2})}$ уже установлен и определяется формулой (12). Отсюда следует, что неоднозначность типа КДД /6/ полюсов возникает и в более сложном случае, и в обеих парциальных волнах она одинакова.

Оставшаяся часть $S(w)$ зависит от произвольной мероморфной функции $\beta_o(w)$ и должна быть унитарной на правом разрезе плоскости ω. На левом разрезе $(\omega \leq -1)$ $|e^{2i\delta_j}| \neq 1$, что следует из условия унитарности и соотношений перекрестной симметрии. Так, например, $|e^{2i\delta_3(-\omega)}| \leq 1$. Знак равенства возможен только при $\delta_1(\omega) - \delta_3(\omega) = n\pi$, однако из (29) видно, что $\delta_1(\omega) - \delta_3(\omega)$ зависит от w. Анализ этой части $S(w)$ удобно проводить в комплексной плоскости w. Полюса и нули $S(w)$ определяются уравнениями

$$w + \beta_o(w) + n = 0\,, \tag{42}$$

где $n = 0, \pm 1, -2$.

Воспользовавшись условием периодичности $\beta_o(w)$ (24), уравнение (42) можно привести к виду

$$w + n + \beta_o(w + n) = 0\,, \tag{43}$$

из которого следует, что для определения корней уравнения (42) достаточно решить одно уравнение с $n = 0$.

$$w + \beta_o(w) = 0\,. \tag{44}$$

Рассмотрим отношение $\frac{[w + \beta_o(w)]}{[w + \beta_o(w)] - 1}$, которое входит в $S(w)$. Очевидно, что нули знаменателя сдвинуты на 1 по отношению к нулям числителя. Иначе говоря, полюса и нули этого отношения симметричны относительно линии $\mathrm{Re}\,w = \frac{1}{2}$, которая является образом правого разреза плоскости ω (разрез $\omega > 1$). Выражение для $S_1(w)$ содержит дополнительный множитель

$$\frac{[w + \beta_o(w)] - 2}{[w + \beta_o(w)] + 1}\,,$$

множество нулей и полюсов которого также симметрично относительно линии $\mathrm{Re}\,w = \frac{1}{2}$. Указанная симметрия есть следствие условия унитарности на разрезе $\omega > +1$. Легко убедиться, что (29) удовлетворяет условию перекрестной симметрии 4) и, как следствие, не унитарно на разрезе $\omega < -1$ или на его образе в плоскости w – линии $\mathrm{Re}\,w = -\frac{1}{2}$.

Из уравнения (44) можно получить следующие свойства множества его корней W:

а) множество W симметрично относительно начала координат,

б) множество W симметрично относительно оси $\mathrm{Im}\,w = 0$. Как следствие а) и б), множество W симметрично также относительно оси $\mathrm{Re}\,w = 0$. Поэтому для определения его достаточно найти все корни уравнения (44), расположенные в первом квадранте плоскости w, включая его границу.

Дальнейшая детализация свойств множества W возможна лишь при некоторых предположениях относительно $\beta(w)$. Ниже будет достаточным предположить, что $\beta_o(w)$ имеет вид:

$$\beta_o(w) = \cos\pi w\,\frac{P(\sin\pi w)}{Q(\sin\pi w)}\,, \tag{45}$$

что соответствует предположению о том, что

$$\beta(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}\,.$$

Здесь P и Q – полиномы по ω с действительными коэффициентами, один из которых является нечетной функцией ω (см. (22)). Тогда уравнение (44) приводится к виду

$$w \cdot Q(\sin\pi w) + \cos\pi w\,P(\sin\pi w) = 0\,. \tag{46}$$

Исследование нулей уравнения (42) проведено в работе [11], § 2. Остановимся подробнее на числе нулей в полосе со сторонами, параллельными линии $\mathrm{Re}\,w=0$. Представим левую часть в виде $f(w,u,v)$, где $u=\cos\pi w$, $v=\sin\pi w$. Пусть

$$f(w,u,v)=\sum_{m,n} w^m \phi_m^{(n)}(u,v)\,, \tag{47}$$

где $\phi_m^{(n)}$ – однородные по u, v полиномы степени n. Главным членом будем называть тот член в сумме (47), для которого m и n одновременно достигают своих максимальных значений. Тогда имеет место теорема (теорема III, работа [11]).

"Пусть $f(w,u,v)$ – полином с главным членом $w^r\phi_r^{(s)}(w,v)$. Если ϵ таково, что $\Phi^{(s)}(\epsilon+iy)=\phi_r^{(s)}(\cos w, \sin w)$ не обращается в нуль ни при каком действительном y, то на полосе $-2\pi k+\epsilon\le\kappa\le 2\pi k+\epsilon\,(w=x+iy)$ функция $F(w)=f(w,\cos w,\sin w)$ будет, начиная с некоторого достаточно большого k, иметь ровно $4sk+4$ нулей. Таким образом, для того, чтобы функция $F(w)$ имела лишь действительные нули, необходимо и достаточно, чтобы она на интервале $2\pi k+\epsilon\le x\le 2\pi k+\epsilon$ имела ровно $4sk+r$ действительных нулей, начиная с достаточно большого k."

S – волны π–N рассеяния

Матрица перекрестной симметрии (см. (2)) имеет вид (13), а функция $S_i(\omega)$ при малых $k=\sqrt{\omega^2-1}$ разлагаются в ряды

$$s_i(\omega)=1+a_i k+\ldots \tag{48}$$

Величины a_i – длины рассеяния, и из эксперимента известны их значения [12]

$$a_1-a_3=0.259\,,$$
$$a_1+2a_3=-0.005\pm0.0065\,. \tag{49}$$

Положим ниже $a_1+2a_3=0$. Сильная зависимость величин a_i от изотопического спина долгое время оставалась непонятной. В настоящее время ее связывают с π–π взаимодействием в состоянии $T=J=1$, т.е. с существованием ρ-мезона [13]. Покажем, что этот результат следует из аналитических выражений для $S_i(w)$. Для того, чтобы обеспечить разложение (48), положим в (29) $h(w-\frac{1}{2})\equiv0$ и пусть

$$\beta_o=w+\frac{\beta}{\cos\pi w\ \sin\pi w}\,, \tag{50}$$

что соответствует $\beta(w)=\dfrac{\beta}{\cos^2\pi w\ \sin\pi w}$, где β – параметр. Такой выбор $\beta(w)$ связан с тем, что он обеспечивает поведение (48) и, по теореме Понтрягина, для $\beta>0$ в полосе $-2k+\frac{1}{4}\le x\le 2k+\frac{1}{4}$ число комплексных корней $=4r(\beta)+2$. Параметр β можно подобрать так, чтобы в полосе $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ не было действительных полюсов. Выражения для $\operatorname{tg}\delta_i$ имеют вид:

$$\operatorname{tg}\delta_1(\omega)=\frac{4\omega R[\beta+\frac{\omega k}{\pi}\ \ln(\omega+k)]}{4[\beta+\frac{\omega k}{\pi}\ln(\omega+k)]^2+3\omega^2k^2}\,,$$

$$\operatorname{tg}\delta_3(\omega)=-\frac{1}{2}\,\frac{\omega k}{\beta+\frac{\omega k}{\pi}\ \ln(\omega+k)}\,,$$

или

$$a_1=\frac{1}{\beta}\,,\qquad a_1+2a_3=0\,.$$
$$a_3=-\frac{1}{2\beta}\,,$$

Таким образом, сильная зависимость a_i от изотопического спина может быть получена в рамках унитарности и перекрестной симметрии. Вывод о равенстве $a_1=a_3$ получался [14] на основе использования только свойства перекрестной симметрии. Условие унитарности приводит к тому, что все разложения по переменной ω, которые следуют из перекрестной симметрии, имеют радиус сходимости 1, а потому на их основе невозможно получать следствия о величинах длин рассеяния.

Решение уравнений типа уравнений Чу–Лоу

Приведенные выше результаты позволяют непосредственно получить решение уравнений Чу–Лоу. Матрица перекрестной симметрии для модели д) есть прямое произведение двух матриц A вида (13). Одна из них соответствует сложению изотопических спинов мезона и нуклона (1,1/2), вторая – сложению моментов количества движения мезона (1) и нуклона (1/2).

$$Ac_L=A_T\times A_J=\frac{1}{9}\begin{vmatrix}1&-4&-4&16\\-2&-1&8&4\\-2&8&-1&4\\4&2&2&1\end{vmatrix}\,. \tag{52}$$

Очевидно, что решение, т.е. функции, удовлетворяющие основным условиям, имеет вид:

$$\begin{aligned}S_{11}(w)&=S_1(w)\cdot\tilde{\tilde S}_1(w)\,,\\ S_{13}(w)&=S_1(w)\cdot\tilde{\tilde S}_3(w)\,,\\ S_{31}(w)&=S_3(w)\ \tilde{\tilde S}_1(w)\,,\\ S_{33}(w)&=S_3(w)\ \tilde{\tilde S}_3(w)\,,\end{aligned} \tag{53}$$

где $S_i(w)$ и $\tilde S_i(w)$ есть решение (29) с различными функциями $\beta_o(w)$ и $h(w)$. Функции $h(w)$ и $\tilde h(w)$ можно объединить в одну, так как обе обладают одной и той же аналитической структурой и входят в (53) сомножителями. Решение (53) зависит от трех произвольных функций, две из которых – мероморфные функции со свойствами (24), (22), а третья – произведение Бляшке. Обычно обсуждаемый вариант трехрядный матрицы получается из (52) при дополнительном предположении $S_{13} = S_{31}$, что эквивалентно $\beta_0(w) = \tilde{\beta}_0(w)$ или $S_1(w) = \tilde{S}_1(w)$. В этом случае решение зависит от двух произвольных функций.

Рассеяние π -мезонов на нуклонах в D, F.. состояниях также автоматически решается тем же методом. Действительно, матрица перекрестной симметрии имеет вид:

$$A_\ell = A_T \times A_{2J,\ell}\ , \text{ а} \tag{54}$$

решение

$$S_{2T,\,2J}(w) = S_{2T}(w) \times S_{2J,\ell}(w), \tag{55}$$

где $S_{2T}(w)$ определяется формулой (29), а $S_{2J,\ell}$ определяется формулой (39). Построение функций с конкретными свойствами будет сделано в другой работе.

Автор благодарен Н.А.Черникову, В.И.Огиевецкому и И.В.Полубаринову за дискуссии и советы, Д.В.Ширкову за интерес к работе.

Приложение

Система (37) сводится к решению функционального уравнения

$$g(w) + g(w+1) = \ell n \frac{w + \beta_0(w) + \frac{1}{2} + \ell}{w + \beta_0(w) + \frac{1}{2} - \ell}; \tag{1}$$

где $g(w) = -g(-w)$ и $\beta_0(w) = -\beta_0(-w)$, $\beta_0(w) = \beta_0(w+1)$.

Будем искать решение (1) в виде

$$g(w) = \ell n \frac{w + \beta_0(w) + a_1}{w + \beta_0(w) - a_1} + g_{a_1}(w), \quad g_{a_1}(w) = -g_{a_1}(-w).$$

Выбор такого вида соответствует тому, что $\phi(w)$ – мероморфная функция. Полагая $a_1 = \frac{1}{2} + (\ell-1)$, получим

$$g_{a_1}(w) + g_{a_1}(w+1) = -\ell n \frac{w + \beta_0(w) + \frac{1}{2} + (\ell-1)}{w + \beta_0(w) + \frac{1}{2} - (\ell-1)}.$$

Пусть $g_{a_1}(w) = -\ell n \dfrac{w + \beta_0(w) + a_2}{w + \beta_0(w) - a_2} + g_{a_2}(w)$.

Тогда при $a_2 = \frac{1}{2} + (\ell - 2)$ имеем

$$g_{a_2}(w) + g_{a_2}(w+1) = \ell n \frac{w + \beta_0(w) + \frac{1}{2} + (\ell-2)}{w + \beta_0(w + \frac{1}{2} - (\ell-2)}.$$

Для целых ℓ конечным числом шагов получаем формулу (38).

Примечание. После завершения настоящей работы был получен Phys. Rev., 136, №5B, 1515 (с 64) с работой A.W.Martinc and W.D.Mc G Linn, которая содержит ссылку на T.Rothlutner Z Physik 177, 287(64). Эти работы содержат аналогичные результаты, полученные другими методами.

Литература

1. F.Low. Phys. Rev., 97, 1392 (1955).
2. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. ГИТТЛ, Москва, 1957;
   Н.Н. Боголюбов, Б.В. Медведев, М.К. Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений. ГИФМЛ, Москва, 1958.
3. G.Chew, M.Goldberger, F.Low, Y.Nambu. Phys. Rev., 106, 1337 (1957).
4. R.Oehme. Phys. Rev., 102, 1174 (1956).
5. Международная зимняя школа теоретической физики при Объединенном институте ядерных исследований, т.2. Д.В. Ширков. Дисперсионная теория низкоэнергетического пион-пионного рассеяния, стр. 117, Дубна, 1964.
6. L.Castillejo, R.Dalitz, F.Dyson. Phys. Rev., 101, 453 (1956).
7. G.Wanders. Nuovo Cimento, 23, 816 (1962).
8. А.И. Маркушевич. Теория аналитических функций. ГИТТЛ, М-Л, 1950.
9. Ф.Д. Гахов. Краевые задачи. ГИФМЛ, Москва, 1963;
   Н.И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. ГИФМЛ, Москва, 1962.
10. W.Zimmermann. Nuovo Cimento., 21, 249 (1961).
11. Л.С. Понтрягин. Изв. АН СССР, серия мат., 6, 115 (1942).
12. J.Hamilton, W.Woolcock. Rev. Mod. Phys., 35, 737 (1963).
13. P.T.Matthews. Proc. Aixen. Province Conf., v. 11, 87 (1961).
14. П. Мэтьюс, Релятивистская квантовая теория взаимодействия элементарных частиц. И.Л., Москва, 1959.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 января 1965 г.