С 324.2
Е-912

15/III-65

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 1961

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Г.В. Ефимов

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕПЕРЕНОРМИРУЕМЫХ ТЕОРИЙ

ЯФ, 1965, т2, в 1, с180-189.

1965

P - 1961

Г.В. Ефимов

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕПЕРЕНОРМИРУЕМЫХ ТЕОРИЙ

Направлено в журнал " Ядерная физика"

3014/2 гр.

1. Введение

Устранение ультрафиолетовых расходимостей в ряду теории возмущений в квантовой теории поля является основной проблемой при формулировке самосогласованной теории микрочастиц. При так называемых перенормируемых взаимодействиях удалось устранить расходимости, переопределив константу связи и массы частиц[1,2]. Однако остался большой класс неренормируемых взаимодействий, где программа перенормировок не прошла.

Попытки устранить расходимости введением некоторой регуляризующей процедуры типа процедуры Паули-Вилларса плохи тем, что при конечных регуляризующих массах нарушается унитарность при достаточно больших энергиях. Поэтому такого сорта регуляризации всегда рассматривались как промежуточные.

Отказ от локальности взаимодействия[3,4] пока не привел к значительным успехам, поскольку формфакторы или нарушают унитарность при больших энергиях, или приводят к появлению дополнительных особенностей у амплитуд физических процессов в комплексной плоскости энергии, что соответствует нарушению условия микропричинности.

Мне кажется, неудача с введением релятивистского обрезания, сохраняющего унитарность и причинность, связана с казавшимся очевидным положением, что амплитуды физических процессов растут не быстрее полинома на бесконечности по энергии. В терминологии[1] амплитуды являются обобщенными функциями умеренного роста. В этих условиях, естественно, любая регуляризующая функция или формфактор в импульсном пространстве должны обладать какими-либо особенностями в конечной области, а эти особенности проявляются в физических процессах при достаточно больших энергиях, нарушая унитарность и т.д.

В последнее время появились работы[5,6], где показывается, что требование полиномиального роста амплитуд на бесконечности слишком сильно и его можно ослабить. Амплитуды могут иметь на бесконечности существенно особую точку, при этом локальность и причинность теории не будут нарушены, если рост будет медленнее, чем линейная экспонента по энергии.

Таким образом, появляется возможность провести регуляризацию целой функцией в импульсном пространстве. Можно ожидать, что унитарность теории не нарушится, поскольку никаких добавочных особенностей при любых конечных энергиях не появится.

Наличие существенно особой точки на бесконечности во многом изменяет привычные представления. В обычной формулировке амплитуды описывают диаграммами Фейнмана. При вычислениях переходят к импульсному представлению и затем поворачивают контур интегрирования по энергии ($k_0 \to ik_4$) , переходя тем самым к евклидову четырехмерному пространству. Более того, показано /7/, что можно сформулировать теорию в евклидовом пространстве и эта формулировка эквивалентна обычной псевдоевклидовой. При наличии существенной особенности на бесконечности эквивалентность евклидовой и псевдоевклидовой формулировок нарушается, поскольку нельзя повернуть контур ($k_0 \to ik_4$).

Мы будем рассматривать такие варианты существенных особенностей, когда в евклидовой области амплитуды хорошо убывают, а в физической области растут быстрее полинома. Отсюда следует, что необходимо с самого начала формулировать теорию в евклидовом пространстве, а переход в физическую область осуществлять аналитическим продолжением по инвариантным импульсным переменным.

Мне кажется, что евклидова формулировка является естественной основой теории при отказе от полиномиального роста амплитуд на бесконечности.

В данной работе на примере скалярного поля будет показано, что возможно ввести в теорию релятивистское обрезание, которое позволит избежать всех расходимостей в теории возмущений. Теория остается локальной, унитарной и причинной. С точки зрения вводимого обрезания нет никакого различия между перенормируемыми и неперенормируемыми взаимодействиями.

Остается открытым лишь вопрос о поведении амплитуд на бесконечности по энергии. Как и в обычных перенормируемых теориях, эта проблема не может быть решена в рамках теории возмущений.

2. Введение элементарной длины

Будем рассматривать однокомпонентное скалярное поле с плотностью лагранжиана взаимодействия $L(x) = L_0(x) + L_I(x)$, где $L_0(x)$ – обычный лагранжиан свободного поля с массой μ , а

$$L_I(x) = -g:\phi^m(x):, \qquad (2.1)$$

где m –некоторое целое число. При $m = 3,4$ получаем хорошо известные перенормируемые взаимодействия. При $m \geq 5$ теория неперенормируема.

Как говорилось во введении, существенный пункт нашего рассмотрения – формулировка теории в евклидовом четырехмерном пространстве.

Воспользуемся результатом работы /8/ и запишем S –матрицу в евклидовой формулировке в виде:

$$S = \exp\{-g\int d^4x\,[\frac{\delta}{\delta I(x)}]^m\}\exp\{\tfrac{1}{2}\iint d^4x_1 d^4x_2 I(x_1)\Delta_\mu(x_1-x_2)I(x_2)\}. \qquad (2.2)$$

Здесь $I(x)$ –внешний источник поля $\phi(x)$ и

$$\Delta_\mu(x_1-x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p\,e^{ip(x_1-x_2)}}{p^2+\mu^2} = \frac{\mu}{(2\pi)^2}\cdot\frac{K_1(\mu\sqrt{(x_1-x_2)^2})}{\sqrt{(x_1-x_2)^2}}, \qquad (2.3)$$

где $K_1(z)$ –функция Макдональда. Интегрирование в (2.2) и (2.3) проводится по 4-мерному евклидову x– и p –пространству. Точные гринавские функции n –ого порядка связаны с S –матрицей (2.2) соотношением /8/

$$G_n(x_1,\dots,x_n) = S^{-1}\frac{\delta^n S}{\delta I(x_1)\dots\delta I(x_n)}\Big|_{I(x)=0}. \qquad (2.4)$$

Фурье-преобразования гриновских функций (2.4) дадут их значения в евклидовой области пространственно-подобных внешних импульсов . Переход в физическую область осуществляется по инвариантным импульсным переменным.

Изложенная процедура эквивалентна обычному рассмотрению и для лагранжиана взаимодействия (2.1) с причинной функцией (2.3) дает обычные расходящиеся выражения в ряду теории возмущений.

Наше основное предположение заключается в следующем. Вместо причинной функции $\Delta_\mu(x)$ в (2.2) введем:

$$D_\mu(x) = \Delta_\mu(x)\,\theta(x^2-\ell^2), \qquad (2.5)$$

где

$$\theta(z) = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

При таком выборе причинной функции все ультрафиолетовые расходимости будут, естественно, отсутствовать. Задача заключается в том, чтобы показать, что унитарность и причинность теории не будут нарушены.

Введенный в (2.5) новый параметр ℓ имеет смысл "элементарной длины" и в нашем подходе является дополнительным параметром теории.

Прежде всего рассмотрим фурье-образ функции $D_\mu(x)$.

$$D_\mu(q) = \int d^4x\,\ell^{iqx}D_\mu(x) = \frac{1}{q^2+\mu^2} - V_\mu(-q^2), \qquad (2.6)$$

$$V_\mu(-q^2) = \int_0^\ell du\, u^2 \frac{J_1(u\sqrt{q^2})}{\sqrt{q^2}} \frac{\mu K_1(\mu u)}{u}, \qquad (2.7)$$

где $J_1(z)$ –функция Бесселя.

Вектор q – евклидов ($q^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2$) и связан с псевдоевклидовым внешним импульсом $p\,(p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2)$ соотношением $p^2 = -q^2$.

Выражение (2.6) определяет причинную функцию евклидовой области, т.е. в области пространственно-подобного внешнего импульса $p^2 < 0$. Переход в физическую область $p^2 > 0$ осуществляется аналитическим продолжением по q^2. Имеем (в терминах $p^2 = -q^2$)

$$D_\mu(p) = \frac{1}{-p^2 + \mu^2 - i\epsilon} - V_\mu(p^2). \qquad (2.8)$$

Функция $V_\mu(p^2)$ целая. Получим разложение ее в ряд по p^2:

$$V_\mu(p^2) = \frac{1}{\mu^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \left(\frac{p^2}{4\mu^2}\right)^n, \qquad (2.9)$$

$$c_n = \frac{1}{2(n+1)!} \int_0^{\mu\ell} du\, u^{2+2n} K_1(u). \qquad (2.10)$$

При $n \to \infty$

$$c_n \approx \frac{(\mu\ell)^{2n}}{n!} \qquad (2.11)$$

и удовлетворяет условию

$$\lim_{n \to \infty} [c_n]^{\frac{1}{n}} = 0. \qquad (2.12)$$

Ряд (2.9) сходится при любых p^2. При $p^2 \to +\infty$ функция $V_\mu(p^2)$ растет, как

$$V_\mu(p^2) \sim \exp\{\ell\sqrt{p^2}\}. \qquad (2.13)$$

В обычном псевдоевклидовом пространстве фурье-образ $V_\mu(p^2)$ может быть записан в виде бесконечной суммы квазилокальных операторов

$$V_\mu(x) = \frac{1}{\mu^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \left(-\frac{\Box}{4\mu^2}\right)^n \delta^{(4)}(x); \quad \left(\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right). \qquad (2.14)$$

Как показано Мейманом[5], обобщенная функция $V_\mu(x)$ (2.14) является локальной на классе C_0 основных функций, поскольку коэффициенты c_n удовлетворяют условию (2.12). Это означает, что добавление к обычной причинной функции квазилокального оператора $V_\mu(x)$ не нарушает локальности и причинности.

С точки зрения обычных методов регуляризации, предлагается новая вычитательная процедура, причем вычитаемый член $V_\mu(p^2)$ не имеет никаких особенностей в любой ограниченной области плоскости комплексного p^2. Это обстоятельство обеспечивает выполнение унитарности в теории.

3. Проблема неоднозначности

Вместо θ –функции в (2.5) можно ввести другую действительную функцию $\Theta(x^2)$, которая удовлетворяла бы условиям

$$\Theta(x^2) \underset{x^2 \to 0}{\to} (x^2)^\sigma \quad (\sigma \geq 1), \qquad (3.1)$$

$$\Theta(x^2) \underset{x^2 \to \infty}{\to} 1. \qquad (3.2)$$

Условия причинности и локальности (2.11) накладывает дополнительное ограничение на $\Theta(x^2)$. Действительно, в случае

$$D(x) = \Delta(x)\Theta(x^2) \qquad (3.3)$$

получим для $V(-q^2)$ выражение

$$V(-q^2) = \int_0^\infty du\, u^2 \frac{J_1(u\sqrt{q^2})}{\sqrt{q^2}} [1 - \Theta(u^2)] \frac{\mu K_1(\mu u)}{u}, \qquad (3.4)$$

откуда для коэффициентов c_n в (2.9) имеем

$$c_n = \frac{1}{2(n+1)!} \int_0^\infty du\, u^{2+2n} \left[1 - \Theta\left(\frac{u^2}{\mu^2}\right)\right] K_1(u). \qquad (3.5)$$

Чтобы c_n удовлетворяла условию (2.12), необходимо потребовать, чтобы функция $[1-\Theta(u^2)]$ убывала достаточно быстро при $u^2 \to \infty$.

Если

$$|1-\Theta(u^2)| < A e^{-a(u^2)^\gamma} \qquad (u^2 \gg 1), \tag{3.6}$$

где A, a и γ положительные постоянные, тогда при асимптотически больших n имеем

$$c_n \sim \frac{[\mathrm{Const}]^n}{\Gamma((1-\frac{1}{\gamma})n)} \qquad (n \gg 1). \tag{3.7}$$

и условие (2.12) требует, чтобы

$$\gamma > 1. \tag{3.8}$$

Таким образом, в допустимый класс функций обрезания $\Theta(x^2)$ входят функции, удовлетворяющие условиям (3.1), (3.2), (3.6) и (3.8).

Примером такой функции может служить

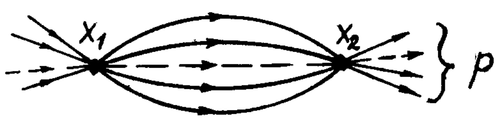
$$\Theta(x^2) = 1 - \exp\{-(\frac{x^2}{\ell^2})^\gamma\} \qquad (\gamma > 1). \tag{3.9}$$

Полученные условия являются достаточными. Возможно, что более тонкие оценки расширят класс допустимых функций.

Для простоты расчетов ниже мы будем рассматривать регуляризацию причинной функции по (2.5).

4. Матричные элементы второго порядка

Амплитуды второго порядка теории возмущений при взаимодействии (2.1) описываются диаграммами Фейнмана вида:



Р и с. 1.

В каждой точке на диаграмме сходятся m линий. Пусть имеется r внутренних линий. Обозначим через p сумму внешних импульсов, входящих в точку x_1. Тогда амплитуда, соответствующая этой диаграмме, в области $p^2 < 0$ описывается интегралом

$$T_2(p^2) = g^2 \int d^4x\, e^{iqx} D^r_\mu(x). \tag{4.1}$$

Напомним, что вектор q -евклидов и $q^2 = -p^2$, а в (4.1) интегрирование проводится по 4-мерному евклидову x -пространству.

Подставляя $D_\mu(x)$ по формуле (2.5), получим:

$$T_2(p^2) = g^2 \int d^4x\, e^{iqx} \Delta^r_\mu(x)\theta(x^2-\ell^2). \tag{4.2}$$

Воспользуемся соотношением

$$\Delta^r_\mu(x) = \int_{(r\mu)^2}^{\infty} d\kappa^2\, \Omega_r(\kappa^2)\Delta_\kappa(x), \tag{4.3}$$

где $\Omega_r(\kappa^2)$ -фазовый объем r скалярных частиц с массой μ

$$\Omega_r(\kappa^2) = (2\pi)^{-3(r-1)} \int\frac{d\vec{k}_1}{2\omega_1} \dots \int\frac{d\vec{k}_r}{2\omega_r}\, \delta^{(4)}(k-k_1-\dots-k_r), \tag{4.4}$$

где $\omega_j = \sqrt{\mu^2+\vec{k}_j^2}$ и $k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 = \kappa^2$,

$\Delta_\kappa(x)$ -причинная функция (2.3) скалярной частицы с массой κ.

Подставляя (4.3) в (4.2) и воспользовавшись (2.6), получим:

$$T_2(p^2) = g^2 \int_{(r\mu)^2}^{\infty} d\kappa^2\, \Omega_r(\kappa^2) D_\kappa(p) = \tag{4.5}$$

$$= g^2 \int_{(r\mu)^2}^{\infty} d\kappa^2\, \Omega_r(\kappa^2)\left[\frac{1}{-p^2+\kappa^2-i\epsilon} - V_\kappa(p^2)\right].$$

Заметим, что с ростом κ функция $D_\kappa(p)$ экспоненциально убывает, так как по (2.6) и (2.7)

$$D_\kappa(p) = \int_\ell^\infty du\, u^2 \frac{J_1(u\sqrt{-p^2})}{\sqrt{-p^2}} \frac{\kappa K_1(\kappa u)}{u} \tag{4.6}$$

и

$$D_\kappa(p) \sim e^{-\kappa\ell} \qquad (\kappa^2 \gg |p^2|). \tag{4.7}$$

Интеграл (4.5) сходится, таким образом, при любых r, поскольку фазовый объем $\Omega_r(\kappa^2)$ растет при $\kappa^2 \to \infty$, как [9]

$$\Omega_r(\kappa^2) \sim \kappa^{2r-4} . \tag{4.8}$$

Амплитуда $T_2(p^2)$ вещественна в области $p^2<(r\mu)^2$ и при $p^2 \to -\infty$ убывает. В плоскости комплексного p^2 она имеет разрез, начинающийся с точки $p^2=(r\mu)^2$ и мнимая часть равна

$$\mathrm{Im}\, T_2(p^2) = \pi g^2 \Omega_r(p^2) \tag{4.9}$$

в соответствии с требованием унитарности. Других особенностей у амплитуды $T_2(p^2)$ в любой ограниченной области комплексного p^2 нет, так как $V_\kappa(p^2)$ –целая.

На бесконечности $p^2=\infty$ $T_2(p^2)$ имеет существенно особую точку. При $p^2 \to +\infty$

$$\mathrm{Re}\, T_2(p^2) \sim -(p^2)^r e^{\ell\sqrt{p^2}} . \tag{4.10}$$

5. Высшие порядки теории возмущений

Для доказательства унитарности в высших порядках покажем, что проблема сводится к рассмотрению обычных диаграмм теории возмущений. Запишем причинную функцию $D_\mu(p)$ (2.6) или (2.8) в виде:

$$D_\mu(p) = \frac{d_\mu(p^2)}{-p^2+\mu^2-i\epsilon} , \tag{5.1}$$

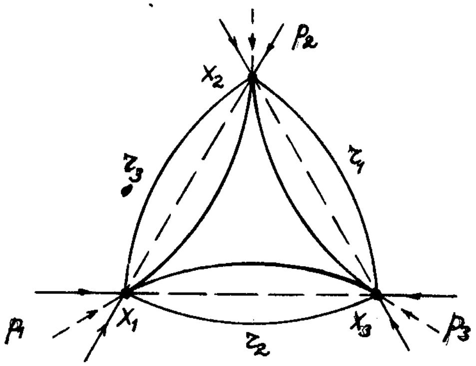
$$d_\mu(p^2) = 1 + (p^2-\mu^2)V_\mu(p^2) . \tag{5.2}$$

Заметим, что

$$d_\mu(\mu^2) = 1 . \tag{5.3}$$

Функция $d_\mu(p^2)$ целая по p^2 и убывает при $p^2 \to -\infty$.

Сначала рассмотрим диаграмму третьего порядка, показанную на рис. 2.



Р и с. 2.

p_1, p_2, p_3 –суммы внешних импульсов частиц, сходящихся соответственно в точках x_1, x_2, x_3; r_1, r_2, r_3 – число внутренних линий между точками x_2 и x_3, x_3 и x_1, x_1 и x_2. В евклидовой области внешних импульсов, именно [10]:

$$p_j^2 = z_j < 0 \quad (j = 1,2,3), \tag{5.4}$$

$$\lambda(z_1,z_2,z_3) = 2z_1z_2 + 2z_2z_3 + 2z_3z_1 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 > 0$$ см. (2.14

после выделения δ –функции, соответствующей сохранению энергии импульса $p_1+p_2+p_3=0$, эта диаграмма описывается интегралом

$$T_3(z_1,z_2,z_3) = g^3 3^4 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3\, e^{iq_jx_j} \delta^{(4)}(x_1+x_2+x_3) \times$$
$$\times D_\mu^{r_3}(x_1-x_2) D_\mu^{r_1}(x_2-x_3) D_\mu^{r_2}(x_3-x_1), \tag{5.5}$$

где интегрирование, как и в (4.1), проводится по евклидову x –пространству, а векторы q_1, q_2, q_3 –евклидовы, причем

$$q_j^2 = -p_j^2 = -z_j , \tag{5.6}$$

$$(q_i q_j) = -(p_i p_j) = \tfrac{1}{2}(z_i + z_j - z_k) ,$$

где i, j, k образуют перестановку чисел 1,2,3. Подставляя каждую $D^{r_k}(x_i-x_j)$ по формуле (4.3), получим

$$T_3(z_1,z_2,z_3) = g^3 \int\limits_{(r_1\mu)^2}^{\infty} d\kappa_1^2\, \Omega_{r_1}(\kappa_1^2) \int\limits_{(r_2\mu)^2}^{\infty} d\kappa_2^2\, \Omega_{r_2}(\kappa_2^2) \int\limits_{(r_3\mu)^2}^{\infty} d\kappa_3^2\, \Omega_{r_3}(\kappa_3^2) \times$$
$$\times M_{\kappa_1\kappa_2\kappa_3}(z_1,z_2,z_3) , \tag{5.7}$$

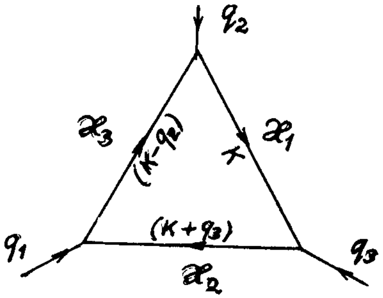
$$M_{\kappa_1\kappa_2\kappa_3}(z_1, z_2, z_3) = 3^4 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3\, e^{iq_jx_j}\, \delta^{(4)}(x_1 + x_2 + x_3) \times$$

$$\times D_\kappa (x_1 - x_2) D_{\kappa_1}(x_2 - x_3) D_{\kappa_2}(x_3 - x_1). \qquad (5.8)$$

Переходя к импульсному представлению в (5.8), получим:

$$M_{\kappa_1\kappa_2\kappa_3}(z_1, z_2, z_3) = \int \frac{d^4k\, d_{\kappa_1}(-k^2) d_{\kappa_2}(-(k+q_3)^2) d_{\kappa_3}(-(k-q_2)^2)}{[k^2 + \kappa_1^2 - i\epsilon][(k+q_3)^2 + \kappa_2^2 - i\epsilon][(k-q_2)^2 + \kappa_3^2 - i\epsilon]}. \qquad (5.9)$$

Этот интеграл описывает вершинную функцию с произвольными массами κ_1, κ_1, κ_2, которая соответствует диаграмме



Р и с. 3.

Интегрирование проводится по евклидову импульсному пространству. Функции, стоящие в числителе, целые и убывают при $k^2 \to +\infty$, так что интеграл хорошо сходится.

Особенности функции $M_{\kappa_1\kappa_2\kappa_3}(z_1, z_2, z_3)$ по импульсным переменным z_1, z_2, z_3 связаны только с обращением в нуль знаменателя и больше ни с чем другим. Поэтому к изучению особенностей амплитуды (5.7) полностью применим анализ Ландау /11/ и Кутковского /12/, и, следовательно, все необходимые условия для выполнения унитарности выполнены.

Существенно заметить, что, когда Ландау выводил свои уравнения, ему было необходимо потребовать, чтобы амплитуды имели регулярную точку на бесконечности по импульсу. Только в этом случае он мог перейти к евклидовой метрике поворотом контура ($k_0 \to ik_4$) и связать особенности диаграмм с обращением в нуль известной квадратичной формы по внешним импульсам после α -параметризации Фейнмана /11/. В нашем случае амплитуды уже записаны в евклидовом пространстве, и потому существенная особенность на бесконечности не влияет на положение особенностей диаграмм.

Аналогичные рассуждения применимы и к диаграмме произвольного порядка. Факторы $d_\kappa(-k^2)$ обеспечивают сходимость интегралов и не влияют на положение особенностей амплитуд. Аналитические свойства определяются только знаменателями $[k_j^2 + \kappa_j^2 - i\epsilon]$, т.е. выражениями обычной теории возмущений, для которых справедлив анализ диаграмм, проведенный в /11,12/. В совокупности с равенством (5.3) получаем все необходимые условия для выполнения унитарности.

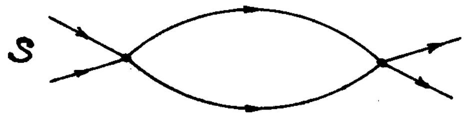
Таким образом, унитарность в теории с введенным обрезанием (2.5) выполнена, если она выполнена в обычной теории возмущений.

6. Поведение амплитуд при больших энергиях

Как было выяснено в разделе 4, амплитуды второго порядка растут в физической области быстрее любой конечной степени энергии. Однако точные амплитуды не должны расти. Покажем, как суммирование определенного класса диаграмм может исправить положение. Для определенности рассмотрим взаимодействие, описываемое лагранжианом

$$L_I(x) = -g : \phi^4(x) : \qquad (6.1)$$

Амплитуда рассеяния скалярных частиц, соответствующая диаграмме, изображенной на рис. 4, согласно (4.1) и (4.5)



Р и с. 4.

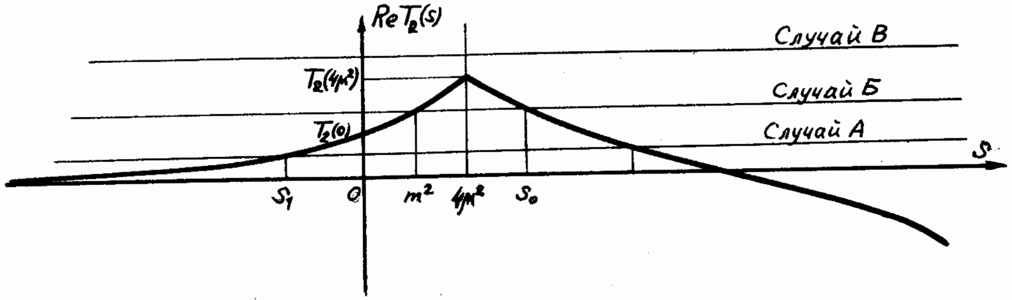
дается выражением

$$T_2(s) = \frac{g^2}{4(2\pi)^2} \int_{4\mu^2}^{\infty} d\kappa^2 \sqrt{\frac{\kappa^2 - 4\mu^2}{\kappa^2}} \left[\frac{1}{-s + \kappa^2 - i\epsilon} - V_\kappa(s) \right]. \qquad (6.2)$$

Здесь мы воспользовались равенством

$$\Omega_2(\kappa^2) = \frac{1}{4(2\pi)^2} \sqrt{\frac{\kappa^2 - 4\mu^2}{\kappa^2}}.$$

Качественное поведение $\mathrm{Re}\, T_2(s)$ представлено на графике (рис. 5).



Р и с. 5.

Можно показать, что асимптотики $\mathrm{Re}\, T_2(s)$ равны

$$\mathrm{Re}\, T_2(s) \sim -g^2 e^{+\ell\sqrt{s}}, \quad s \to +\infty, \tag{6.3}$$

$$\mathrm{Re}\, T_2(s) \sim g^2 \frac{\mathrm{Cos}\,\ell\sqrt{-s}}{-s}, \quad s \to -\infty \tag{6.4}$$

– с точностью до численных множителей.

Рассмотрим теперь амплитуду, описываемую следующей суммой диаграмм.

Р и с. 6.

Сумма равна

$$T(s) = \frac{T_2(s)}{1 - T_2(s)}. \tag{6.5}$$

Из графика на рис. 5 видно, что качественно различны следующие случаи:

(A) $1 < T_2(0)$,

(Б) $T_2(0) < 1 < T_2(4\mu^2)$,

(В) $T_2(4\mu^2) < 1$.

В случае А у амплитуды $T(s)$ появляется полюс при $s < 0$, т.е. в точке $s_1 = p_1^2 = \mu_1^2 < 0$. Это соответствует появлению в теории частицы с мнимой массой

или "духового" состояния. Этого не должно быть. Отсюда следует, что возникает условие, связывающее константу связи g^2 с "элементарной длиной" ℓ :

$$T_2(0) < 1 \quad \text{или} \quad \frac{g^2}{(2\pi)^2}\int_1^\infty dt\,\frac{\sqrt{t-1}}{t^2}\int_{2\mu\ell t}^\infty du\,u^2 K_1(u) < 1. \tag{6.6}$$

Напомним, что в случае взаимодействия (6.1) $T_2(0)$ растет логарифмически при $\ell \to 0$.

Интересно отметить, что условие (6.6) обеспечивает абсолютную сходимость исследуемого ряда диаграмм (рис. 6) во всей евклидовой области. И если мы последовательно проводим евклидову формулировку теории, то хотелось бы, чтобы ряды теории возмущений сходились бы везде в евклидовой области, а аналитическое продолжение в физическую область давало бы все нужные особенности у амплитуд физических процессов.

В случае Б в теории появляется реальное связанное состояние с массой $m^2 < 4\mu^2$, которая находится из уравнения

$$T_2(m^2) = 1. \tag{6.7}$$

При этом одновременно возникает резонанс при энергии s_0 (см. рис. 5).

Конечно, чтобы сделать окончательный вывод о возможности появления связанного состояния в системе двух бозонов, необходимо, с одной стороны, показать, какое влияние оказывают другие диаграммы в теории, а с другой – в рамках рассматриваемого класса диаграмм необходимо показать, что амплитуда $T(s)$ не имеет других особенностей на первом листе комплексной плоскости s. Пока эти вопросы остаются открытыми.

В случае В никаких добавочных особенностей на вещественной оси s у амплитуды $T(s)$ не появляется.

В целом амплитуда $T(s)$ не растет при $s \to \infty$ и

$$\lim_{s \to +\infty} T(s) = -1. \tag{6.8}$$

Итак, получено, что основной рост каждой диаграммы при стремлении энергии к бесконечности может быть компенсирован учетом диаграмм высших приближений теории.

7. Заключение

Проведенное исследование показало, что возможно построить унитарную, локальную и причинную S -матрицу, вводя релятивистское обрезание в теорию или "элементарную длину" ℓ . При этом оказывается, что возникает функциональный произвол при выборе регуляризующей функции. Нам кажется, что если обрезание происходит на достаточно малых расстояниях, то при низких энергиях амплитуды будут мало зависеть от этого произвола.

Следует отметить, что в предлагаемом варианте теории обычные дисперсионные соотношения не будут выполняться из-за существенной особенности амплитуд на бесконечности. Однако если для некоторой амплитуды $A(z)$ с существенной особенностью на бесконечности известна функция $a(z)$ с той же особенностью, что и у $A(z)$, то тогда отношение $\frac{A(z)}{a(z)}$ будет на бесконечности ограничено и для этой величины можно будет писать дисперсионые отношения. В целом этот вопрос достаточно сложен, и трудно сказать что-либо более определенное.

В заключение выражаю глубокую благодарность акад. Н.Н. Боголюбову, проф. Д.И. Блохинцеву, проф. М.А. Маркову, И.Т. Тодорову и А.Н. Тавхелидзе за полезные обсуждения.

Литература

1. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, 1957.
2. С. Швебер, Г. Бете, Ф. Гофман. Мезоны и поля, том. 1, ИЛ, 1957.
3. Д.А. Киржниц. ЖЭТФ, 41, 557, 1961.
4. Д.А. Киржниц, А.А. Лезнов. ЖЭТФ, 48, № 2, 1965.
5. Н.Н. Мейман. ЖЭТФ, 47, 1966, 1964.
6. Нгуен Ван Хьеу. Препринт ОИЯИ, Р-1916, Дубна, 1965.
7. J.Schwinger. Phys. Rev., 115, 721, 1959.
8. E.S.Fradkin. Nucl. Phys., 49, 624, 1963.
9. В.А. Колкунов. ЖЭТФ, 43, 1448, 1962.
10. Лю И-Чень, И.Т. Тодоров. ДАН СССР, 148, 806, 1963.
11. Л.Д. Ландау. ЖЭТФ, 37, 62, 1959.
12. R.E.Cutkosky. J.Math. Phys. 1, 429, 1960.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 января 1965 г.