5/II-65

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-1954

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Нгуен Ван Хьеу

ГРУППА СИММЕТРИИ SL(6) И РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ОБОБЩЕНИЕ ГРУППЫ СИММЕТРИИ SU_6

ЯФ, 1965, т2, в3, стр. 517-528.

1965

P-1954

29/12/3

Нгуен Ван Хьеу

ГРУППА СИММЕТРИИ SL(6) И РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ОБОБЩЕНИЕ ГРУППЫ СИММЕТРИИ SU_6

Аннотация

В работе рассматривается теория симметрии элементарных частиц, основанная на группе $SL(6)$ и являющаяся релятивистским обобщением теории симметрии SU_6. Изучается обобщенное уравнение Дирака для спиноров группы $SL(6)$, получен лагранжиан взаимодействия мезонного мультиплета с векторными и аксиальными токами. Показывается, что этот мезонный мультиплет содержит либо нонет векторных мезонов и нонет псевдовекторных мезонов, либо нонет векторных мезонов и октет псевдоскалярных мезонов. В последнем случае взаимодействие между аксиальными токами и псевдоскалярными мезонами является взаимодействием с производной.

Nguyen Van Hieu

The Symmetry Group SL(6) and a Relativistic Generalization of the SU_6 Symmetry

Abstract

The symmetry of elementary particles which is based on the SL(6) group and is a relativistic generalization of SU_6 symmetry is treated. A generalized Dirac equation for the spinors of the SL(6) group is studied. The interaction Lagrangian for the meson multiplet with the vector and axial currents has been obtained. It is shown that this meson multiplet contains either nonet of vector mesons and a nonet of pseudovector mesons, or nonet of vector mesons and an octet of pseudoscalar mesons. In the latter case the interaction between axial currents and pseudoscalar mesons is an interaction involving a derivative.

I. Введение

В недавних работах Гурсея, Радикати, Пайса/I-3/, Сакиты/4/ и др./5-7/ была предложена и рассмотрена группа симметрии SU_6, подгруппой которой является прямое произведение $SU_3 \times SU_2$, где SU_3 - группа унитарной симметрии Гелл-Манна/8/ и Немана/9/, а группа SU_2 считается малой группой группы Лоренца. В работе Фейнмана, Гелл-Манна и Цвейга/I0/ путем обобщения алгебры векторных и аксиальных токов/8,II/ также была рассмотрена группа $U_6 \times U_6$, содержащая в себе группу SU_6 работ/I-4/ как подгруппу. Однако группа SU_2, которую авторы работ/I-3/ считают малой группой группы Лоренца, интерпретируется в работе Фейнмана и др./I0/ как спиновая группа. Так как в системе центра масс частиц малая группа Лоренца совпадает со спиновой группой, то для одночастичных состояний эта разница несущественна.

Предположение о существование симметрии группы SU_6 позволяет объяснить большое количество экспериментальных данных. Это показывает, что симметрия SU_6 является хорошей приближенной симметрией элементарных частиц. Однако группа SU_6 релятивистски неинвариантна: если g есть некоторое преобразование группы SU_6 в некоторой системе отсчета, то после преобразований Лоренца оно может превращаться в другое преобразование, не являющееся элементом группы SU_6. Поэтому для построения ковариантной теории симметрии необходимо расширить группу SU_6 так, чтобы расширенная группа симметрии была релятивистски инвариантна и содержала группу SU_6 как подгруппу.

В настоящей работе мы рассмотрим такую релятивистски инвариантную группу симметрии, а именно группу $SL(6)$, подгруппами которой являются группа SU_6 Гурсея, Радикати, Пайса/I-3/ и Сакиты/4/ и группа $SL(2)$, изоморфная однородной собственной группе Лоренца*). Отметим, что относительно интерпретации этой подгруппы $SL(2)$, изоморфной однородной собственной группы Лоренца, существуют две различные возможности: либо она сама является однородной собственной группой Лоренца с инфинитезимальными операторами $M_{\mu\nu}$, связанными с полным угловым моментом, либо она является спиновой группой с инфинитезимальными операторами $S_{\mu\nu}$, связанными с $M_{\mu\nu}$ соотношением

$$M_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu .$$

В рамках вопросов, рассмотренных в настоящей работе, разница между этими возможностями несущественна.

---

*) Возможности релятивистских обобщений симметрии SU_6 обсуждались в ряде последних работ/I2-I6/. В работе Кадышевского, Мурадяна, Тавхелидзе и Тодорова/I6/ впервые была предложена группа симметрии, подгруппой которой является группа $SL(6)$.

2. Группа $SL(6)$

Для того чтобы понять, как группа $SL(6)$ возникает в результате "релятивизации" группы SU_6, рассмотрим простой случай, когда группа SU_6 получается при объединении спиновой группы SU_2, инфинитезимальные операторы которой имеют вид:

$$S_{ij} = \int \psi^+(x) \frac{\gamma_i\gamma_j - \gamma_j\gamma_i}{4i} \psi(x)\, d^3x , \quad i,j = 1,2,3, \qquad (1)$$

с группой унитарной симметрии SU_3 с инфинитезимальными операторами

$$I_\alpha = \frac{1}{2} \int \psi^+(x)\, \lambda_\alpha\, \psi(x)\, d^3x, \quad \alpha = 1,2,\dots 8, \qquad (2)$$

где $\psi(x)$ – триплетный спинор с компонентами $\psi_\alpha(x)$, удовлетворяющими каноническим коммутационным соотношениям при равных временах, γ_μ, $\mu = 0,1,2,3$ – обычные матрицы Дирака, а λ_α – матрицы 3×3, данные в работе Гелл-Манна /8/. Тогда 11 операторов (1) и (2) и 24 операторов вида

$$I_{ij,\alpha} = \frac{1}{2} \int \psi^+(x) \frac{\gamma_i\gamma_j - \gamma_j\gamma_i}{4i} \lambda_\alpha\, \psi(x)\, d^3x, \quad i,j = 1,2,3, \; \alpha = 1,2,\dots 8 \qquad (3)$$

являются инфинитезимальными операторами группы SU_6 (см. также работы /10,11/). Для удобства эти 35 операторов будем обозначать через I_A, а структурные константы – через f_{AB}^{C},

$$[I_A, I_B] = f_{AB}^{C}\, I_C . \qquad (4)$$

Операторы S_{ij} в (1) являются компонентами антисимметричного тензора второго ранга (относительно группы Лоренца)

$$S_{\mu\nu} = \int \psi^+(x) \frac{\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu}{4i} \psi(x)\, d^3x, \; \nu,\mu = 0,1,2,3, \; \gamma_i^+ = \gamma_i, \; \gamma_0 = \frac{1}{i}\gamma_4, \; \gamma_4^+ = \gamma_4 . \qquad (5)$$

В силу трансформационных свойств тензора $S_{\mu\nu}$ каждая компонента S_{ij}, $i,j = 1,2,3$ при преобразованиях Лоренца может превращаться в линейную комбинацию всех компонент $S_{\mu\nu}$, $\mu,\nu = 0,1,2,3$. Поэтому любая релятивистски инвариантная группа, содержащая инфинитезимальные операторы S_{ij}, должна содержать все инфинитезимальные операторы $S_{\mu\nu}$. Аналогично, искомая релятивистски инвариантная группа симметрии, содержащая в себе группы SU_6 с инфинитезимальными операторами (1), (2) и (3), должна содержать все инфинитезимальные операторы

$$I_{\mu\nu,\alpha} = \frac{1}{2} \int \psi^+(x) \frac{\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu}{4i} \lambda_\alpha\, \psi(x)\, d^3x , \qquad (6)$$

которые вместе с операторами в (5) и операторами вида

$$J_\alpha = \frac{1}{2i} \int \psi^+(x)\, \gamma_5\, \lambda_\alpha\, \psi(x)\, d^3x \qquad (7)$$

образуют алгебру Ли группы $SL(6)$. 35 инфинитезимальных операторов группы SU_6 обозначаем через I_A, а 35 остальных – через J_A. Вместе с (4) мы имеем коммутационные соотношения

$$[I_A, J_B] = f_{AB}^{C}\, J_C , \qquad (8)$$

$$[J_A, J_B] = - f_{AB}^{C}\, I_C . \qquad (9)$$

Получив группу $SL(6)$ на основе изучения простого примера, мы теперь предполагаем, что симметрия элементарных частиц описывается некоторой группой $SL(6)$; группа SU_6 Гурсея, Радикати, Пайса и Сакиты /1-4/, а также группа $SL(2)$, изоморфная однородной собственной группе Лоренца, являются подгруппами этой новой группы $SL(6)$. В рассмотренном примере последняя группа $SL(2)$ является спиновой группой. Однако можно также сделать предположение о том, что эта группа $SL(2)$ сама является однородной собственной группой Лоренца, т.е. $S_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}$.

3. Конечномерные неприводимые представления группы $SL(6)$

Вещественные параметры, соответствующие инфинитезимальным операторам I_A и J_A, обозначим через α_A и β_A соответственно. Элемент группы, соответствующий бесконечно малым значениям α_A и β_A, имеет вид:

$$g(\alpha_A, \beta_A) = 1 + i I_A \alpha_A + i J_A \beta_A . \qquad (10)$$

Рассмотрим некоторое представление группы $SL(6)$ линейными преобразованиями в некотором гильбертовом пространстве. Преобразование, соответствующее элементу $g(\alpha_A, \beta_A)$, обозначим через

$$U(\alpha_A, \beta_A) = 1 + i\left(\hat{I}_A \alpha_A + \hat{J}_A \beta_A\right) . \qquad (11)$$

Операторы $\hat{I}_A$ и $\hat{J}_A$ также удовлетворяют коммутационным соотношениям вида (4), (8) и (9). Так как группа $SL(6)$ некомпактна, то её унитарные неприводимые представления бесконечномерны, за исключением одномерного представления. Здесь мы будем рассматривать конечномерные (неунитарные) неприводимые представления этой группы. Для таких представлений операторы $\hat{I}_A$ эрмитовы, а $\hat{J}_A$ антиэрмитовы

$$\hat{I}_A^+ = \hat{I}_A , \quad \hat{J}_A = i \hat{K}_A , \quad \hat{K}_A^+ = \hat{K}_A . \qquad (12)$$

Положим

$$\hat{I}_A^{(\pm)} = \frac{1}{2}\left(\hat{I}_A \pm \hat{K}_A\right) . \qquad (13)$$

Тогда из коммутационных соотношений вида (4), (8) и (9) для операторов $\hat{I}_A$ и $\hat{J}_A$ нетрудно увидеть, что операторы $\hat{I}_A^{(\pm)}$ образуют алгебру Ли группы $SU_6 \times SU_6$. Таким образом, конечномерные (неунитарные) неприводимые представления группы $SL(6)$ аналогичны унитарным неприводимым представлениям группы $SU_6 \times SU_6$. В частности, из (II)-(I3) следует, что для конечномерных неприводимых представлений группы $SL(6)$ матрица, соответствующая элементу (I0), имеет вид:

$$U(\alpha_A,\beta_A) = 1 + i(\alpha_A + i\beta_A)\hat{I}_A^{(+)} + i(\alpha_A - i\beta_A)\hat{I}_A^{(-)}, \qquad (I4)$$

где $\hat{I}_A^{(+)}$ и $\hat{I}_A^{(-)}$ коммутируют и каждая система из них образует алгебру Ли группы SU_6.

Как и в случае спинорных представлений однородной собственной группы Лоренца для спинорных представлений группы $SL(6)$ мы введем спиноры с пунктирным и непунктирным (верхним) индексом χ^B и $\chi^{\dot B}$, преобразующиеся следующим образом при преобразованиях $g(\alpha_A,\beta_A)$ группы $SL(6)$

$$\chi^B \to \left[1 + i(\alpha_A + i\beta_A)\hat{I}_A\right]_{BC}\chi^C, \qquad (I5)$$

$$\chi^{\dot B} \to \left[1 + i(\alpha_A - i\beta_A)\hat{I}_A\right]_{BC}\chi^{\dot C},$$

где $[\hat{I}_A]_{BC}$ - матрицы представлений группы SU_6. Аналогично определяются спиноры с несколькими верхними индексами $\chi^{BC\ldots\dot D\dot E\ldots}$. Теперь рассмотрим спиноры с нижним индексом χ_B и $\chi_{\dot B}$, преобразующиеся так, чтобы величины $\chi_B\chi^B$ и $\chi_{\dot B}\chi^{\dot B}$ были инвариантны. Если χ^B и $\chi^{\dot B}$ преобразуются следующим образом

$$\chi^B \to U_{BC}\chi^C, \quad \chi^{\dot B} \to V_{BC}\chi^{\dot C}, \qquad (I6)$$

то для χ_B и $\chi_{\dot B}$ мы имеем

$$\chi_B \to \chi_C U^{-1}_{CB} = [U^{-1}]^T_{BC}\chi_C, \quad \chi_{\dot B} \to \chi_{\dot C} V^{-1}_{CB} = [V^{-1}]^T_{BC}\chi_{\dot C}, \qquad (I7)$$

или для бесконечно малых преобразований

$$\chi_B \to \chi_C\left[1 - i(\alpha_A + i\beta_A)\hat{I}_A\right]_{CB}, \qquad (I8)$$

$$\chi_{\dot B} \to \chi_{\dot C}\left[1 - i(\alpha_A - i\beta_A)\hat{I}_A\right]_{CB}.$$

Аналогично определяются любые спиноры $\chi^{B\ldots\dot C\ldots}_{D\ldots\dot E\ldots}$.

Рассмотрим теперь трансформационные свойства спиноров $\chi^{B\ldots\dot C\ldots}_{D\ldots\dot E\ldots}$ относительно пространственного отражения P. Как известно, P коммутирует с S_{ij}, но антикоммутирует с S_{0i}

$$PS_{ij} = S_{ij}P, \qquad PS_{0i} = -S_{0i}P. \qquad (I9)$$

В простом примере, рассмотренном в п.2, мы имеем:

$$PI_A = I_A P, \qquad PJ_A = -J_A P. \qquad (20)$$

Мы будем предполагать, что коммутационные соотношения (20) имеют место для рассматриваемой группы $SL(6)$ вообще, независимо от интерпретации подгруппы $SL(2)$, изоморфной однородной собственной группы Лоренца. Тогда мы имеем следующие трансформационные свойства спиноров

$$P\chi^B = \chi^{\dot B}, \quad P\chi^{\dot B} = \chi^B, \quad P\chi_B = \chi_{\dot B}, \quad P\chi_{\dot B} = \chi_B,$$

и в общем случае

$$P\chi^{B\ldots\dot C\ldots}_{D\ldots\dot E\ldots} = \chi^{C\ldots\dot B\ldots}_{E\ldots\dot D\ldots}. \qquad (2I)$$

Это преобразование означает, грубо говоря, переход правополяризованных состояний в левополяризованные.

В дальнейшем мы будем рассматривать трилинейные лагранжианы взаимодействия, инвариантные относительно преобразований группы $SL(6)$. Для этой цели необходимо изучить также трансформационные свойства спиноров, комплексно (или эрмитово) сопряженных спинорам в (I5) и (I8). Так как для конечномерных неприводимых представлений операторы $\hat{I}_A^{(\pm)}$ эрмитовы, то мы имеем

$$(\chi^B)^* = \left[1 - i(\alpha_A - i\beta_A)\hat{I}_A\right]^T_{BC}(\chi^C)^* = (\chi^C)^*\left[1 - i(\alpha_A - i\beta_A)\hat{I}_A\right]_{CB},$$

$$(\chi^{\dot B})^* = \left[1 - i(\alpha_A + i\beta_A)\hat{I}_A\right]^T_{BC}(\chi^{\dot C})^* = (\chi^{\dot C})^*\left[1 - i(\alpha_A + i\beta_A)\hat{I}_A\right]_{CB}. \qquad (22)$$

Сравнивая (I8) и (22), мы видим, что если χ^B и $\chi^{\dot B}$ преобразуются согласно (I5), то $(\chi^{\dot B})^*$ и $(\chi^B)^*$ преобразуются согласно (I8), а именно $(\chi^{\dot B})^*$ преобразуется как χ_B, а $(\chi^B)^*$ - как $\chi_{\dot B}$. Поэтому положим

$$(\chi^B)^* = \chi^+_{\dot B}, \quad (\chi^{\dot B})^* = \chi^+_B, \qquad (23)$$

или в общем случае

$$\left(\chi^{B\ldots\dot C\ldots}_{D\ldots\dot E\ldots}\right)^* = [\chi^+]^{E\ldots\dot D\ldots}_{C\ldots\dot B\ldots}. \qquad (24)$$

Отметим, что именно здесь обнаруживается разница между свойствами конечномерных представлений группы $SL(6)$ и группы $SU_6 \times SU_6$. Если мы рассматриваем, например, χ^B как представление группы $SU_6 \times SU_6$, то $(\chi^B)^*$ преобразуется как χ_B, а не как $\chi^+_{\dot B}$.

4. Обобщение уравнений Дирака

Теперь рассмотрим уравнения для волновых функций, осуществляющих конечномерные представления группы $SL(6)$, например, Φ^A и $\chi^{\dot A}$. Здесь индекс A обозначает пару индексов (α, a), где α - индекс унитарной группы, а a - спиновый индекс, $\alpha = 1, 2, 3$, $a = 1, 2$.

Уравнения для Φ^A и $\chi^{\dot A}$ получаются обобщением уравнения Дирака для волновых функций Φ^a и $\chi^{\dot a}$, осуществляющих спинорные представления однородной собственной группы Лоренца

$$(\hat\partial)^{\dot a'}_{a}\Phi^{a} + m\chi^{\dot a'} = 0,$$
$$(\hat\partial)^{a'}_{\dot a}\chi^{\dot a} + m\Phi^{a'} = 0, \qquad (25)$$

где

$$\hat\partial = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\sigma_\mu, \quad (\sigma_0)^{\dot a'}_{a} = (\sigma_0)^{a'}_{\dot a} = \frac{1}{i}\delta_{a\dot a}, \quad (\sigma_i)^{\dot a'}_{a} = -(\sigma_i)^{a'}_{\dot a} = i[\sigma_i]_{\dot a a}, \qquad (26)$$

а $[\sigma_i]_{\dot a a}$ – матричные элементы матрицы Паули σ_i. Если введем спинор Дирака

$$\psi = \begin{pmatrix}\Phi\\ \chi\end{pmatrix}, \qquad (27)$$

а матрицы γ_μ Дирака

$$\gamma_0 = \frac{1}{i}\gamma_4, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix}0 & -i\sigma_i\\ i\sigma_i & 0\end{pmatrix}, \qquad (28)$$

то мы можем переписать уравнения (25) в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\gamma_\mu + m\right)\psi = 0. \qquad (29)$$

Инвариантность уравнения Дирака (29) или (25) показывает, что $(\hat\partial)^{\dot a'}_{a}$ и $(\hat\partial)^{a'}_{\dot a}$ преобразуются как соответствующие тензоры при преобразованиях Лоренца. Отметим, что при пространственном отражении Φ^a переходит в $\chi^{\dot a}$, а $\chi^{\dot a}$ – в Φ^a.

Уравнения для Φ^A и $\chi^{\dot A}$ должны быть обобщением уравнений (25). Для изучения трансформационных свойств этих уравнений относительно преобразований группы $SL(6)$ необходимо рассмотреть трансформационные свойства тензоров $(\hat\partial)^{\dot a'}_{a}$ и $(\hat\partial)^{a'}_{\dot a}$. Здесь имеются две возможности: либо эти величины являются компонентами некоторых спиноров второго ранга вида $\varphi_A^{\dot B}$ и $\varphi_{\dot A}^{B}$ группы SU_2, но инварианты относительно преобразований группы SU_3, либо они являются спинором второго ранга подгруппы $SL(2)$, но инварианты относительно преобразований подгруппы $SL(3)$ прямого произведения $SL(3)\times SL(2)\subset SL(6)$. В первом случае путем обобщения уравнений (25) можно получить волновые уравнения, инвариантные относительно группы $SL(6)$, а во втором случае волновые уравнения (даже для свободных частиц) нарушают симметрию группы $SL(6)$, так как они содержат тензоры $(\hat\partial)^{\dot a'}_{a}$ и $(\hat\partial)^{a'}_{\dot a}$, не осуществляющие неприводимых представлений группы $SL(6)$. В первом случае автоматически получается объединение группы внутренних симметрий с группой пространственно-временных трансляций и тем самым с неоднородной группой Лоренца. Эта возможность будет изучена отдельно. В настоящей работе мы рассматриваем второй случай.

Уравнения для Φ^A и $\chi^{\dot A}$, полученные путем обобщения уравнений (25), должны содержать величины $(\hat\partial)^{\dot a'}_{a}\Phi^{(\alpha,a)}$ и $(\hat\partial)^{a'}_{\dot a}\chi^{(\dot\alpha,\dot a)}$. Относительно группы $SL(2)$ (или однородной

собственной группы Лоренца) $(\hat\partial)^{\dot a'}_{a}\Phi^{(\alpha,a)}$ преобразуется как $\chi^{(\dot\alpha,\dot a')}$, а $(\hat\partial)^{a'}_{\dot a}\chi^{(\dot\alpha,\dot a)}$ – как $\Phi^{(\alpha,a')}$. С другой стороны, волновые уравнения должны связывать спиноры $\Phi^{(\alpha,a)}$ и $\chi^{(\dot\alpha,\dot a)}$. Поэтому мы будем предполагать, что волновые уравнения для $\Phi^{(\alpha,a)}$ и $\chi^{(\dot\alpha,\dot a)}$ имеют вид:

$$(\hat\partial)^{\dot a'}_{a}\Phi^{(\alpha,a)} + m\chi^{(\dot\alpha,\dot a')} = 0,$$
$$(\hat\partial)^{a'}_{\dot a}\chi^{(\dot\alpha,\dot a)} + m\,\Phi^{(\alpha,a)} = 0. \qquad (30)$$

Очевидно, что уравнения (30) релятивистски инвариантны. Так как $\Phi^{(\alpha,a)}$ и $\chi^{(\dot\alpha,\dot a)}$ преобразуются по одному и тому же неприводимому представлению группы унитарной симметрии SU_3 (но по разным представлениям группы $SL(6)$), то уравнения (30) также инвариантны относительно унитарной группы SU_3. При пространственном отражении спиноры Φ^a и $\chi^{\dot a}$ в (25) переходят друг в друга. Аналогично, спиноры $\Phi^{(\alpha,a)}$ и $\chi^{(\dot\alpha,\dot a)}$ переходят друг в друга при этом отражении, а система уравнений (30) инвариантна. Введем спинор Дирака

$$\psi^\alpha = \begin{pmatrix}\Phi^{(\alpha,a)}\\ \chi^{(\dot\alpha,\dot a)}\end{pmatrix}. \qquad (31)$$

Тогда система (30) эквивалентна уравнению Дирака для ψ^α.

5. <u>Билинейные комбинации волновых функций, векторные</u> и <u>аксиальные токи</u>

Рассмотрим теперь трансформационные свойства билинейных комбинаций волновых функций, являющихся спинорами группы $SL(6)$. По определению эти билинейные комбинации имеют вид линейных комбинаций произведений спиноров в уравнениях (30), например, и сопряженных им спиноров. Для $\Phi^A, \chi^{\dot A}, \Phi^+_{\dot A}, \chi^+_A$ (см. соотношение (23)) мы имеем произведения

$$\Phi^+_{\dot A}\Phi^{A'}, \quad \chi^+_A\chi^{\dot A'} \qquad (32)$$

и

$$\Phi^+_{\dot A}\chi^{\dot A'}, \quad \chi^+_A\Phi^{A'}. \qquad (33)$$

Согласно законам преобразований спиноров относительно группы $SL(6)$ (см. соотношения (16) и (17)), из произведений (33) можно образовать инварианты группы $SL(6)$

$$\Phi^+_{\dot A}\chi^{\dot A} \quad \text{и} \quad \chi^+_A\Phi^A, \qquad (34)$$

а из произведений (32) образовать инварианты невозможно. При пространственном отражении инварианты $\Phi^+_{\dot A}\chi^{\dot A}$ и $\chi^+_A\Phi^A$ переходят друг в друга, поэтому их сумма является скаляром, а разность – псевдоскаляром:

$$S = \Phi^+_{\dot A}\chi^{\dot A} + \chi^+_A\Phi^A ,$$
$$P = \chi^+_A\Phi^A - \Phi^+_{\dot A}\chi^{\dot A} . \qquad (35)$$

Если введем спинор Дирака (27), то мы имеем

$$S = \overline{\Psi}\Psi , \qquad P = \overline{\Psi}\gamma_5\Psi ,$$

где суммирование по унитарному индексу α подразумевается, а $\overline{\Psi} = \Psi^+\gamma_4$, $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$. Отметим, что, если спиноры $\Phi^A, \chi^{\dot A}$ рассматриваются как неприводимые представления группы $SU_6 \times SU_6$, то инварианты имеют вид комбинаций произведений типа $\psi^+\psi$ и $\chi^+\chi$. Здесь ещё раз обнаруживается разница между двумя подходами, основанными на группах $SL(6)$ и $SU_6 \times SU_6$.

Аналогично из спиноров третьего ранга группы $SL(6)$, например $\Phi^{AB\dot C}$ и $\chi^{C\dot B\dot A}$, также можно образовать инварианты $\Phi^+_{C\dot B\dot A}\chi^{C\dot B\dot A}$ и $\chi^+_{AB\dot C}\Phi^{AB\dot C}$, сумма и разность которых являются скаляром и псевдоскаляром, соответственно,

$$S = \Phi^+_{C\dot B\dot A}\chi^{C\dot B\dot A} + \chi^+_{AB\dot C}\Phi^{AB\dot C} ,$$
$$P = \chi^+_{AB\dot C}\Phi^{AB\dot C} - \Phi^+_{C\dot B\dot A}\chi^{C\dot B\dot A} . \qquad (36)$$

Теперь посмотрим, как можно образовать векторные и аксиальные токи из произведений типа (32) или (33). Прежде всего напомним, что из спиноров Φ^a и $\chi^{\dot a}$ однородной собственной группы Лоренца и сопряженных им спиноров $\Phi^+_{\dot a}$ и χ^+_a можно образовать векторные и аксиальные токи следующим образом. Пусть q^μ – некоторый 4-вектор. Тогда, как это было указано в предыдущем параграфе, матричные элементы

$$(\hat q)_a^{\dot b} = q^\mu(\sigma_\mu)_a^{\dot b} , \qquad (\hat q)_{\dot a}^{b} = q^\mu(\sigma_\mu)_{\dot a}^{b} ,$$

где $(\sigma_\mu)_{\dot a}^{b}$ и $(\sigma_\mu)_a^{\dot b}$ определяются согласно (26), преобразуются при преобразованиях Лоренца как соответствующие спиноры, и величины

$$q^\mu(\sigma_\mu)_a^{\dot b}\Phi^+_{\dot b}\Phi^a = \Phi^+_{\dot b}(\hat q)_a^{\dot b}\Phi^a ,$$
$$q^\mu(\sigma_\mu)_{\dot a}^{b}\chi^+_b\chi^{\dot a} = \chi^+_b(\hat q)_{\dot a}^{b}\chi^{\dot a}$$

являются инвариантами. Таким образом, токи

$$j_\mu^{(+)} = \Phi^+_{\dot b}(\sigma_\mu)_a^{\dot b}\Phi^a \qquad (37)$$

и

$$j_\mu^{(-)} = \chi^+_b(\sigma_\mu)_{\dot a}^{b}\chi^{\dot a} \qquad (38)$$

преобразуются как 4-векторы при однородных собственных преобразованиях Лоренца. Из (26) следует, что сумма этих токов является векторным током, а их разность является аксиальным током.

Применяя указанный метод, из произведений (32) мы можем образовать векторные и аксиальные токи

$$(j_\mu^V)_\beta^\alpha = \frac{1}{2}\left[(j_\mu^{(+)})_\beta^\alpha + (j_\mu^{(-)})_\beta^\alpha\right] , \qquad (39)$$

и

$$(j_\mu^A)_\beta^\alpha = \frac{1}{2}\left[(j_\mu^{(+)})_\beta^\alpha - (j_\mu^{(-)})_\beta^\alpha\right] , \qquad (40)$$

где $(j_\mu^{(+)})_\beta^\alpha$ и $(j_\mu^{(-)})_\beta^\alpha$ определяются соотношениями, аналогичными (37) и (38), а именно

$$(j_\mu^{(+)})_\beta^\alpha = \Phi^+_{(\beta\dot b)}(\sigma_\mu)_a^{\dot b}\Phi^{(\alpha a)} , \qquad (41)$$

и

$$(j_\mu^{(-)})_\beta^\alpha = \chi^+_{(\beta b)}(\sigma_\mu)_{\dot a}^{b}\chi^{(\alpha\dot a)} . \qquad (42)$$

Аналогично из спиноров высших рангов также можно образовать векторные и аксиальные токи.

Рассмотрим теперь дивергенции токов (41) и (42) для свободных полей, удовлетворяющих уравнениям (30). Мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}(j_\mu^{(+)})_\beta^\alpha = \left[\frac{\partial\Phi^+_{(\beta\dot b)}}{\partial x_\mu}\Phi^{(\alpha a)} + \Phi^+_{(\beta\dot b)}\frac{\partial\Phi^{(\alpha a)}}{\partial x_\mu}\right](\sigma_\mu)_a^{\dot b} .$$

Но в силу уравнений (30) и соотношений (26)

$$\frac{\partial\Phi^{(\alpha a)}}{\partial x_\mu}[\sigma_\mu]_a^{\dot b} = -m\chi^{(\alpha\dot b)} ,$$

$$\frac{\partial\Phi^+_{(\beta\dot b)}}{\partial x_\mu}(\sigma_\mu)_a^{\dot b} = \left[-\frac{\partial\Phi^{(\beta b)}}{\partial x_\mu}(\sigma_\mu)_{\dot a}^{b}\right]^* = m\left[\chi^{(\beta\dot a)}\right]^* = m\chi^+_{(\beta a)} .$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}(j_\mu^{(+)})_\beta^\alpha = m\left[\chi^+_{(\beta a)}\Phi^{(\alpha a)} - \Phi^+_{(\beta\dot a)}\chi^{(\alpha\dot a)}\right] . \qquad (43)$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}(j_\mu^{(-)})_\beta^\alpha = m\left[\Phi^+_{(\beta\dot a)}\chi^{(\alpha\dot a)} - \chi^+_{(\beta a)}\Phi^{(\alpha a)}\right] . \qquad (44)$$

Складывая и вычитая (43) и (44), мы видим, что векторные токи сохраняются

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(j^{\,V}_\mu\right)^\alpha_\beta = 0\,, \tag{45}$$

аксиальные
а ~~скалярные~~ токи не сохраняются

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(j^{\,A}_\mu\right)^\alpha_\beta = m\left[\chi^+_{(\beta\alpha)}\,\Phi^{(\alpha\alpha)} - \Phi^+_{(\dot\beta\dot\alpha)}\,\chi^{(\dot\alpha\dot\alpha)}\right]. \tag{46}$$

Выражения токов для спиноров высших рангов, например, $\Phi^{AB\dot C}$ и $\chi^{\dot C\dot B\dot A}$, и дивергенций этих токов также можно написать аналогично.

6. Мезонный мультиплет, взаимодействующий с векторными и аксиальными токами

Рассмотрим теперь трансформационные свойства волновых функций мезонного мультиплета, взаимодействующего с токами (4I) и (42) или (39) и (40). Мы потребуем, чтобы лагранжиан взаимодействия был инвариантен относительно группы $SL(6)$. Тогда этот мезонный мультиплет должен осуществлять спинорные представления $\varphi_{\dot B}^{\;A}$ и $\varphi_{B}^{\;\dot A}$ группы $SL(6)$, переходящие друг в друга при пространственном отражении, т.е. обладать такими же трансформационными свойствами, что и токи (4I) и (42). Лагранжиан взаимодействия, инвариантный относительно пространственного отражения и относительно группы $SL(6)$, имеет вид:

$$\mathcal{L} = g\left[\Phi^+_{\dot A}\,\Phi^B\left[\varphi^{(+)}\right]_B^{\;\dot A} + \chi^+_A\,\chi^{\dot B}\left[\varphi^{(-)}\right]_{\dot B}^{\;A}\right]. \tag{47}$$

По аналогии с (4I) и (42) величины

$$\left(\varphi^{(+)}_\mu\right)^\alpha_\beta = \left(\sigma_\mu\right)^{\ell}_{\dot\alpha}\left[\varphi^{(+)}\right]^{(\dot\alpha\dot\alpha)}_{(\beta\ell)} \tag{48}$$

и

$$\left(\varphi^{(-)}_\mu\right)^\alpha_\beta = \left(\sigma_\mu\right)^{\dot\ell}_{\alpha}\left[\varphi^{(-)}\right]^{(\alpha\alpha)}_{(\beta\dot\ell)}\,, \tag{49}$$

преобразуются как 4-векторы при собственных преобразованиях Лоренца. Их сумма является 4-вектором, а их разность – 4 псевдовектором,

$$\left(V_\mu\right)^\alpha_\beta = \frac{1}{2}\left\{\left(\varphi^{(+)}_\mu\right)^\alpha_\beta + \left(\varphi^{(-)}_\mu\right)^\alpha_\beta\right\}, \tag{50}$$

$$\left(A_\mu\right)^\alpha_\beta = \frac{1}{2}\left\{\left(\varphi^{(+)}_\mu\right)^\alpha_\beta - \left(\varphi^{(-)}_\mu\right)^\alpha_\beta\right\}, \tag{5I}$$

а лагранжиан (47) имеет вид:

$$\mathcal{L} = g\left\{\left(j^{\,V}_\mu\right)^\alpha_\beta\left(V^\mu\right)^\beta_\alpha + \left(j^{\,A}_\mu\right)^\alpha_\beta\left(A^\mu\right)^\beta_\alpha\right\}. \tag{52}$$

Таким образом, существуют лагранжианы взаимодействия, инвариантные относительно группы $SL(6)$, несмотря на то, что сами волновые уравнения для свободных полей нарушают эту симметрию. Отметим, что векторные и аксиальные токи входят в лагранжиан (52) симметрично.

Если рассматривать 4-вектор V_μ или 4-псевдовектор A_μ как представления спиновой группы SU_2, то они приводимы: каждое из этих представлений распадается на два неприводимых представления, соответствующих состояниям со спинами 0 и I. Однако в релятивистской квантовой теории поля каждое неприводимое представление группы Лоренца, например, 4-вектор V_μ или 4-псевдовектор A_μ, характеризует только состояние одной частицы с определенным спином, а лишние компоненты исключаются при помощи дополнительных условий. Если потребуем, чтобы спин частиц был равен I, то мы имеем[17]

$$\frac{\partial V_\mu}{\partial x_\mu} = 0\,, \qquad \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0\,, \tag{53}$$

а если спин равен 0, то

$$V_\mu = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial\varphi_s}{\partial x^\mu}\,, \qquad A_\mu = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial\varphi_p}{\partial x^\mu}\,, \tag{54}$$

где $\varkappa$ – константа размерности массы, а φ_s и φ_p-скалярная и псевдоскалярная функции.

Так как векторные токи сохраняются, то мезоны с волновыми функциями $\left(V_\mu\right)^\alpha_\beta$ не взаимодействуют с этими токами, если $\left(V_\mu\right)^\alpha_\beta$ имеют вид первого соотношения (54). Таким образом, $\left(V_\mu\right)^\alpha_\beta$ могут описывать только состояния 9 векторных мезонов. Что касается 4-псевдовекторов $\left(A_\mu\right)^\alpha_\beta$, то они описывают либо состояния 9 псевдовекторных мезонов, либо состояния 9 псевдоскалярных мезонов. Согласно экспериментальным данным, осуществляется, по-видимому, вторая возможность. Из условия нормировки волновых функций A_μ и φ_p следует, что константа $\varkappa$ равна массе μ мезонов.

Таким образом, спиноры $\left[\varphi^{(+)}\right]_B^{\;\dot A}$ и $\left[\varphi^{(-)}\right]_{\dot B}^{\;A}$ описывают либо нонеты векторных и псевдовекторных мезонов, либо нонеты векторных и псевдоскалярных мезонов*), причем во втором случае лагранжиан взаимодействия имеет вид:

$$\mathcal{L} = g\left\{\left(V^\mu\right)^\alpha_\beta\left(j^{\,V}_\mu\right)^\beta_\alpha + \frac{1}{\mu}\frac{\partial\left(\varphi_p\right)^\alpha_\beta}{\partial x_\mu}\left(j^{\,A}_\mu\right)^\beta_\alpha\right\}. \tag{55}$$

Этот лагранжиан также был получен в работе[15] при помощи других рассуждений.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Н.Н. Боголюбову, М.А. Маркову, В.И. Огиевецкому, И.В. Полубаринову, Р.М. Рындину, Я.А. Смородинскому и А.Н. Тавхелидзе за интерес к работе и ценные замечания.

---

*) В следующей работе мы покажем, что в силу уравнений для полей $\varphi_B^{\;\dot A}$ и $\varphi_{\dot B}^{\;A}$ волновые функции $\left(\varphi_p\right)^\alpha_\beta$ удовлетворяют условию $\left(\varphi_p\right)^\alpha_\alpha = 0$, т.е. описывают не нонет, а октет.

Литература:

I. F.Gursey and L.A.Radicati. Phys.Rev.Lett., 13, 173 (1964).

2. A.Pais. Phys,Rev,Lett. 13, 175 (1964).

3. F.Gursey, A.Pais and L.A.Radicati. Phys.Rev.Lett., 13, 239 (1964).

4. B.Sakita, Phys.Rev.Lett., 13 , 643 (1964).

5. T.K.Kuo and T.Yao. Phys.Rev.Lett. 13 , 415 (1964).

6. M.A.Beg and V.Singh, Phys.Rev.Lett., 13 , 418, 509 (1964).

7. M.A.Beg, B.W.Lee and A.Pais. Phys.Rev.Lett. 13 , 514 (1964).

8. M.Gell-Mann, Phys.Rev.125 , 1067 (1962).

9. Y.Ne'eman, Nucl.Phys., 26 , 222 (1961).

IO. R.P.Feynman, M.Gell-Mann and G.Zweig. Phys.Rev.Lett., 13 , 678 (1964).

II. M.Gell-Mann, Physics 1, 63 (1964).

I2. R.Delbourgo, A.Salam and J.Strathadee, preprint, Trieste, 1964.

I3. A.Salam, preprint Trieste, 1964.

I4. K.Bardacki, J.M.Cornwall, P.G.O.Freund and B.W.Lee, Phys.Rev.Lett., 23 ,698 (1964).

I5. M.A.Beg and A.Pais. Preprint, New York, 1964.

I6. В.Г. Кадышевский, Р.М. Мурадян, А.Н. Тавхелидзе и И.Т. Тодоров, препринт ОИЯИ, Д-I929, I964 г.

I7. В.И. Огиевецкий и И.В. Полубаринов, ЖЭТФ, 4I, 247 (I96I); 45, 237, (I963).

18. T. Fulton and J. Wess, Phys. Lett., 14 , 57 (1965).

Рукопись поступила в издательский отдел I6 января I965 года.

Примечание при корректуре.

После того как работа была направлена в печать, автор познакомился с работой Фултона и Вьесса[I8], в которой также была предложена группа SL(6).