27/II-65

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-1953

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

З. Галясевич

УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ СВЕРХТЕКУЧЕЙ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ И ДВУХЧАСТИЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Phys. Lett, 1965, v15, n1, p 39-40

1965

2967/1 ИР

З. Галясевич[x/]

УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ СВЕРХТЕКУЧЕЙ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ И ДВУХЧАСТИЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Направлено в "Nuclear Physics"

[x/] Постоянный адрес: Институт теоретической физики Вроцлавского университета, Вроцлав, Польша.

Введение

Рассматривается система одинаковых ферми-частиц с парным взаимодействием (в системе находится конденсат из связанных пар). Целью настоящей работы является получение двухчастичных функций Грина в "гидродинамическом приближении". Функции Грина являются вариационными производными гидродинамических средних по источникам для исчезающих источников. Гидродинамическими средними называем средние от операторов, взятые со статистическим оператором, когда параметры, характеризующие локальные статистические равновесия, являются медленно меняющими функциями пространства и времени. Уравнения для нужных нам гидродинамических средних, т.е. уравнения гидродинамики с источниками, выведены из уравнений движения системы, гамильтониан которой в представлении вторичного квантования имеет вид

$$H = \frac{1}{2m}\int \nabla\psi^+(t,x)\nabla\psi(t,x)\,dx - \lambda\int\psi^+(t,x)\psi(t,x)\,dx + \\ + \frac{1}{2}\iint V(r-r')\psi^+(t,x)\psi^+(t,x')\psi(t,x')\psi(t,x)\,dx\,dx' + \\ + \iint\left[\tilde{\eta}(t|x,x')\psi^+(t,x)\psi^+(t,x') + \tilde{\eta}^*(t|x,x')\psi(t,x)\psi(t,x')\right]dx\,dx'. \quad (1)$$

Здесь λ - постоянная, $x=(\vec{r},s)$, где $\vec{r}$ обозначает совокупность пространственных переменных, а s -спиновую переменную, $\psi(t,x)$, $\psi^+(t,x)$ – ферми-операторы в представлении Гейзенберга с обычными перестановочными соотношениями. Они выражаются "квазидискретными" суммами

$$\psi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{(k)} a_{ks}(t)e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad \psi^+(t,x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{(k)} a^+_{ks}(t)e^{-i\vec{k}\vec{r}} \quad (2)$$

через операторы рождения a^+_{ks} и уничтожения a_{ks}, удовлетворяющие обычным соотношениям Ферми. $\int dx$ обозначает интегрирование по пространственным переменным и суммирование по s . (Мы пользуемся системой единиц, в которой $\hbar = 1$).

В гамильтоинан введены дополнительные члены с "источниками пар" $\tilde{\eta}$, $\tilde{\eta}^{+}$, которые являются заданными c-функциями t, x . Введение таких "внешних источников" нужно для того, чтобы брать по отношению к ним вариации от гидродинамических средних и таким образом получать выражения для функций Грина.

Надо подчеркнуть, что связь между вариациями гидродинамических средних с функциями Грина верна только в случае малого отклонения от состояния статистического равновесия. Таким образом, для вычисления вариации гидродинамических средних от равновесных величин нужны не полные уравнения гидродинамики, а лишь линеаризованные акустические уравнения. В соответствии с этим после получения полных уравнений гидродинамики сверхтекучей ферми-жидкости будем пользоваться только их акустическим приближением.

В работе применяется метод, предложенный Н.Н. Боголюбовым для получения одночастичных функций Грина в случае сверхтекучей бозе-жидкости /I/.

Связи гидродинамических уравнений с одночастичными функциями Грина (или корреляционными функциями) посвящены также работы /2,3,4/.

§ I. Производные по времени некоторых "локальных величин"

Для получения уравнений гидродинамики нам нужны выражения для производных по времени следующих "локальных величин":

$$\varrho(t,r) = \sum_{s} \langle \psi^{+}(t,x)\psi(t,x) \rangle \quad , \quad \Phi(t|x_1,x_2) = \langle \psi(t,x_1)\psi(t,x_2) \rangle ,$$

$$j_{\alpha}(t,r) = \frac{i}{2}\sum_{s} \left\langle \frac{\partial \psi^{+}(t,x)}{\partial r_{\alpha}}\psi(t,x) - \psi^{+}(t,x)\frac{\partial \psi(t,x)}{\partial r_{\alpha}} \right\rangle \quad (\alpha = 1,2,3),$$

$$\varrho(t,r)\varepsilon(t,r) = -\frac{1}{4m}\sum_{s}\langle (\Delta\psi^{+}(t,x))\psi(t,x) + \psi^{+}(t,x)\Delta\psi(t,x) \rangle +$$

$$+ \frac{1}{2}\int V(r-r')\sum_{s,s'}\langle \psi^{+}(t,x)\psi^{+}(t,x')\psi(t,x')\psi(t,x) \rangle \, d\vec{r}', \qquad \text{(I.I)}$$

где ϱ представляет среднюю плотность числа частиц, $\vec{j}$ – средний поток , ε – среднюю энергию на одну частицу. (Под знаком функциональной зависимости пишем вместо $\vec{r}$ просто r). Как показано в /5/ для системы с конденсатом $\langle \psi(t,x_1)\psi(t,x_2) \rangle \neq 0$.

Скобки $\langle \ldots \rangle$ в выражениях (I.I) обозначают средние, взятые с некоторым, вообще говоря, неравновесным статистическим оператором.

Чтобы найти производные по времени от величин (I.I), будем пользоваться уравнениями движения, которые в случае гамильтониана (I) имеют вид:

$$i\frac{\partial \psi(t,x)}{\partial t} = -\lambda\psi(t,x) - \frac{\Delta_r}{2m}\psi(t,x) + \int V(r-r')\psi^{+}(t,x')\psi(t,x')dx'\psi(t,x) +$$
$$+ 2\int \tilde{\eta}(t|x,x')\psi^{+}(t,x')\,dx' ,$$
$$i\frac{\partial \psi^{+}(t,x)}{\partial t} = \lambda\psi^{+}(t,x) + \frac{\Delta_r}{2m}\psi^{+}(t,x) - \psi^{+}(t,x)\int V(r-r')\psi^{+}(t,x')\psi(t,x')dx' -$$
$$- 2\int \tilde{\eta}^{+}(t|x,x')\psi(t,x')\,dx' . \qquad \text{(I.2)}$$

После вычислений, которые аналогичны вычислениям для случая бозе-систем /I/, получаем:

$$m\frac{\partial \varrho(t,r)}{\partial t} + \sum_{\alpha}\frac{\partial j_{\alpha}(t,r)}{\partial r_{\alpha}} = i\,2m\sum_{s,s'}\int\left[\tilde{\eta}^{+}(t|x,x')\Phi(t|x,x') -\right.$$
$$\left. - \tilde{\eta}(t|x,x')\Phi^{*}(t|x,x')\right]d\vec{r}' = S_{\varrho}[\tilde{\eta},\tilde{\eta}^{+}] , \qquad \text{(I.3)}$$

$$\frac{\partial j_{\alpha}(t,r)}{\partial t} = \frac{1}{4m}\frac{\partial}{\partial r_{\alpha}}\Delta\varrho(t,r) - \frac{1}{2m}\sum_{\beta}\frac{\partial}{\partial r_{\alpha}}\sum_{s}\left\langle \frac{\partial\psi^{+}}{\partial r_{\alpha}}\frac{\partial\psi}{\partial r_{\beta}} + \frac{\partial\psi^{+}}{\partial r_{\beta}}\frac{\partial\psi}{\partial r_{\alpha}} \right\rangle -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{\partial V(R)}{\partial R_\alpha}\left\{\mathcal{D}_t(r,-R)+\mathcal{D}_t(r-R,R)\right\}d\vec{R} + S_j^{(\alpha)}[\tilde{\eta},\tilde{\eta}^+] ,$$

(I.4)

$$\frac{\partial \rho(t,r)\varepsilon(t,r)}{\partial t} = \frac{1}{8m^2}\Delta\sum_s\langle(\Delta\psi^+)\psi-\psi^+(\Delta\psi)\rangle +$$

$$+\sum_\beta \frac{\partial}{\partial r_\beta}\left\{\frac{i}{4m^2}\sum_s\left\langle\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\Delta\psi-(\Delta\psi^+)\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}\right\rangle+\int V(R)G_t^{(\beta)}(r,R)\,d\vec{R}\right\} +$$

$$+\sum_\beta\frac{\partial V}{\partial R_\beta}\left\{G_t^{(\beta)}(r,-R)+G_t^{(\beta)}(r-R,R)\right\}d\vec{R} + S_{\rho\varepsilon}[\tilde{\eta},\tilde{\eta}^+] .$$ (I.5)

В (I.4), (I.5) введены следующие обозначения

$$\sum_{s,s'}\langle\psi^+(t,x)\,\psi^+(t,x')\,\psi(t,x')\,\psi(t,x)\rangle \equiv \mathcal{D}_t(r,r'-r)=\mathcal{D}_t(r',r-r') =$$ (I.4a)

$$= \frac{1}{2}\left\{\mathcal{D}_t(r',r-r')+\mathcal{D}_t(r,r'-r)\right\},$$

$$\sum_{s,s'}\frac{i}{4m}\left\langle\psi^+(t,x')\left(\psi^+(t,x)\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial r_\alpha}-\frac{\partial\psi^+(t,x)}{\partial r_\alpha}\psi(t,x)\right)\psi(t,x')\right\rangle \equiv$$

$$\equiv G_t^{(\alpha)}(r,r'-r) , \qquad \vec{R}=\vec{r}-\vec{r}' ,$$ (I.5a)

$$S_j^{(\alpha)}[\tilde{\eta},\tilde{\eta}^+] \equiv \sum_{s,s'}\int\left[\tilde{\eta}^+(t|x,x')\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\Phi(t|x',x)-\Phi(t|x',x)\frac{\partial\tilde{\eta}^+(t|x,x')}{\partial r_\alpha}\right]d\vec{r}' +$$

$$+\sum_{s,s'}\int\left[\tilde{\eta}(t|x,x')\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\Phi^+(t|x',x)-\Phi^+(t|x',x)\frac{\partial\tilde{\eta}(t|x,x')}{\partial r_\alpha}\right]d\vec{r}' ,$$ (I.6)

$$S_{\rho\varepsilon}[\tilde{\eta},\tilde{\eta}^+] \equiv i\sum_{s,s'}\int V(r-r')\left[\tilde{\eta}^+(t|x,x')\Phi(t|x',x)-\tilde{\eta}(t|x,x')\Phi^+(t|x',x)\right]d\vec{r}' +$$

$$+\frac{i}{2m}\sum_{s,s'}\int\left[\tilde{\eta}(t|x,x')\Delta_r\Phi^+(t|x',x)+\Phi^+(t|x',x)\Delta_r\tilde{\eta}(t|x,x')\right]d\vec{r}' -$$

$$-\frac{i}{2m}\sum_{s,s'}\int\left[\tilde{\eta}^+(t|x,x')\Delta_r\Phi(t|x',x)+\Phi(t|x',x)\Delta_r\tilde{\eta}^+(t|x,x')\right]d\vec{r}' +$$

$$+i\sum_{s,s''}\iint V(r-r')\tilde{\eta}^+(t|x,x'')\sum_{s'}\langle\psi^+(t,x')\psi(t,x')\psi(t,x'')\psi(t,x)\rangle\,d\vec{r}'d\vec{r}'' +$$

$$+i\sum_{s',s''}\iint V(r-r')\tilde{\eta}(t|x',x'')\sum_{s}\langle\psi^+(t,x)\psi(t,x)\psi(t,x'')\psi(t,x')\rangle\,d\vec{r}'d\vec{r}'' -$$

$$-i\sum_{s,s''}\iint V(r-r')\tilde{\eta}(t|x,x'')\sum_{s'}\langle\psi^+(t,x')\psi(t,x')\psi(t,x'')\psi(t,x)\rangle^*\,d\vec{r}'d\vec{r}'' -$$

$$-i\sum_{s',s''}\iint V(r-r')\tilde{\eta}(t|x',x'')\sum_{s}\langle\psi^+(t,x)\psi(t,x)\psi(t,x'')\psi(t,x')\rangle^*\,d\vec{r}'d\vec{r}'' ,$$

(I.7)

Так как

$$\Phi(t|x_1,x_2)=-\Phi(t|x_2,x_1) , \qquad \tilde{\eta}(t|x,x')=-\tilde{\eta}(t|x',x) ,$$

можно положить:

$$\Phi(t|x_1,x_2)\equiv\varepsilon(s_1)\Delta(s_1+s_2)\tilde{\Phi}(t|r_1,r_2) , \quad \tilde{\eta}(t|x,x')\equiv\varepsilon(s)\Delta(s+s')\tilde{\eta}(t|r,r'),$$ (I.8)

где $\Delta(s)$ обозначает дискретную δ-функцию

$$\Delta(s)=\begin{cases}1 & s=0 ,\\ 0 & s\neq 0 ,\end{cases}$$

а $\varepsilon(s)\equiv \mathrm{sign}\, S$. Если кроме того положить

$$\sum_{s'}\langle\psi^+(t,x')\psi(t,x')\psi(t,x_1)\psi(t,x_2)\rangle\equiv Y_t(r',r'-r_1,r'-r_2)\,\varepsilon(s_1)\Delta(s_1+s_2),$$ (I.9)

то уравнение для $\tilde{\Phi}$ принимает вид:

$$i\,\frac{\partial\tilde{\Phi}(t|r_1,r_2)}{\partial t}=\left[-\frac{1}{2m}(\nabla_1^2+\nabla_2^2)-2\lambda+V(r_2-r_1)\right]\tilde{\Phi}(t|r_1,r_2)+$$

$$+\int d\vec{r}'\left[V(r_1-r')+V(r_2-r')\right]\gamma_t(r', r'-r_1, r'-r_2) + 2\tilde{\eta}(t|r_1,r_2)+$$

$$+\int\left[\tilde{\eta}(t|r_1,r')\tilde{F}(t|r',r_2)+\tilde{\eta}(t|r_2,r')\tilde{F}(t|r',r_1)\right]d\vec{r}\,',$$

(I.IO)

$\tilde{F}$ входит в определение средней

$$\langle\psi^+(t,x_1)\,\psi(t,x_2)\rangle \equiv F(t|x_1,x_2)=F^*(t|x_2,x_1)\equiv\Delta(s_1-s_2)\,\tilde{F}(t|r_1,r_2),$$

$$F(t|x,x)=\rho(t|x) \quad .$$

Уравнения (I.3)-(1.5) и (1.IO) являются основными для получения уравнений гидродинамики сверхтекучей ферми-жидкости. В дальнейшем будем предполагать, что $|\tilde{\Phi}(t|r_1,r_2)|$, $|\tilde{\eta}(t|r_1,r_2)|$ стремятся к нулю, если $|\vec{R}|\equiv|\vec{r}_1-\vec{r}_2|>R_0$, где R_0 – "радиус" пары, находящейся в конденсате. В следующей главе мы найдем порядок R_0 в теории сверхпроводимости.

§ 2. "Радиус" пары

В случае теории сверхпроводимости (см.[6])

$$a(R)=\frac{C}{(2\pi)^3}\int\frac{e^{i\vec{p}\vec{R}}}{2\sqrt{\xi^2(p)+C^2}}\,d\vec{p}, \qquad (2.I)$$

где C – энергетическая щель, а

$$\xi(p)=E'(p-p_F) \quad , \quad E'=\left(\frac{dE}{dp}\right)_{p=p_F},$$

p_F–импульс поверхности Ферми. Принимая во внимание, что интегрирование происходит в тонком слое для $p\sim p_F$ (или в тонком энергетическом слое $\varepsilon_F\pm\omega$, где ε_F– энергия поверхности Ферми, а ω–средняя энергия фонона) находим:

$$a(R)\cong 8\pi p_F\frac{\sin p_F R}{R}\frac{C}{E'}\int_0^{\omega/C}\frac{\cos\left(R\frac{C}{E'}\xi\right)}{\sqrt{\xi^2+1}}\,d\xi =$$

$$= 8\pi p_F\frac{\sin p_F R}{R}\frac{C}{E'}K_0\left(\frac{C}{E'}R\right) \qquad (2.2)$$

(если верхний предел интегрирования принять равным $+\infty$). K_0– цилиндрическая функция, которую (при $R\neq 0$) можно представить в виде:

$$K_0\left(\frac{C}{E'}R\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2\frac{C}{E'}R}}\,e^{-\frac{C}{E'}R}\left(1-\frac{1}{8\frac{C}{E'}R}+\frac{9}{128\left(\frac{C}{E'}R\right)^2}-+\right). \qquad (2.3)$$

Если определить "радиус" пары $R_0\equiv E'/C$, то видно, что для $R>R_0$

$$a(R)=\frac{8\pi p_F}{R_0^2}\frac{\sin\left(\frac{p_F E'}{C}R/R_0\right)}{R/R_0}\sqrt{\frac{\pi}{2R/R_0}}\,e^{-R/R_0}\left(1-\frac{1}{8R/R_0}+\frac{9}{128(R/R_0)^2}-+\right)$$

(2.4)

является быстро убывающей функцией R/R_0 . Подобная величина для радиуса пары получена в[7] при рассмотрении электродинамики сверхпроводящего состояния.

§ 3. Уравнения гидродинамики

Мы уже обращали внимание на то, что для ферми-систем в случае конденсата из связанных пар $\langle\psi(t,x_1)\psi(t,x_2)\rangle\neq 0$[5]. В работе[1] при рассмотрении бозе-систем скорость движения конденсата определена при помощи фазы среднего значения $\langle\psi_p\rangle$ операторов Бозе. Аналогичным путем мы хотим ввести скорость движения конденсата связанных пар и получить для неё уравнения. Используем для этого уравнение (I.IO), введя вместо $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\Phi}^*$ две действительные функции, их фазу χ и модуль a . Положим

$$\tilde{\Phi}(t|r_1,r_2)\equiv\sqrt{\rho_0}\,a(t,r_1,r_2)\,e^{i\chi(t,r_1,r_2)}=\sqrt{\rho_0}\,a(t,r,R)\,e^{i\chi(t,r,R)}, \qquad (3.I)$$

где

$$\vec{\tau} = \tfrac{1}{2}(\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2) \quad , \quad \vec{R} = \vec{\tau}_1 - \vec{\tau}_2 \quad ,$$

а ρ_0 является плотностью числа пар в конденсате. Предполагаем, что для $R \to \infty$ $(R > R_0)$, $a \to 0$ и $\chi(t,\tau_1,\tau_2) \to \chi_1(t,\tau_1) + \chi_2(t,\tau_2)$.

Внешние источники $\tilde{\eta}$ принимаем в виде

$$\tilde{\eta}(t|\tau_1,\tau_2) = \tilde{\eta}(t|\tau,R) \equiv \vartheta(R)\,\eta_1(t,\tau) \quad , \tag{3.2}$$

где $\vartheta(R)$–функция, убывающая с расстоянием (практически равная нулю для $R > R_0$).

Уравнения для χ и a получаем из (I.IO) переходя от $(\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2)$ к $(\vec{\tau},\vec{R})$. Находим

$$\frac{\partial \chi(t,\tau,R)}{\partial t} = \frac{1}{4m}\Big[\frac{1}{a(t,\tau,R)}(\Delta_\tau + 4\Delta_R)\,a(t,\tau,R) - (\nabla_\tau \chi(t,\tau,R))^2 -$$
$$-(4\nabla_R \chi(t,\tau,R))^2\Big] + 2\lambda - V(R) -$$
$$-\frac{1}{2\rho_0 a^2(t,\tau,R)}\int V(R')\{X_t(\tau,R,R') + X_t^{+}(\tau,R,R')\}\,d\vec{R}' + S_\chi[\tilde{\eta},\tilde{\eta}^{+}], \tag{3.3}$$

$$i\,\frac{\partial a^2(t,\tau,R)}{\partial t} = -\frac{ia}{2m}\big[2\nabla_\tau\chi\nabla_\tau a + 8\nabla_R\chi\nabla_R a + a(\Delta_\tau\chi + 4\Delta_R\chi)\big] +$$
$$+\frac{1}{\rho_0}\int V(R')\big[X_t(\tau,R,R') - X_t^{+}(\tau,R,R')\big]\,d\vec{R}' + S_a[\tilde{\eta},\tilde{\eta}^{+}], \tag{3.4}$$

где

$$S_\chi = -\frac{1}{a\sqrt{\rho_0}}\vartheta(R)\big[\tilde{J}(t,\tau,R) + \tilde{J}^{+}(t,\tau,R)\big] -$$
$$-\frac{1}{a\sqrt{\rho_0}}\int \vartheta(\tilde{R})\Big[\eta_1(t,\tau+\tfrac{R}{2}-\tfrac{\tilde{R}}{2})e^{-i\chi(t,\tau,R)}\tilde{F}(t|\tau-\tfrac{R}{2},-R+\tilde{R}) +$$
$$+\eta_1(t,\tau-\tfrac{R}{2}-\tfrac{\tilde{R}}{2})e^{-i\chi(t,\tau,R)}\tilde{F}(t|\tau+\tfrac{R}{2},R+\tilde{R}) +$$
$$+\eta_1^{+}(t,\tau+\tfrac{R}{2}-\tfrac{\tilde{R}}{2})e^{i\chi(t,\tau,R)}\tilde{F}^{+}(t|\tau-\tfrac{R}{2},-R+\tilde{R}) +$$
$$+\eta_1^{+}(t,\tau-\tfrac{R}{2}-\tfrac{\tilde{R}}{2})e^{i\chi(t,\tau,R)}\tilde{F}^{+}(t|\tau+\tfrac{R}{2},R+\tilde{R})\Big]\,d\vec{\tilde{R}} \quad , \tag{3.3a}$$

$$S_a = \frac{2a}{\sqrt{\rho_0}}\int \vartheta(\tilde{R})\Big[\eta_1(t,\tau+\tfrac{R}{2}-\tfrac{\tilde{R}}{2})e^{-i\chi(t,\tau,R)}\tilde{F}(t|\tau-\tfrac{R}{2},-R+\tilde{R}) +$$
$$+\eta_1(t,\tau-\tfrac{R}{2}-\tfrac{\tilde{R}}{2})e^{-i\chi(t,\tau,R)}\tilde{F}(t|\tau+\tfrac{R}{2},R+\tilde{R}) -$$
$$-\eta_1^{+}(t,\tau+\tfrac{R}{2}-\tfrac{\tilde{R}}{2})e^{i\chi(t,\tau,R)}\tilde{F}^{+}(t|\tau-\tfrac{R}{2},-R+\tilde{R}) -$$
$$-\eta_1^{+}(t,\tau-\tfrac{R}{2}-\tfrac{\tilde{R}}{2})e^{i\chi(t,\tau,R)}\tilde{F}^{+}(t|\tau+\tfrac{R}{2},R+\tilde{R})\Big]\,d\vec{\tilde{R}} \quad ,$$

$$\tilde{J}(t,\tau,R) \equiv \eta_1(t,\tau)\,e^{-i\chi(t,\tau,R)} \quad , \tag{3.4a}$$

$$\big[Y_t(\tau+\tfrac{R}{2},R',R) + Y_t(\tau-\tfrac{R}{2},R',-R)\big]\sqrt{\rho_0}\,a(t,\tau,R)\,e^{-i\chi(t,\tau,R)} \equiv$$
$$\equiv X_t(\tau,R',R) \quad ,$$
$$2\,Y_t(\tau,R',0)\sqrt{\rho_0}\,a(t,\tau,0)\,e^{-i\chi(t,\tau,0)} = \tag{3.5}$$
$$= X_t(\tau,R',0) \equiv X_t^{0}(\tau,R') \quad .$$

Вводим обозначения

$$\chi(t,\tau,0) \equiv \chi_0(t,\tau) \quad , \quad a(t,\tau,0) \equiv a_0(t,\tau) \quad ,$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_R f(R) \equiv \left(\nabla_R f(R)\right)_{R=0} \quad , \quad \tilde{J}(t,\tau,R) \equiv J_0(t,\tau) \; .$$

Определяем скорость движения конденсата пар соотношением:

$$\vec{v}_S(t,\tau) \equiv \frac{1}{M}\nabla_\tau \chi_0 \quad , \quad M = 2m \; . \tag{3.6}$$

Определим также скорость

$$\vec{v}_\tau(t,\tau) \equiv \frac{1}{m_\tau}\overset{\circ}{\nabla}_R \chi \quad , \quad m_\tau = m/2 \; , \tag{3.7}$$

$\vec{v}_\tau$ играет роль "относительной" скорости частиц пары.

Уравнение для $\vec{v}_S(t,\tau)$ согласно (3.3), (3.3а) имеет вид:

$$\begin{aligned} M\frac{\partial \vec{v}_S(t,\tau)}{\partial t} &= \nabla_\tau \Big\{ \frac{\overset{\circ}{\Delta}_\tau a}{4m a_0} - \frac{M v_S^2}{2} + \frac{\overset{\circ}{\Delta}_R a}{m a_0} - \frac{m_\tau v_\tau^2}{2} - \\ &- \frac{1}{2\varsigma_0 a_0^2}\int V(R')\left[X_t(\tau,R',0) + X_t^+(\tau,R',0)\right] d\vec{R}' - \\ &- \frac{1}{a_0\sqrt{\varsigma_0}}\vartheta(0)\left[\tilde{J}_0(t,\tau) + \tilde{J}_0^+(t,\tau)\right] - \\ &- \frac{2}{a_0\sqrt{\varsigma_0}}\int \vartheta(\tilde{R})\Big[\eta_1(t,\tau-\tfrac{\tilde{R}}{2})e^{-i\chi_0(t,\tau)}\tilde{F}(t|\tau,\tilde{R}) + \\ &+ \eta_1^+(t|\tau-\tfrac{\tilde{R}}{2})e^{i\chi_0(t,\tau)}\tilde{F}^*(t|\tau,\tilde{R})\Big] d\vec{R} \Big\} \; . \end{aligned} \tag{3.8}$$

Рассмотрим случай статистического равновесия сверхтекучей ферми-жидкости при $\tilde{\eta} = 0$. После введения $\vec{v}_S$ мы видим, что аналогично сверхтекучей бозе-жидкости сверхтекучая ферми-жидкость описывается восьмью параметрами состояния. За эти параметры

удобно принять плотность числа частиц ς, температуру θ, три слагаемые скорости конденсата $\vec{v}_S$ и три слагаемые скорости "нормальной компоненты" $\vec{v}_n$. Если источники отсутствуют, то в состоянии статистического равновесия эти параметры постоянны. В случае наличия источников: $\varsigma = \varsigma(\tau)$, $\vec{v}_S = \vec{v}_S(\tau)$. При отклонении от равновесных указанные величины считаются параметрами состояния только тогда, когда они являются медленно меняющимися функциями времени и координат. Средние для состояния статистического равновесия обозначим $\langle \ldots \rangle_{\varsigma,\theta,v_S,v_n}$. В дальнейшем нам придется иметь дело со средними типа

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_n &= \left\langle (\mathcal{D}_1\gamma(t,\tau_1)), \ldots (\mathcal{D}_n\gamma(t,\tau_n)) \right\rangle_{\varsigma,\theta,v_S,v_n} = \\ &= \mathcal{O}_n(\tau_1-\tau_2, \ldots \tau_1-\tau_n | \varsigma,\theta,v_S,v_n) \; , \end{aligned} \tag{3.9}$$

где

$$\gamma(t,\tau_j) = \psi(t,\tau_j) \; ; \; \psi^+(t,\tau_j) \; ,$$

а $\mathcal{D}_\nu$ – линейные комбинации из постоянных и операторов дифференцирования и пространственных переменных (см., например, выражения для функции $\mathcal{D}_t$, $G_t^{(\alpha)}$, X_t). Средние типа (3.9) (для сокращения обозначений мы не будем в индексах выписывать параметры ς, θ) нам удобно выражать через средние

$$\langle \ldots \rangle_{v_S',0} \quad ; \quad \vec{v}_S' = \vec{v}_S - \vec{v}_n \quad , \quad \vec{v}_n' = 0 \; .$$

Для этого можно воспользоваться галилеевским преобразованием операторов

$$\psi \to \psi \exp(im\vec{v}_n\vec{\tau}) \; .$$

Рассмотрим состояние $(\varsigma,\theta,\vec{v}_S)$, у которого $\vec{v}_n = 0$; для него

$$a = a(R|\varsigma,\theta,u) \; , \; a_0 = a(\varsigma,\theta,u) = const \; , \; u = \frac{v_S^2}{2} \; ,$$

$$\Lambda(\rho,\theta,u) = \frac{\partial(NF)}{\partial N} = F + \rho\frac{\partial F}{\partial \rho}\,, \quad F = F(\rho,\theta,u)\,,$$

где N – число частиц, F – свободная энергия, а Λ – химический потенциал на одну частицу. Так как в случае статистического равновесия a нормировано на единицу[5]

$$\int a^2(R)\,d\vec{R} = 1\,,$$

то в этом случае величина

$$\sum_{\sigma_2}\int |\langle\psi(t,x_1)\,\psi(t,x_2)\rangle|^2\, d\vec{r}_2 = \rho_0$$

дает плотность числа пар в конденсате. Введем поток

$$j_\alpha = \rho\frac{\partial F}{\partial v_s^{(\alpha)}} = \rho\frac{\partial F}{\partial u}v_s^{(\alpha)}$$

и положим

$$\rho\frac{\partial F}{\partial u} = M\rho_s\,, \tag{3.10}$$

так что

$$j_\alpha = M\rho_s v_s^{(\alpha)}\,. \tag{3.11}$$

Аналогично[1] можно показать, что

$$j_\alpha = \frac{i}{2}\sum_s\left\langle\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}\psi - \psi^+\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha}\right\rangle_{v_s,0}\,. \tag{3.12}$$

В состоянии термодинамического равновесия $X^\circ = X^\circ(R'|\rho,\theta,v_s)$.

Из уравнения (3.4) $(R=0)$ получаем:

$$\frac{1}{\rho_0 a_0^2}\int V(R')X^\circ(R'|\rho,\theta,v_s)\,d\vec{R}' = -\frac{Mv_s^2}{2} + 2\Lambda(\rho,\theta,u) - V(0) +$$
$$+\frac{\overset{\circ}{\Delta}_R a}{m a_0} - \frac{m_r v_r^2}{2} + \frac{i}{2a_0}\left(a_0\overset{\circ}{\nabla}_R\vec{v}_r + 2\vec{v}_r\overset{\circ}{\nabla}_R a\right), \tag{3.13}$$

$$\frac{1}{\rho_0 a_0^2}\int V(R')X^{\circ *}(R'|\rho,\theta,v_s)\,d\vec{R}' = \frac{1}{\rho_0 a_0^2}\int V(R')X^\circ(R'|\rho,\theta,v_s)\,d\vec{R}' -$$
$$-\frac{i}{a_0}\left(a_0\overset{\circ}{\nabla}_R\vec{v}_r + 2\vec{v}_r\overset{\circ}{\nabla}_R a\right). \tag{3.14}$$

Перейдем к рассмотрению состояния с двумя скоростями $\vec{v}_s$ и $\vec{v}_n$. Заметим, что выражение

$$\langle\psi^+(t,x')\psi(t,x')\psi(t,x_1)\psi(t,x_2)\rangle_{v_s,v_n}\langle\psi^+(t,x_2)\,\psi^+(t,x_1)\rangle_{v_s,v_n}$$

инвариантно при галилеевском преобразовании

$$\psi \to \psi\, exp(im\vec{v}_n\vec{r})\,,$$

и поэтому

$$X^\circ(R|\rho,\theta,v_s,v_n) = X^\circ(R|\rho,\theta,v_s - v_n)\,.$$

Тогда для состояния с двумя скоростями в (3.13) вместо v_s^2 надо писать $(v_s - v_n)^2$.

Рассмотрим выражение j_α. Имеем

$$j_\alpha = \frac{i}{2}\sum_s\left\langle\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}\psi - \psi^+\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha}\right\rangle_{v_s,v_n} = \frac{i}{2}\sum_s\left\langle\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}\psi - \psi^+\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha}\right\rangle_{v_s-v_n,0} +$$
$$+ m\rho v_n^{(\alpha)} = M\rho_s v_s^{(\alpha)} + m\rho_n v_n^{(\alpha)}\,, \quad M = 2m\,. \tag{3.15}$$

Мы пришли к (3.15) после использования (3.11), (3.12) и введения плотности нормальной компоненты ρ_n, которая определена соотношением

$$\rho_n \equiv \rho - 2\rho_s\,. \tag{3.16}$$

Перейдем к рассмотрению неравновесных процессов, для которых неравновесные величины типа

$$\mathfrak{A}_n = \langle (\mathcal{D}_1 \gamma(t,r_1)) \ldots (\mathcal{D}_n \gamma(t,r_n)) \rangle = \mathfrak{A}_n(t, r_1, r_1 - r_2, \ldots r_1 - r_n) \qquad (3.17)$$

меняются достаточно медленно при временных и пространственных трансляциях

$$t \to t + t_0 \quad , \vec{r}_j \to \vec{r}_j + \vec{r}_0 \quad , \ |t_0| \approx T \quad , \ |\vec{r}_0| \approx l,$$

где T – время релаксации, а l – длина свободного пробега /I,3/. В окрестности каждой точки имеются лишь только отклонения от "локального статистического равновесия", описанного через локальные величины $\varrho(t,r)$, $\theta(t,r)$, $v_s^{(\alpha)}(t,r)$, $v_n^{(\alpha)}(t,r)$. Величины ϱ и $v_s^{(\alpha)}$ определены уравнением (I.I), (3.6); определением $v_n^{(\alpha)}$ является (3.I5), а определением θ – соотношение $\varepsilon = \varepsilon(\varrho, \theta, v_s, v_n)$ для случая статистического равновесия (см. /I,3/). Естетственно мы будем считать, что градиенты по t и $\vec{r}$ первого порядка будут малыми первого порядка, а градиенты второго порядка будут малыми второго порядка и т.д. Чтобы технически сформулировать это предположение, в /8,I/, а также в /3/ введен некоторый параметр малости μ, характеризующий малость градиентов (медленность изменения во времени и слабое отступление от локальной изотропии). Пользуясь этим параметром, напишем (3.9в) в виде:

$$\mathfrak{A}_n(t, r_1, r_1 - r_2, \ldots, r_1 - r_n) = \tilde{\mathfrak{A}}_n(\mu t, \mu r_1, r_1 - r_2, \ldots r_1 - r_n; \mu) =$$
$$= \tilde{\mathfrak{A}}_n(\tau, \xi_1, R_{12}, \ldots, R_{1n}; \mu);$$
$$\tau = \mu t \quad , \ \vec{\xi}_1 = \mu \vec{r}_1 \quad , \ \vec{R}_{1j} = \vec{r}_1 - \vec{r}_j \quad ,$$

причем

$$\tilde{\mathfrak{A}}_n(\tau, \xi_1, R_{12}, \ldots, R_{1n}; \mu) = \tilde{\mathfrak{A}}_n^{(0)}(\tau, \xi_1, R_{12}, \ldots, R_{1n}) + + \mu \tilde{\mathfrak{A}}_n^{(1)}(\tau, \xi_1, R_{12}, \ldots, R_{1n}; \mu) + \mu^2 \tilde{\mathfrak{A}}_n^{(2)}(\tau, \xi_1, R_{12}, \ldots R_{1n}; \mu) + + \ldots \qquad (3.I8)$$

$\tilde{\mathfrak{A}}^{(0)}$ получается заменой в (3.I8) неравновесных средних $\langle \ldots \rangle$ равновесными средними $\langle \ldots \rangle_{\varrho, \theta, v_s, v_n}$ (3.9) (зависимость от (τ, ξ_1) появляется только из-за того, что в случае локального статистического равновесия величины $\varrho, \theta, v_s^{(\alpha)}, v_n^{(\alpha)}$ являются медленно меняющимися функциями (τ, ξ_1)). $\tilde{\mathfrak{A}}_n^{(1)}$ должно быть линейной формой по отношению к градиентам $\varrho, \theta, v_s^{(\alpha)}, v_n^{(\alpha)}$ и т.д. Учет в уравнениях (I.3)-(I.5) и (3.8) членов нулевого порядка по μ приводит к уравнениям идеальной сверхтекучей ферми-жидкости. Учет членов первого порядка приводит к уравнениям с учетом вязкости. В настоящей работе ограничимся приближением идеальной жидкости, пренебрегая членами порядка μ. Обратим внимание на то, что в силу уравнения (I.3) мы должны считать $\tilde{\eta}$, или что то же самое, $\tilde{\mathcal{J}}$, пропорциональным μ

$$\tilde{\eta} \to \mu \tilde{\eta} \quad , \ \mathcal{J} \to \mu \tilde{\mathcal{J}} \ .$$

Рассмотрим, например, уравнение (3.8). Имеем

$$M \frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \Big\{ \mu^2 \frac{\mathring{\Delta}_\xi a}{4 m a_0(\tau,\xi)} - \frac{M v_s^2}{2} + \frac{\mathring{\Delta}_R a(\tau,\xi)}{m a_0(\tau,\xi)} - \frac{m_r v_r^2}{2} -$$
$$- \frac{1}{2\varrho_0 a_0^2} \int V(R') [X_\tau(\xi, R', 0) + X_\tau^*(\xi, R', 0)] \, d\vec{R}' -$$
$$- \frac{\mu}{a_0 \sqrt{\varrho_0}} \nu(0) [\tilde{\mathcal{J}}_0(\tau,\xi) + \tilde{\mathcal{J}}_0(\tau,\xi)] - \qquad (3.I9)$$
$$- \mu \frac{2\varrho}{a_0 \sqrt{\varrho_0}} \int \nu(\tilde{R}) [\tilde{\mathcal{J}}_0(\tau, \xi - \mu \tfrac{\tilde{R}}{2}) - \tilde{\mathcal{J}}_0^*(\tau, \xi - \mu \tfrac{\tilde{R}}{2})] \, d\vec{\tilde{R}} \Big\} \ .$$

Последний член в (3.I9) мы получили, считая, что из-за наличия под интегралом функции $\vartheta(\tilde R)$ интегрирование происходит в узком слое вблизи $|\vec{\tilde R}|\sim 0$. Тогда $\tilde F(t,\tau,\tilde R)\cong \tilde F(t,\tau,0)=\varsigma(t,\tau)$, $\chi_0(t,\tau)\cong\chi_0(t,\tau-\frac{\tilde R}{2})$. В приближении идеальной жидкости получаем

$$M\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\left\{-\frac{Mv_s^2}{2}+\frac{\overset{\circ}{\Delta}_R a(R|\varsigma,\theta,u)}{m a_0(\varsigma,\theta,u)}-\frac{m_\tau v_\tau^2}{2}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2\varsigma_0 a_0^2}\int V(R')\left[\overset{\circ}{\chi}(R'|\varsigma,\theta,v_s-v_n)+\overset{\circ}{\chi}{}^*(R'|\varsigma,\theta,v_s-v_n)\right]d\vec R'\right\}, \qquad (3.20)$$

с помощью (3.I3) получаем

$$M\frac{\partial\vec v_s}{\partial\tau}=-\nabla_\xi\left\{\frac{Mv_s^2}{2}-\frac{M(v_s-v_n)^2}{2}+2\Lambda(\varsigma,\theta,u)\right\}. \qquad (3.2I)$$

Перейдем теперь к остальным уравнениям гидродинамики. Сравнивая уравнения (I.3)-(I.5) с соответствующими уравнениями, полученными в /I/ для случая бозе-жидкости, видим, что они практически отличаются только членами с источниками. Поэтому получим выражения для членов S_ς, $S_j^{(\alpha)}$, $S_{\varsigma\varepsilon}$ в интересующем нас приближении идеальной жидкости.

После применения (I.8). (3.I), (3.2), (3.5) получаем:

$$S_\varsigma=-\mu i 4m\sqrt{\varsigma_0}\,J[\tilde j-\tilde j^*], \quad \tilde\xi=\mu\tilde\tau,$$
$$J[j]\equiv\int a(t,\tilde\xi,\tilde R)\vartheta(\tilde R)\tilde j(\tau,\tilde R,\tilde\xi)d\vec{\tilde R}, \quad \tau-\tau'=\tilde R, \quad \frac{\tau+\tau'}{2}=\tilde\tau=\tau-\frac{\tilde R}{2}. \qquad (3.22)$$

Чтобы получить $S_j^{(\alpha)}$, вычислим сначала

$$\sum_{s,s'}\int\left[\tilde\eta^*\frac{\partial\Phi}{\partial\tau_\alpha}-\Phi\frac{\partial\tilde\eta^*}{\partial\tau_\alpha}\right]d\vec\tau'=4\sqrt{\varsigma_0}\int a(t,\tilde\tau,\tilde R)\tilde j^*(t,\tilde R,\tilde\tau)\nabla^{(\alpha)}_{\tilde R}\vartheta(\tilde R)d\vec{\tilde R}-$$

$$-2\sqrt{\varsigma_0}\int a(t,\tilde\tau,\tilde R)\vartheta(\tilde R)\tilde j^*(t,\tilde\tau,\tilde R)\nabla^{(\alpha)}_{\tilde\tau}\chi\, d\vec{\tilde R}-$$
$$-2\sqrt{\varsigma_0}\int\vartheta(\tilde R)\tilde j(t,\tilde\tau,\tilde R)\nabla^{(\alpha)}_\tau a(t,\tilde\tau,\tilde R)\,d\vec{\tilde R}\cong \overset{1}{S}{}^{(\alpha)}_j[\tilde j^*]-$$
$$-2\sqrt{\varsigma_0}Mv_s^{(\alpha)}J[\tilde j^*]-2\sqrt{\varsigma_0}\int\vartheta(\tilde R)\tilde j(t,\tilde R,\tilde\tau)\nabla^{(\alpha)}_\tau a(t,\tilde R,\tilde\tau)d\vec{\tilde R},$$
$$\overset{1}{S}{}^{(\alpha)}_j[\tilde j^*]\equiv 4\sqrt{\varsigma_0}\int a(t,\tilde\tau,\tilde R)\tilde j^*(t,\tilde\tau,\tilde R)\nabla^{(\alpha)}_{\tilde R}\vartheta(\tilde R)d\vec{\tilde R}. \qquad (3.23)$$

При выводе (3.23) мы взяли из-за присутствия под интегралом функции $\vartheta(\tilde R)$

$$\lim_{\tilde R\to0}\nabla^{(\alpha)}_{\tilde\tau}\chi(t,\tilde\tau,\tilde R)=\nabla^{(\alpha)}_\tau\chi_0(t,\tau)=Mv_s^{(\alpha)},$$

так как при $\vec{\tilde R}=0$, $\vec{\tilde\tau}=\vec\tau$. Этим приближением мы будем пользоваться и в дальнейшем при вычислении $S_{\varsigma\varepsilon}$. Так как функции ϑ, определяющие внешние источники,- заданные функции расстояния, предположим теперь, что их градиенты малы. Чтобы это учесть, в вычислениях будем пользоваться малым параметром μ и запишем

$$\nabla^n_R\vartheta(R)\to\mu^n\nabla_R\vartheta(\mu R).$$

Из (3.23) (учитывая малость $\nabla_R\vartheta$) получаем

$$S_j^{(\alpha)}=\mu i2\sqrt{\varsigma_0}Mv_s^{(\alpha)}J[\tilde j-\tilde j^*]+\mu^2\overset{1}{S}{}^{(\alpha)}_j[\tilde j+\tilde j^*]-$$
$$-\mu^2 2\sqrt{\varsigma_0}\int\vartheta(\mu\tilde R)\left[\tilde j(\tau,\tilde\xi,\tilde R)+\tilde j^*(\tau,\tilde\xi,\tilde R)\right]\nabla_\xi a(\tau,\tilde\xi,\tilde R)d\vec{\tilde R}. \qquad (3.24)$$

Переходим к вычислению $S_{\varsigma\varepsilon}$, заданного формулой (I.7).

Первый член равен

$$S^{(1)}_{\rho\varepsilon} = \mu i 2\sqrt{\rho_0}\int V(\tilde{R})\, a(\tau,\xi,\tilde{R})\,\vartheta(\mu R)\left[\tilde{J}\left(\tau,\xi-\frac{\mu\tilde{R}}{2},\tilde{R}\right)-\tilde{J}^{*}\left(\tau,\xi-\frac{\mu\tilde{R}}{2},\tilde{R}\right)\right]d\vec{\tilde{R}} \cong$$
$$= \mu i 2\sqrt{\rho_0}\,V(0)\,J\left[\tilde{J}-\tilde{J}^{*}\right] \tag{3.25}$$

Члены (I.7), содержащие лапласиан , вычисляем интегрируя по частям и пользуясь тождеством

$$(\Delta_r+\Delta_{r'})\,a(t,\tilde{r},\tilde{R})\exp\{i\chi(t,\tilde{r},\tilde{R})\} =$$
$$= e^{i\chi}\Big\{-\frac{a}{2}(\nabla_{\tilde{r}}\chi)^2-2a(\nabla_{\tilde{R}}\chi)^2+2\Delta_{\tilde{R}}a+\frac{1}{2}\Delta_{\tilde{r}}a+$$
$$+i\left[4\nabla_{\tilde{R}}a\nabla_{\tilde{R}}\chi+\frac{a}{2}\nabla^2_{\tilde{r}}\chi+2a\nabla^2_{\tilde{R}}\chi+\nabla_{\tilde{r}}a\nabla_{\tilde{r}}\chi\right]\Big\}, \tag{3.26}$$
$$\vec{\tilde{r}}=\frac{1}{2}(\vec{r}+\vec{r}\,'), \quad \vec{\tilde{R}}=\vec{r}-\vec{r}\,'.$$

Окончательно получаем

$$S^{(2)}_{\rho\varepsilon} = \mu i\sqrt{\rho_0}\left[Mv_s^2+m_r v_r^2-\frac{2\overset{\circ}{\nabla}{}^2_{\tilde{R}}a}{m\,a_0}-\mu^2\frac{\overset{\circ}{\nabla}{}^2_{\xi}a}{2m\,a_0}\right]J\left[\tilde{J}-\tilde{J}^{*}\right]-$$
$$-\mu\sqrt{\rho_0}\left[\frac{2}{a_0}\vec{v}_r\overset{\circ}{\nabla}_{\tilde{R}}a+\overset{\circ}{\nabla}_R\vec{v}_r+\mu\frac{2}{a_0}\vec{v}_s\overset{\circ}{\nabla}_{\xi}a+\mu\nabla_{\xi}\vec{v}_s\right]\times \tag{3.27}$$
$$\times J\left[\tilde{J}+\tilde{J}^{*}\right]+\mu^2\overset{1}{S}_{\rho\varepsilon}\left[\tilde{J}-\tilde{J}^{*}\right]+\mu^2\overset{2}{S}_{\rho\varepsilon}\left[\tilde{J}+\tilde{J}^{*}\right],$$

где

$$\overset{1}{S}_{\rho\varepsilon}[\tilde{J}] = -\frac{i4\sqrt{\rho_0}}{m}\int\left[\nabla_{\tilde{R}}a(\tau,\tilde{\xi},\tilde{R})\nabla_{\tilde{R}}\vartheta(\mu\tilde{R})+\mu\,a(\tau,\tilde{\xi},\tilde{R})\nabla^2_{\tilde{R}}\vartheta(\mu\tilde{R})\right]\tilde{J}\left(\tau,\xi-\frac{\mu\tilde{R}}{2},\tilde{R}\right)d\vec{\tilde{R}},$$

$$\overset{2}{S}_{\rho\varepsilon}[\tilde{J}] = -2\sqrt{\rho_0}\left[2\vec{v}_s-\vec{v}_r\right]\int\left[a(\tau,\tilde{\xi},\tilde{R})\nabla_{\tilde{R}}\vartheta(\mu\tilde{R})\right]\tilde{J}\left(\tau,\tilde{R},\tilde{\xi}-\frac{\mu\tilde{R}}{2}\right) \tag{3.28}$$

Переходим к четырем последним членам (I.7). Из (I.8), (I.9), (3.2) получаем

$$i\sum_{s,s''}\iint V(r-r')\,\tilde{\eta}^{+}(t|x,x'')\sum_{s'}\langle\psi^{+}(t,x')\psi(t,x')\psi(t,x'')\psi(t,x)\rangle\, d\vec{r}\,'d\vec{r}\,''=$$

$$=-2i\iint V(R')\,Y_t(r,R',\tilde{R})\,\vartheta(\tilde{R})\,\eta_1^{+}\left(t|r-\frac{\tilde{R}}{2}\right)d\vec{\tilde{R}}\,d\vec{R}\,'=$$
$$\cong -2i\int V(R')\,Y_t(r,R',0)\,d\vec{R}\,'\int\vartheta(\tilde{R})\,\eta_1^{*}\left(t|r-\frac{\tilde{R}}{2}\right)d\vec{\tilde{R}}=K_1,$$
$$\vec{r}-\vec{r}\,''=\vec{\tilde{R}}, \quad \frac{\vec{r}+\vec{r}\,''}{2}=\vec{\tilde{r}}=\vec{r}-\frac{\vec{\tilde{R}}}{2}, \quad \vec{r}-\vec{r}\,'=\vec{R}\,'.$$

В принятом приближении

$$\int\vartheta(\tilde{R})\,\eta_1^{*}\left(t|r-\frac{\tilde{R}}{2}\right)d\vec{\tilde{R}} \cong \frac{1}{a_0\sqrt{\rho_0}}e^{-i\chi_0(t,r)}\sqrt{\rho_0}\,J\left[\tilde{J}^{*}\right].$$

Принимая во внимание (3.5), получаем

$$\mu K_1 = -\frac{\mu i}{\rho_0 a_0^2}\int V(R')\,X_\tau(\xi,R',0)\,d\vec{R}\,'\sqrt{\rho_0}\,J\left[\tilde{J}^{*}\right] \tag{3.29}$$

Аналогичным образом:

$$i\sum_{s',s''}\iint V(r-r')\,\tilde{\eta}^{+}(t|x',x'')\sum_{s}\langle\psi^{+}(t,x)\psi(t,x)\psi(t,x'')\psi(t,x')\rangle\, d\vec{r}\,'d\vec{r}\,''=$$
$$=-\frac{\mu i}{\rho_0 a_0^2}\iint V(R')\,X_\tau(\xi+\mu R',R',0)\sqrt{\rho_0}\,a(\tau,\tilde{\xi},\tilde{R})\,\vartheta(\mu R)\,\tilde{J}^{*}\left(\tau,\xi+\mu R'-\frac{\mu\tilde{R}}{2},\tilde{R}\right)d\vec{R}\,'d\vec{\tilde{R}}= \tag{3.30}$$
$$=\mu K_1+O(\mu^2).$$

В (3.30) мы использовали тот факт, что под интегралом находится величина $X_\tau(\xi+\mu R',R',0)$ с быстро убывающим при увеличении R' множителем $V(R')$.

Из (3.29), (3.30) и (3.13) видно, что четыре последние члена (I.7) могут быть записаны в виде:

$$S^{(3)}_{\rho\varepsilon}=\mu i\sqrt{\rho_0}\left[-M(v_s-v_n)^2+4\Lambda-2V(0)+\frac{2\overset{\circ}{\nabla}{}^2_R a(R|\rho,\theta,\mu)}{m\,a_0(\rho,\theta,\mu)}-m_r v_r^2\right]\times$$
$$\times J\left[\tilde{J}-\tilde{J}^{*}\right]+\mu\left[\frac{2}{a_0(\rho,\theta,\mu)}\vec{v}_r\overset{\circ}{\nabla}_R a(R|\rho,\theta,\mu)+ \right. \tag{3.31}$$
$$\left.+\overset{\circ}{\nabla}_R\vec{v}_r\right]\sqrt{\rho_0}\,J\left[\tilde{J}+\tilde{J}^{*}\right].$$

Окончательно получаем:

$$S_{\rho\varepsilon}=S^{(1)}_{\rho\varepsilon}+S^{(2)}_{\rho\varepsilon}+S^{(3)}_{\rho\varepsilon}=\mu i\sqrt{\rho_0}\left[-M(v_s-v_n)^2+Mv_s^2+4\Lambda\right]\mathcal{J}[\tilde{\xi}-\tilde{\xi}^*]+$$

$$+\mu^2\sqrt{\rho_0}\,\nabla_\xi\vec{v}_s\,\mathcal{J}[\tilde{\xi}+\tilde{\xi}^*]+\mu^2\overset{1}{S}_{\rho\varepsilon}[\tilde{\xi}-\tilde{\xi}^*]+ \qquad (3.32)$$

$$+\mu^2\overset{2}{S}_{\rho\varepsilon}[\tilde{\xi}+\tilde{\xi}^*]\;.$$

Если средние, входящие в уравнения (I.3)-(I.5), вычислить аналогично тому, как это сделано в (I), и перейти во всех формулах от вспомогательных переменных τ, $\vec{\xi}$ к первоначальным $t, \vec{r}$, то получим систему уравнений гидродинамики сверхтекучей идеальной ферми-жидкости в виде:

$$m\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum_\alpha\frac{\partial(M\rho_s v_s^{(\alpha)}+m\rho_n v_n^{(\alpha)})}{\partial r_\alpha}=-i4m\sqrt{\rho_0}\,\mathcal{J}[\tilde{\xi}-\tilde{\xi}^*], \qquad (3.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(M\rho_s v_s^{(\alpha)}+m\rho_n v_n^{(\alpha)})=-\sum_\beta\frac{\partial(M\rho_s v_s^{(\alpha)}v_s^{(\beta)}+m\rho_n v_n^{(\alpha)}v_n^{(\beta)})}{\partial r_\alpha}-$$

$$-\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial r_\alpha}+i\,2M\sqrt{\rho_0}\,\mathcal{J}[\tilde{\xi}-\tilde{\xi}^*]\,v_s^{(\alpha)}, \qquad (3.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho E+\frac{m\rho v_n^2}{2}+M\rho_s\vec{v}_n(\vec{v}_s-\vec{v}_n)\right]+$$

$$+\sum_\beta\frac{\partial}{\partial r_\beta}\left\{v_n^{(\beta)}\left[\frac{m\rho v_n^2}{2}+M\rho_s\vec{v}_n(\vec{v}_s-\vec{v}_n)+\rho E+\mathcal{P}\right]+\right.$$

$$\left.+(v_s^{(\beta)}-v_n^{(\beta)})M\rho_s\left[\tfrac{1}{M}\Lambda+\left(\vec{v}_s\vec{v}_n-\frac{v_n^2}{2}\right)\right]\right\}-$$

$$-i\sqrt{\rho_0}\left[4\Lambda+2\left(\vec{v}_s\vec{v}_n-\frac{v_n^2}{2}\right)\right]\mathcal{J}[\tilde{\xi}-\tilde{\xi}^*]+=$$

$$=-\sum_\beta\frac{\partial}{\partial r_\beta}(v_s^{(\beta)}-v_n^{(\beta)})A\;, \qquad (3.35)$$

$$M\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\left\{\frac{Mv_s^2}{2}-\frac{M(v_s-v_n)^2}{2}+2\Lambda(\rho,\theta,u)\right\}. \qquad (3.36)$$

В (3.35) ρE связано с $\rho\varepsilon$ соотношением (см. (I))

$$\rho\varepsilon(\rho,\theta,v_s,v_n)=\rho E(\rho,\theta,u)+\frac{m\rho v_n^2}{2}+M\rho_s(\vec{v}_s-\vec{v}_n)\vec{v}_n,$$

$$E(\rho,\theta,u)=F-\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}\;,$$

$\mathcal{P}$ является давлением

$$\mathcal{P}=\rho^2\,\frac{\partial F(\rho,\theta,u)}{\partial\rho}\;.$$

В правую сторону (3.35) введена неизвестная функция $A(\rho,\theta,u)$. Аналогично случаю бозе-жидкости /I/ можно показать, что $A\equiv 0$.

Уравнение (3.35) упрощаются, если ввести энтропию (на одну частицу) S

$$S=-\frac{\partial F}{\partial\theta}\;.$$

После вычисления аналогично /I/ получаем

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t}+\sum_\beta\frac{\partial}{\partial r_\beta}(\rho S v_n^{(\beta)})=0. \qquad (3.35a)$$

Полученные нами уравнения сверхтекучей ферми-жидкости практически идентичны с уравнениями сверхтекучей бозе-жидкости. Они отличаются только членами с источниками.

§ 4. Линеаризованные уравнения гидродинамики и функции Грина

При адиабатическом включении дополнительного члена δH_τ, например,

$$\delta H_\tau = e^{-i\omega\tau+\varepsilon\tau} V_\omega + e^{i\omega\tau+\varepsilon\tau} V_{-\omega}, \quad (\varepsilon > 0, \varepsilon \to 0)$$

изменение среднего значения оператора A, явно не зависящего от времени, имеет вид [3,2]:

$$\delta \bar{A} = 2\pi e^{-i\omega t+\varepsilon t} \langle\langle A; V_\omega \rangle\rangle^{r}_{E=\omega+i\varepsilon} +$$

$$+ 2\pi e^{i\omega t+\varepsilon t} \langle\langle A; V_{-\omega} \rangle\rangle^{r}_{E=\omega-i\varepsilon}, \tag{4.I}$$

$\langle\langle\, ;\, \rangle\rangle^{r}_{E}$ – фурье-компоненты запаздывающих функций Грина, V_ω – оператор, явно не зависящий от времени.

Формула (4.I), которую мы хотим использовать в дальнейшем, верна только для слабого отклонения от состояния статистического равновесия. Потому мы рассмотрим с помощью полученных нами уравнений (3.33), (3.34), (3.35а), (3.36) случай бесконечно малого отклонения от состояния статистического равновесия покоящейся жидкости.

Положим:

$$\rho = \rho^0 + \delta\rho, \quad S = S^0 + \delta S, \quad \vec{v}_s = \delta\vec{v}_s, \quad \vec{v}_n = \delta\vec{v}_n, \quad \tilde{\eta} = \delta\tilde{\eta}:$$

Тогда

$$\tilde{\eta} = \tilde{\mathfrak{I}}.$$

Мы переходим, таким образом, от уравнений гидродинамики к линеаризованным "акустическим уравнениям". Это означает, что в уравнениях (3.33), (3.34), (3.35а), (3.36) мы пренебрегаем членами, пропорциональными, например, v_s^2, v_n^2, $\vec{v}_s \vec{v}_n$, $\mathfrak{I}^2$, $\mathfrak{I} v_s^{(\alpha)}$, $\delta\rho\,\delta\theta$ и т.д.

Уравнения гидродинамики в "акустистическом" приближении, уравнения для вариаций имеют вид (верхний индекс „0" у ρ и S опускаем):

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + 2\rho_s \sum_\beta \frac{\partial v_s^{(\beta)}}{\partial r_\beta} + \rho_n \sum_\beta \frac{\partial v_n^{(\beta)}}{\partial r_\beta} = i\, 4\sqrt{\rho_0} \int a(\tilde{R})\,\vartheta(\tilde{R}) \left[\eta_1\left(t, r - \frac{\tilde{R}}{2}\right) - \eta_1^*\left(t, r - \frac{\tilde{R}}{2}\right)\right] d\vec{\tilde{R}}, \tag{4,2}$$

$$M\rho_s \frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t} + m\rho_n \frac{\partial v_n^{(\alpha)}}{\partial t} = -\frac{\partial\delta\mathcal{P}}{\partial r_\alpha}, \tag{4.3}$$

$$M\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t} = -\frac{\partial\delta\Lambda}{\partial r_\alpha}, \qquad \delta\Lambda = -S\,\delta\theta + \frac{1}{\rho}\,\delta\mathcal{P}, \tag{4.4}$$

$$\rho\frac{\partial\delta S}{\partial t} + S\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho S \sum_\beta \frac{\partial v_n^{(\beta)}}{\partial r_\beta} = 0. \tag{4.5}$$

Для случая бесконечно малого отклонения от состояния статистического равновесия покоящейся жидкости

$$\vec{v}_s(t,r) = \frac{i}{2Ma_0\sqrt{\rho_0}} \left(\frac{\partial\delta\tilde{\Phi}^*(t,r,0)}{\partial\vec{r}} - \frac{\partial\delta\tilde{\Phi}(t,r,0)}{\partial\vec{r}} \right). \tag{4.6}$$

Предположим, что отклонение от состояния статистического равновесия происходит из-за "адиабатического включения" источников. С другой стороны, члены с источниками в гамильтониан (I)

$$\delta H_\tau = \sum_{s,s'} \iint \left[\tilde{\eta}(\tau|x_3,x_4)\,\psi^+(0,x_3)\,\psi^+(0,x_4) + \tilde{\eta}^*(\tau|x_3,x_4)\,\psi(0,x_3)\,\psi(0,x_4)\right] d\vec{r}_3\, d\vec{r}_4$$

будут включены адиабатически, если положить

$$\eta_1(\tau|r) = e^{-i\omega\tau+\varepsilon\tau+i\vec{k}\vec{r}}\eta_k + e^{i\omega\tau+\varepsilon\tau-i\vec{k}\vec{r}}\eta_{-k},$$

$$\eta_1(\tau|r) = e^{-i\omega\tau+\varepsilon\tau+i\vec{k}\vec{r}}\eta^{+}_{-k} + e^{i\omega\tau+\varepsilon\tau-i\vec{k}\vec{r}}\eta^{+}_{k}, \qquad (4.7)$$

где

$$\varepsilon > 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Теперь мы можем пользоваться формулой (4.I) для получения вариации среднего значения

$$\delta\langle\psi(t,x_1)\psi(t,x_2)\rangle = \delta\Phi(t|x_1,x_2) = \varepsilon(s_1)\Delta(s_1+s_2)\delta\tilde{\Phi}(t|r,R) \qquad (4.8)$$

(4.8) выразится через фурье-компоненты запаздывающих функций Грина. Таким образом можно вычислить величину $\vec{v}_s$ из уравнений (4.2)-(4.5) и независимо из (4.6) при помощи (4.I), (4.8). Это процедура приводит к вычислению фурье-компонент запаздывающих функции Грина .

Из (I.8), (3.2), (4.7) вытекает, что

$$\delta H_\tau = e^{-i\omega\tau+\varepsilon\tau}V_\omega + e^{i\omega\tau+\varepsilon\tau}V_{-\omega}, \qquad (4.9)$$

где

$$V_\omega = \sum_{s,s'}\varepsilon(s)\Delta(s+s')\iint e^{i\vec{k}\left(\frac{\vec{r}+\vec{r}'}{2}\right)}\vartheta(r-r')\left[\psi^{+}(0,x)\psi^{+}(0,x')\eta_k + \psi(0,x)\psi(0,x')\eta^{+}_{-k}\right]\times d\vec{r}\,d\vec{r}',$$

$$V_{-\omega} = \sum_{s,s'}\varepsilon(s)\Delta(s+s')\iint e^{-i\vec{k}\left(\frac{\vec{r}+\vec{r}'}{2}\right)}\vartheta(r-r')\left[\psi(0,x)\psi(0,x')\eta^{+}_{k} + \psi^{+}(0,x)\psi^{+}(0,x')\eta_{-k}\right]\times d\vec{r}\,d\vec{r}'. \qquad (4.10)$$

Пользуясь формулой (4.I) (см. также (3)), получаем

$$\varepsilon(s_1)\Delta(s_1+s_2)\delta\tilde{\Phi}(t|r,R) = e^{-i\omega t+\varepsilon t}2\pi\sum_{s_3,s_4}\varepsilon(s_3)\Delta(s_3+s_4)\iint d\vec{\tilde{r}}\,d\vec{\tilde{R}}\,\vartheta(\tilde{R})e^{i\vec{k}\vec{\tilde{r}}}\times$$
$$\times\Big[\langle\langle\psi(r+\tfrac{1}{2}R,s_1)\psi(r-\tfrac{1}{2}R,s_2);\psi^{+}(\tilde{r}+\tfrac{1}{2}\tilde{R},s_3)\psi^{+}(\tilde{r}-\tfrac{1}{2}\tilde{R},s_4)\rangle\rangle^{r}_{E}\eta_k +$$
$$+\langle\langle\psi(r+\tfrac{1}{2}R,s_1)\psi(r-\tfrac{1}{2}R,s_2);\psi(\tilde{r}+\tfrac{1}{2}\tilde{R},s_3)\psi(\tilde{r}-\tfrac{1}{2}\tilde{R},s_4)\rangle\rangle^{r}_{E}\eta^{+}_{-k}\Big]+$$
$$+e^{i\omega t+\varepsilon t}2\pi\sum_{s_3,s_4}\varepsilon(s_3)\Delta(s_3+s_4)\iint d\vec{\tilde{r}}\,d\vec{\tilde{R}}\,\vartheta(\tilde{R})e^{-i\vec{k}\vec{\tilde{r}}}\times$$
$$\times\Big[\langle\langle\psi(r+\tfrac{1}{2}R,s_1)\psi(r-\tfrac{1}{2}R,s_2);\psi^{+}(\tilde{r}+\tfrac{1}{2}\tilde{R},s_3)\psi^{+}(\tilde{r}-\tfrac{1}{2}\tilde{R},s_4)\rangle\rangle^{r}_{E}\eta^{+}_{-k}$$
$$+\langle\langle\psi(r+\tfrac{1}{2}R,s_1)\psi(r-\tfrac{1}{2}R,s_2);\psi(\tilde{r}+\tfrac{1}{2}\tilde{R},s_3)\psi(\tilde{r}-\tfrac{1}{2}\tilde{R},s_4)\rangle\rangle^{r}_{E}\eta^{+}_{k}\Big], \qquad (4.11)$$

где

$$\vec{r} = \tfrac{1}{2}(\vec{r}_1+\vec{r}_2), \quad \vec{R} = \vec{r}_1-\vec{r}_2, \quad \vec{\tilde{r}} = \tfrac{1}{2}(\vec{r}_3+\vec{r}_4), \quad \vec{\tilde{R}} = \vec{r}_3-\vec{r}_4,$$

$$\langle\langle A;B\rangle\rangle^{r}_{E} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\langle A(t);B(\tau)\rangle\rangle^{r}e^{iE(t-\tau)}d(t-\tau).$$

Переходя к фурье-компонентам в импульсном пространстве, получаем окончательно

$$\delta\tilde{\Phi}(t,r,0) = e^{-i\omega t+\varepsilon t+i\vec{k}\vec{r}}2\pi\sum_{p_1,p_3}\vartheta(p_3)\times$$
$$\times\Big[\langle\langle a_{\frac{k}{2}+p_1,+}a_{\frac{k}{2}-p_1,-};a^{+}_{\frac{k}{2}+p_3,+}a^{+}_{\frac{k}{2}-p_3,-}\rangle\rangle^{r}_{E}\eta_k +$$
$$+\langle\langle a_{\frac{k}{2}+p_1,+}a_{\frac{k}{2}-p_1,-};a_{-\frac{k}{2}-p_3,+}a_{-\frac{k}{2}+p_3,-}\rangle\rangle^{r}_{E}\eta^{+}_{-k}\Big]+$$
$$+e^{i\omega t+\varepsilon t-i\vec{k}\vec{r}}2\pi\sum_{p_1,p_3}\vartheta(p_3)\times$$
$$\times\Big[\langle\langle a_{-\frac{k}{2}+p_1,+}a_{-\frac{k}{2}-p_1,-};a^{+}_{-\frac{k}{2}+p_3,+}a^{+}_{-\frac{k}{2}-p_3,-}\rangle\rangle^{r}_{E}\eta_{-k} +$$
$$+\langle\langle a_{-\frac{k}{2}+p_1,+}a_{-\frac{k}{2}-p_1,-};a_{\frac{k}{2}-p_3,+}a_{\frac{k}{2}+p_3,-}\rangle\rangle^{r}_{E}\eta^{+}_{k}\Big], \qquad (4.12)$$

где
$$\vartheta(p) = \frac{1}{V}\int \vartheta(R)\, e^{-i\vec{p}\vec{R}}\, d\vec{R} \; .$$

Если ввести фурье-компоненты $v_s^{(\omega)}(\pm k)$:

$$v_s^{(\omega)}(t,r) = e^{-i\omega t+\varepsilon t+i\vec{k}\vec{r}}\, v_s^{(\omega)}(k) + e^{i\omega t+\varepsilon t-i\vec{k}\vec{r}}\, v_s^{(\omega)}(-k)\,, \qquad (4.13)$$

то из (4.6) и (4.12) получаем

$$\vec{k}\vec{v}_s(k) = \frac{\pi k^2}{M a_0\sqrt{\rho_0}} \sum_{p_1,p_3} \vartheta(p_3)\, \times$$

$$\times\Big[\langle\langle a_{\frac{k}{2}+p_1,+}\, a_{\frac{k}{2}-p_1,-} - a^{+}_{-\frac{k}{2}+p_1,+}\, a^{+}_{-\frac{k}{2}-p_1,-}\, ;\, a_{-\frac{k}{2}-p_3,+}\, a_{-\frac{k}{2}+p_3,-}\rangle\rangle^{r}_{E}\, \eta^{*}_{-k} +$$

$$+\langle\langle a_{\frac{k}{2}+p_1,+}\, a_{\frac{k}{2}-p_1,-} - a^{+}_{-\frac{k}{2}+p_1,+}\, a^{+}_{-\frac{k}{2}-p_1,-}\, ;\, a^{+}_{\frac{k}{2}+p_3,+}\, a^{+}_{\frac{k}{2}-p_3,-}\rangle\rangle^{r}_{E}\, \eta_{k}\Big]. \qquad (4.14)$$

Согласно определению

$$\rho_0 a_0^2 = \tilde{\Phi}^{*}(t,r,0)\,\tilde{\Phi}(t,r,0)\,,$$

откуда

$$\rho_0\,\delta a_0 = \frac{1}{2}\Big[\delta\tilde{\Phi}^{*}(t,r,0) + \delta\tilde{\Phi}(t,r,0)\Big] = \rho_0\Big[\frac{\partial a_0}{\partial\rho}\delta\rho + \frac{\partial a_0}{\partial\theta}\delta\theta\Big]. \qquad (4.15)$$

Переходя к фурье-компонентам и используя (4.12) и (4.15), находим
$$\delta a_0(t,r) = e^{-i\omega t+\varepsilon t+i\vec{k}\vec{r}}\,\delta a_k + e^{i\omega t+\varepsilon t-i\vec{k}\vec{r}}\,\delta a_{-k}\,,$$

$$\rho_0\,\delta a_k = 2\pi\sum_{p_1,p_3}\vartheta(p_3)\Big[\langle\langle a_{\frac{k}{2}+p_1,+}\, a_{\frac{k}{2}-p_1,-} + a^{+}_{-\frac{k}{2}+p_1,+}\, a^{+}_{-\frac{k}{2}-p_1,-}\, ;\, a^{+}_{\frac{k}{2}+p_3,+}\, a^{+}_{\frac{k}{2}-p_3,-}\rangle\rangle^{r}_{E}\,\eta_k +$$

$$+\langle\langle a_{\frac{k}{2}+p_1,+}\, a_{\frac{k}{2}-p_1,-} + a^{+}_{-\frac{k}{2}+p_1,+}\, a^{+}_{-\frac{k}{2}-p_1,-}\, ;\, a_{-\frac{k}{2}-p_3,+}\, a_{-\frac{k}{2}+p_3,-}\rangle\rangle^{r}_{E}\,\eta^{*}_{-k}\Big]. \qquad (4.16)$$

Формулы (4.14),(4.16) упрощаются, если ввести операторы /5/

$$\beta_k = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{s_1,s_2}\varepsilon(s_1)\Delta(s_1+s_2)\iint \vartheta(R)\, e^{-i\vec{k}\vec{r}}\,\psi(r-\tfrac{1}{2}R, s_2)\,\psi(r+\tfrac{1}{2}R, s_1)\, d\vec{r}\, d\vec{R} =$$

$$= 2\sqrt{V}\sum_{p}\vartheta(p)\, a_{\frac{k}{2}+p,+}\, a_{\frac{k}{2}-p,-}\,,$$

$$\beta^{0}_{k} = \frac{2}{\sqrt{V}}\sum_{p} a_{\frac{k}{2}+p,+}\, a_{\frac{k}{2}-p,-}\; . \qquad (4.17)$$

После введения этих операторов получаем

$$\vec{k}\vec{v}_s(k) = \frac{\pi k^2}{4 M a_0\sqrt{\rho_0}}\Big[\langle\langle \beta^{0}_{k}+\beta^{0}_{-k}\, ;\, \beta_{-k}\rangle\rangle^{r}_{E}\,\eta^{*}_{-k} - \langle\langle \beta^{0}_{k}+\beta^{0+}_{-k}\, ;\, \beta^{+}_{k}\rangle\rangle^{r}_{E}\,\eta_{k}\Big],$$

$$\rho_0\,\delta a_k = \frac{\pi}{2}\Big[\langle\langle \beta^{0}_{k}-\beta^{0+}_{-k}\, ;\, \beta_{-k}\rangle\rangle^{r}_{E}\,\eta^{*}_{-k} - \langle\langle \beta^{0}_{k}-\beta^{0+}_{-k}\, ;\, \beta^{+}_{k}\rangle\rangle^{r}_{E}\,\eta_{k}\Big]. \qquad (4.18)$$

Формулы (4.14), (4.16) связывают гидродинамические величины, получаемые из уравнений (4.2)-(4.5) с функциями Грина. Такая связь носит асимптотический характер и верна только при $k \ll 1/l$, $E \ll \frac{1}{T}$ (где l - длина свободного пробега, а T — время релаксации), так как уравнения гидродинамики справедливы лишь при "медленном" изменении гидродинамических величин.

Обратимся теперь к уравнения (4.2)-(4.5), чтобы с их помощью найти величину $\vec{k}\vec{v}_s(k)$ (как функцию η_k , η^{*}_{-k}). Для этого перепишем уравнения (4.2)-(4.5) в виде уравнений для фурье-компонент. Вводим обозначения

$$\vec{k}\vec{v}_s(k) = X\,, \quad \vec{k}\vec{v}_n(k) = Y\,,$$
$$\gamma(k) = \int a(R)\,\vartheta(R)\, e^{i\frac{\vec{k}\vec{R}}{2}}\, d\vec{R} \qquad (4.19)$$

Уравнения принимают вид:

$$2\rho_s X + \rho_n Y - E\,\delta\rho + 0\,\delta\theta = 4\sqrt{\rho_0}\,\gamma(k)(\eta_{-k} - \eta^{*}_{k}),$$

$$E M_{\varrho_s} X + E m_{\varrho_n} Y - k^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\right)_\theta \delta\varrho - k^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)_\varrho \delta\theta = 0,$$

$$E M\varrho X + 0.Y - k^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\right)_\theta \delta\varrho + k^2\left[\varrho S - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)_\varrho\right]\delta\theta = 0,$$

$$0.X - \varrho S Y + E\left[S + \varrho\left(\frac{\partial S}{\partial\varrho}\right)_\theta\right]\delta\varrho + E\varrho\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\varrho \delta\theta = 0. \quad (4.20)$$

Мы получили таким образом аналогично /I,3/ систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Обозначаем детерминант системы уравнений (4.20) через $\mathcal{D}(E)$, а детерминант, в котором первый столбец заменяется первой строкой уравнения (4.20)–через $\mathcal{D}_X$. Тогда

$$X = \vec{k}\,\vec{v}_s(k) = \frac{\mathcal{D}_X}{\mathcal{D}(E)}. \quad (4.21)$$

Из (4.21) и (4.14) видно, что нули $\mathcal{D}(E)$ определяют полюса функции Грина, а тем самым энергии элементарных возбуждений.

Аналогично /I/ рассмотрим сначала некоторые предельные случаи.

1) $E = 0.$

$$\vec{k}\,\vec{v}_s(k) = \frac{2\sqrt{\varrho_0}\,\gamma(k)}{\varrho_s}\left(\eta_k - \eta^{+}_{-k}\right), \quad (4.22)$$

$$\delta\varrho(k) = \delta\theta(k) = 0 .$$

Из (4.15) следует, что $\delta a_k = 0$. Тогда из (4.16) получаем:

$$\sum_{p_1}\langle\langle a_{\frac{k}{2}+p_1,+}\,a_{\frac{k}{2}-p_1,-};\, a^{+}_{\frac{k}{2}+p,+\ \frac{k}{2}-p,-}\rangle\rangle^{\tau}_{E=0} =$$

$$= -\sum_{p_1}\langle\langle a^{+}_{-\frac{k}{2}+p_1,+}\,a^{+}_{-\frac{k}{2}-p_1,-};\, a^{+}_{\frac{k}{2}+p,+}\,a^{+}_{\frac{k}{2}-p,-}\rangle\rangle^{\tau}_{E=0},$$

$$\sum_{p_1}\langle\langle a_{\frac{k}{2}+p_1,+}\,a_{\frac{k}{2}-p_1,-};\, a_{-\frac{k}{2}-p,+}\,a_{-\frac{k}{2}+p,-}\rangle\rangle^{\tau}_{E=0} =$$

$$= -\sum_{p_1}\langle\langle a^{+}_{-\frac{k}{2}+p_1,+}\,a^{+}_{-\frac{k}{2}-p_1,-};\, a_{-\frac{k}{2}-p,+}\,a_{-\frac{k}{2}+p,-}\rangle\rangle^{\tau}_{E=0}$$

$$(4.23)$$

Если принять во внимание (4.23), то (4.14) принимает вид:

$$\vec{k}\,\vec{v}_s(k) = \frac{2\pi k^2}{M a_0\sqrt{\varrho_0}}\sum_{p_1,p_3}\vartheta(p_1)\Big[\langle\langle a_{\frac{k}{2}+p_1,+}\,a_{\frac{k}{2}-p_1,-};\, a_{-\frac{k}{2}-p_3,+}\,a_{-\frac{k}{2}+p_3,-}\rangle\rangle^{\tau}_{E=0}\,\eta^{+}_{-k} +$$

$$+\langle\langle a_{\frac{k}{2}+p_1,+}\,a_{\frac{k}{2}-p_1,-};\, a^{+}_{-\frac{k}{2}+p_3,+}\,a^{+}_{\frac{k}{2}-p_3,-}\rangle\rangle^{\tau}_{E=0}\,\eta_k\Big] = \frac{2\sqrt{\varrho_0}\,\gamma(k)}{\varrho_s}\left(\eta_k - \eta^{+}_{-k}\right). \quad (4.24)$$

Приравнивая коэффициенты при η^{+}_{-k} , η_k и принимая во внимание, что $\gamma(k)$ содержит функцию ϑ (см. (4.19), получим

$$\sum_{p_1}\langle\langle a_{\frac{k}{2}+p_1,+}\,a_{\frac{k}{2}-p_1,-};\, a_{-\frac{k}{2}-p_3,+}\,a_{-\frac{k}{2}+p_3,-}\rangle\rangle^{\tau}_{E=0} = -\frac{M\varrho_0 a_0\,\gamma_1(p_3+\frac{k}{2})}{\pi\varrho_s k^2},$$

$$\sum_{p_1}\langle\langle a_{\frac{k}{2}+p_1,+}\,a_{\frac{k}{2}-p_1,-};\, a^{+}_{-\frac{k}{2}+p_3,+}\,a^{+}_{\frac{k}{2}-p_3,-}\rangle\rangle^{\tau}_{E=0} = \frac{M\varrho_0 a_0\,\gamma_1(p_3+\frac{k}{2})}{\pi\varrho_s k^2}, \quad (4.25)$$

$$\gamma_1(\vec{p}) = \int a(R)\exp\{i(\vec{p}+\cancel{\tfrac{\vec{k}}{2}})\vec{R}\}\,d\vec{R} .$$

Формулы (4.25) представляют "теорему о $1/k^2$ " /5/ для ферми-систем с точным коэффициентом (особенность типа $1/k^2$ в окрестности $k \sim 0$).

2) $\theta = 0$..

В этом случае:

$$\varrho_s = \varrho, \quad \varrho_n = 0, \quad S = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial\varrho} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial\theta} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0. \quad (4.26)$$

(Уравнения гидродинамики при $\theta \to 0$ могут иметь только формальный смысл, так как времена релаксации становятся вблизи $\theta \to 0$ очень большими. Мы рассмотрим этот случай формально, чтобы посмотреть, что дают наши формулы в пределе $\theta \to 0$ (см. (I)).

Если принять во внимание (4.26), то из (4.2I) получаем

$$\vec{k}\vec{v}_s(k) = \frac{2\sqrt{\rho_0}\,\gamma(k)c^2k^2}{\rho(E^2-c^2k^2)}(\eta^*_{-k}-\eta_k) \cong$$

$$\cong \frac{2\pi k^2}{Ma_c\sqrt{\rho_0}}\sum_{p_1,p_3}\vartheta(p_3)\Big[\langle\langle a_{\frac{k}{2}+p_1,+}a_{\frac{k}{2}-p_1,-};\, a_{-\frac{k}{2}-p_3,+}a_{-\frac{k}{2}+p_3,-}\rangle\rangle^r_E\,\eta^+_{-k}+$$

$$+\langle\langle a_{\frac{k}{2}+p_1,+}a_{\frac{k}{2}-p_1,-};\, a^+_{-\frac{k}{2}+p_3,+}a^+_{\frac{k}{2}-p_3,-}\rangle\rangle^r_E\,\eta_k\Big],\quad c^2=\frac{1}{m}\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_{\theta=0} \qquad (4.27)$$

Формула (4.27)-приближенная, поскольку мы пользовались при её получении равенствами (4.23). Нас интересует асимптотика функции Грина при малых E, k, поэтому мы принимаем, что равенства (4.23) справедливы в низшем порядке также для малых E.

Из (4.27) получаем:

$$\sum_{p_1}\langle\langle a_{\frac{k}{2}+p_1,+}a_{\frac{k}{2}-p_1,-};\, a_{-\frac{k}{2}-p,+}a_{-\frac{k}{2}+p,-}\rangle\rangle^r_E =$$

$$= \frac{a_c\rho_0c^2\,\mathfrak{f}_1(p+\frac{k}{2})}{\pi(E^2-c^2k^2)},$$

$$\sum_{p_1}\langle\langle a_{\frac{k}{2}+p_1,+}a_{\frac{k}{2}-p_1,-};\, a^+_{-\frac{k}{2}+p,+}a^+_{\frac{k}{2}-p,-}\rangle\rangle^r_E = \qquad (4.28)$$

$$= -\frac{a_0\rho_0c^2\,\mathfrak{f}_1(p+\frac{k}{2})}{\pi(E^2-c^2k^2)}.$$

3) Общий случай.

Из уравнений (4.20) получаем

$$\vec{k}\,\vec{v}_s(k) = -\frac{4\gamma(k)\sqrt{\rho_0}\,\Delta(k,E)k^2}{m\,\Omega(k,E)}(\eta^+_{-k}-\eta_k), \qquad (4.29)$$

где

$$\Omega(k,E)=(E^2-c_1^2k^2)(E^2-c_0^2k^2),$$

$$c^2_{0,1}=\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_S+\frac{S^2\rho_s\theta}{m\rho_n c_v}\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{1}{m}\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_S+\frac{2S^2\rho_s\theta}{\rho_n m c_v}\right]^2-\frac{1}{m}\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_\theta\frac{2\rho_s\theta S^2}{m\rho_n c_v}},$$

$$c_v=\theta\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho, \qquad (4.30)$$

c_0 (знак +)-скорость, связана с обычной скоростью звука. Она стремится к ней как при $\rho_s \to 0$, так и при $\theta \to 0$. Величина c_1- аналог специфической для сверхтекучей бозе-жидкости скорости "второго звука". Она стремится к нулю при $\rho_s \to 0$.

Величина $\Delta(E,k)$ имеет вид:

$$\Delta(E,k)=\frac{1}{m}\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_\theta k^2\frac{S^2\theta}{\rho_n c_v}-E^2\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_S-\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho S^2\right)_\theta\frac{\theta}{\rho c_v}\right]: \qquad (4.31)$$

Подчеркнем, что формулы (4.29), (4.30) имеют вид, аналогичный соответствующим для случая бозе-жидкости, получены в /I/. (Формула (4.29) отличается множителем $-4\gamma(k)$) в выражениях для $c_{0,1}$ вместо ρ_s появляется $2\rho_s$ из-за этого, что мы ввели массу пары $M=2m$).

После сравнения в (4.I4) и (4.29) коэффициентов при η^*_{-k}, η_k и принятия в нижнем порядке равенств (4.23) получаем окончательно:

$$\sum_{p_1}\langle\langle a_{\frac{k}{2}+p_1,+}a_{\frac{k}{2}-p_1,-};\, a_{-\frac{k}{2}-p,+}a_{-\frac{k}{2}+p,-}\rangle\rangle^r_E =$$

$$= -\frac{4\rho_0a_0\Delta(E,k)\,\mathfrak{f}_1(p+\frac{k}{2})}{\Omega(k,E)}, \qquad (4.32)$$

$$\sum_{p_1}\langle\langle a_{\frac{k}{2}+p_1,+}a_{\frac{k}{2}-p_1,-};\, a^+_{\frac{k}{2}+p,+}a^+_{\frac{k}{2}-p,-}\rangle\rangle^r_E =$$

$$= \frac{4\rho_0a_0\Delta(E,k)\,\mathfrak{f}_1(p+\frac{k}{2})}{\Omega(k,E)}.$$

На основании (4.30) видно, что функции Грина имеют полюса, соответствующие двум типам элементарных возбуждений,

$$E = c_0 k \quad , \quad E = c_1 k \; . \tag{4.33}$$

Таким образом, нами показано, что в системе одинаковых Ферми--частиц с парным взаимодействием (в системе находится конденсат из связанных пар) появляются элементарные возбуждения двух типов - кванты первого и второго звука.

Автор выражает глубокую благодарность академику Н.Н. Боголюбову за предложение темы настоящей работы и за многочисленные дискуссии в процессе работы.

Литература

1. Н.Н. Боголюбов. К вопросу о гидродинамике сверхтекучей жидкости. Препринт ОИЯИ, Р-1395, Дубна, 1963.
2. L.P. Kadanoff and P.C. Martin. Ann. Phys., N.Y., 24, 419 (1963).
3. З. Галясевич. Асимптотические вычисления функции Грина в приближении вязкой жидкости для сверхтекучих бозе-систем. Препринт ОИЯИ, Р-1517, Дубна, 1964, направлено в печать в An., Phys. N.Y.
4. P.C. Hohenberg and P.C. Martin. Phys.Rev.Letters, 12, 69 (1964).
5. Н.Н. Боголюбов. Квазисредние в задачах статистической механики. Препринт ОИЯИ, Р-1451, Дубна, 1963.
6. Н.Н. Боголюбов. УФН, 67, 549 (1959).
7. А. Абрикосов, И. Халатников. УФН, 65, 551 (1958).
8. Н.Н. Боголюбов. Проблемы динамической теории в статистической физике. Гостехиздат, М-Л, 1946.

Рукопись поступила в издательский отдел 16 января 1965 года.