

С 324

В-676

5/II - 68.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P - 1935



ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

М.К. Волков

ДВУМЕРНАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МОДЕЛЬ
 КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ
 БЕЗ УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫХ РАСХОДИМОСТЕЙ
 ЯФ, 1965, т 2, в 1, с 171-179.

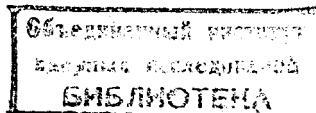
1965

P - 1935

М.К. Волков

ДВУМЕРНАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МОДЕЛЬ
КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ
БЕЗ УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫХ РАСХОДИМОСТЕЙ

Направлено в журнал "Ядерная физика"



2913/2 48.

В в е д е н и е

В работах /1,2/ исследовалась модель, предложенная впервые Бялыницким-Бируля в локальной теории поля с фиксированным нуклоном, обладающим двумя состояниями с различными массами. Модель построена на лагранжиане

$$L(x) = L_0(\Psi(x), \phi(x)) - g: \bar{\Psi}(x) r_1 \gamma_\nu \Psi(x) \partial_\nu \phi(x) : - \Delta m_0 : \bar{\Psi}(x) r_3 \Psi(x) : , \quad (1)$$

где (2)

$$L_0(\Psi(x), \phi(x)) = \frac{i}{2} : (\bar{\Psi}(x) \gamma_\nu \partial_\nu \Psi(x) - \partial_\nu \bar{\Psi}(x) \gamma_\nu \Psi(x)) : - m : \bar{\Psi}(x) \Psi(x) : + : \partial^\nu \phi(x) \partial_\nu \phi(x) - \mu_0^2 \phi^2(x) :$$

r_1 и r_3 - матрицы изотопического спина, γ_ν - матрицы Дирака, $\Psi(x)$ - оператор спинорного поля, $\phi(x)$ - оператор скалярного поля.

Лагранжиан (1) обладает тем замечательным свойством, что при $\Delta m_0 = 0$ унитарным преобразованием

$$\Psi'(x) = e^{i g r_1 \phi(x)} \Psi(x) \quad (3)$$

он приводится к диагональному виду: $L(x) = L_0(\Psi'(x), \phi(x))$. Та часть лагранжиана $L(x)$, которая содержит Δm_0 , после преобразования (3) принимает вид существенно нелинейного взаимодействия

$$L'(x) = \Delta m_0 : \bar{\Psi}'(x) r_3 e^{-i 2 g r_1 \phi(x)} \Psi'(x) : . \quad (4)$$

Лагранжианы такого типа исследовались в работах /3,4/.

При $\Delta m_0 = 0$ легко получить точные выражения для всех функций Грина квантованных полей. Правда, S - матрица в данном случае единична, но эти функции можно использовать для построения приближенных решений полевых уравнений с $\Delta m_0 \neq 0$, т.е. уже не единичной S - матрицей.

Для случая фиксированного нуклона такие решения исследованы в работе /2/. Интересно было бы продолжить эти исследования на релятивистскую область. Но в реальном четырехмерном пространстве-времени мы встречаемся с пока непреодолимой трудностью, которая заключается в невозможности построения Фурье-образов для ряда величин. Например, спинорная функция Грина при $\Delta m_0 = 0$ имеет вид

$$G_0(x, x') = Z_2 S_0^0(x, x') e^{-i g^2 \Delta_0(x, x')}, \quad (5)$$

где

$$S_0^0(x, x') = i \langle T(\Psi(x) \bar{\Psi}(x')) \rangle_0, \quad \Delta_0(x, x') = i \langle T(\phi(x) \phi(x')) \rangle_0, \quad (6)$$

$Z_2 = e^{i g^2 \Delta_0(0)}$ — константа перенормировки. Функция $G_0(x, x')$ в нуле интервала $(x-x')^2$ обладает существенной особенностью вида

$$- \frac{1}{\epsilon y^2}, \quad y^2 \rightarrow 0, \quad (7)$$

что и является причиной вышеупомянутого затруднения при построении Фурье-образа этой величины. Подобных неприятностей не возникает в двумерном случае, где $\Delta_0(x, x')$ на световом конусе имеет лишь логарифмическую особенность. Поэтому представляет известный интерес задача — рассмотреть релятивистскую модель в двумерном пространстве-времени. Фурье-образы величин здесь могут быть определены. Но необходимо с особой тщательностью исследовать поляризацию вакуума, где обычно содержатся наиболее сильно расходящиеся диаграммы. Однако проведенные расчеты показали конечность указанной величины при определенных требованиях на константу g . Таким образом, теория в двумерном случае свободна от ультрафиолетовых расходимостей.

В настоящей работе исследованы поляризационный оператор, скалярная и спинорная функции Грина в двумерном случае. Расчеты проведены до второго порядка по Δm_0 . Автором были получены поправки к функциям Грина, пропорциональные $(\Delta m_0)^4$, показавшие конечность теории и в этом порядке. Ввиду громоздкости полученных выражений мы не приводим их в данной работе.

1. Спинорная функция Грина и поляризация вакуума во внешнем классическом поле $\phi(x)$

Для нахождения интересующих нас величин будут использованы методы функционального интегрирования (см., например, /5/). Построение квантовых функций Грина с помощью указанных методов требует знания спинорной функции Грина и поляризации вакуума во внешнем классическом поле. Найдем эти величины.

С лагранжианом (1) связано следующее уравнение для спинорной функции Грина:

$$(-i \hat{\partial}_x + m + g r_1 \hat{\partial}_x \phi(x) + r_3 \Delta m_0) G(x, x' | \phi) = \delta(x - x'). \quad (8)$$

Решим это уравнение, считая $\phi(x)$ классическим внешним полем. Преобразованием

(3) оно приводится к виду:

$$(-i \hat{\partial}_x + m + r_3 \Delta m_0 e^{-i 2 g r_1 \phi(x)}) G_1(x, x' | \phi) = \delta(x - x'). \quad (9)$$

где

$$G_1(x, x' | \phi) = e^{i g r_1 \phi(x)} G(x, x' | \phi) e^{-i g r_1 \phi(x')}. \quad (10)$$

Решение уравнения (9) ищем в виде ряда по Δm_0 . В результате имеем

$$G(x, x' | \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-r_3 \Delta m_0)^n \int dy_1 \dots dy_n S_0^0(x y_1) S_0^0(y_1 y_2) \dots S_0^0(y_n x') \exp \{ i 2 g r_1 \left[\frac{\phi(x) + (-1)^{n+1} \phi(x)}{2} - \phi(y_n) + \dots + \phi(y_1) + (-1)^n \phi(y_1) \right] \}. \quad (11)$$

Вычисление поляризации вакуума $S_0(\phi)$ проведем, следуя монографии Н.Н. Боголюбова и Д.В. Ширкова /5/:

$$S_0(\lambda/\phi) = \langle T \{ \exp \{ -i \lambda \int dx \bar{\Psi}(x) r_1 \gamma_\nu \Psi(x) \partial_\nu \phi(x) + \Delta m_0 \int dx \bar{\Psi}(x) r_3 \Psi(x) \} \} \rangle_0. \quad (12)$$

Дифференцируя это выражение по λ , а затем интегрируя при условии $S_0(0/\phi) = 1$, получаем

$$S_0(\phi) = \exp \left(\int d\lambda \int dx [g \text{Sp} \{ G_\lambda(x, x/\phi) r_1 \gamma_\nu \partial_\nu \phi(x) + \Delta m_0 \text{Sp} \{ G_\lambda(x, x/\phi) r_3 \} \} \right), \quad (13)$$

где

$$G_\lambda(x, x/\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-r_3 \lambda \Delta m_0)^n \int dy_1 \dots dy_n S_0^0(x y_1) S_0^0(y_1 y_2) \dots S_0^0(y_n x) \times \quad (14)$$

$$\times \left[\cos 2g\lambda \left(\frac{1+(-1)^{n+1}}{2} \phi(x) - \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \phi(y_i) \right) + i r_1 \sin 2g\lambda \left(\frac{1+(-1)^{n+1}}{2} \phi(x) - \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \phi(y_i) \right) \right].$$

С учетом (14) $S_0(\phi)$ принимает вид

$$S_0(\phi) = \exp \left(- \int d\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda \Delta m_0)^{2n}}{\lambda^2} \int dy_1 \dots dy_{2n} \text{Sp} \{ S_0^0(y_1 y_2) \dots S_0^0(y_{2n} y_1) \} [2\lambda g \phi(y_1) \sin 2\lambda g \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i \phi(y_i) + \dots + \cos 2\lambda g \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i \phi(y_i)] \right). \quad (15)$$

Полученные выражения для $G(x, x' | \phi)$ и $S_0(\phi)$, представленные в виде ряда по степеням Δm_0 , экспоненциальным и степенным образом зависят от внешнего поля $\phi(x)$. При построении квантовых функций Грина эти качества $G(x, x' | \phi)$

и $S_0(\phi)$ приведут к тому, что все функциональные интегралы будут гауссова типа и смогут быть взяты до конца.

2. Скалярная функция Грина и поляризационный оператор
(второй порядок)

Зная $S_0(\phi)$, легко найти скалярную функцию Грина

$$\Delta(x, x') = i \frac{\int \delta \phi e^{-\frac{1}{2} \int \mu \xi \alpha \xi' \phi(\xi) \Delta_0^{-1}(\xi, \xi') \phi(\xi')} \phi(x) \phi(x') S_0(\phi)}{\int \delta \phi e^{-\frac{1}{2} \int \mu \xi \alpha \xi' \phi(\xi) \Delta_0^{-1}(\xi, \xi') \phi(\xi')} S_0(\phi)} = \quad (16)$$

$$= -\Delta_0(x, x') + \int dy_1 dy_2 \Delta_0(x, y_1) \Pi(y_1, y_2) \Delta_0(y_2, x').$$

Здесь $\Pi(y_1, y_2)$ - поляризационный оператор. Во втором порядке по Δm_0 он имеет вид:

$$\Pi^{(2)}(y) = -i 8g^2 (\Delta m)^2 \int \mu \xi \alpha \xi' \{S_0^0(\xi) S_0^0(-\xi)\} e^{-i 4g^2 \Delta_0(\xi)} \delta(\xi - y) - \delta(y), \quad (17)$$

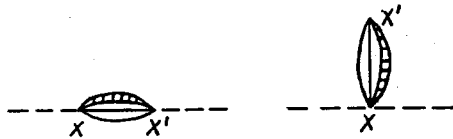
где Δm - перенормированная разность масс, которая только и будет встречаться в окончательных выражениях для интересующих нас физических величин. С затравочной Δm_0 она связана соотношением

$$\Delta m = \Delta m_0 e^{12g^2 \Delta_0(0)}. \quad (18)$$

Интеграл в (17) сходится при

$$\frac{g^2}{\pi} < 1. \quad (19)$$

Выражению (17) соответствуют две диаграммы, описывающие функцию Грина во втором порядке по Δm после унитарного преобразования (3) (см. рис. 1).



Р и с. 1

Пунктирными и сплошными линиями изображены скалярные и спинорные пропагаторы соответственно. Линия означает сколь угодно много скалярных пропагаторов.

Каждая из приведенных на рис. 1 диаграмм расходится, но эти расходимости компенсируются в (17), и мы получаем конечную величину.

Для исследования асимптотического поведения функции Грина и ее аналитических свойств необходимо перейти к импульсному пространству. В области $p^2 < 0$ получим

$$\Pi^{(2)}(p^2) = -\frac{8}{\pi} (gm)^2 (\Delta m)^2 \int_0^\infty dt \pi (K_1^2(mt) - K_0^2(mt)) e^{\frac{2}{\pi} g^2 K_0^2(\mu r)} (I_0(p) - 1), \quad (17, a)$$

при $p^2 > 0$

$$\Pi^{(2)}(p^2) = -2\pi (gm)^2 (\Delta m)^2 \int_0^\infty dt \pi [H_1^{(2)}(mr) + H_0^{(2)}(mr)] e^{-i g^2 H_0^{(2)}(\mu r)} (I_0(p) - 1). \quad (17, b)$$

Здесь $J_0(x)$, $H_{0,1}^{(2)}(x)$, $K_{0,1}(x)$ - функции Бесселя.

В области $0 \leq p^2 \leq 4m^2$ (17, б) с помощью поворота контура $t \rightarrow -it'$ записывается как

$$\Pi^{(2)}(p^2) = -\frac{8}{\pi} (gm)^2 (\Delta m)^2 \int_0^\infty dt \pi (K_1^2(mt) - K_0^2(mt)) e^{\frac{2}{\pi} g^2 K_0^2(\mu r)} (I_0(p) - 1) > 0. \quad (17, в)$$

Чтобы получить $\Pi^{(2)}(p^2)$, удобное для работы в области $4m^2 < p^2 < \infty$, применим процедуру, развитую в работах [3, 6]. Приходим к следующему виду $\Pi^{(2)}(p^2)$:

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)}(p^2) = & -\frac{8}{\pi} (gm)^2 (\Delta m)^2 \int_0^\infty dt \pi (K_1^2(mt) - K_0^2(mt)) e^{\frac{2}{\pi} g^2 K_0^2(\mu r)} (I_0(p) - 1) - \\ & - \int_0^\infty dt \pi (K_1^2(mt) - K_0^2(mt)) [e^{\frac{2}{\pi} g^2 K_0^2(\mu r)} - I_0(p) (e^{\frac{2}{\pi} g^2 K_0^2(\mu r)} \frac{[P]}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[2g^2 K_0^2(\mu r)]^n}{n!}})] + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[P]}{n!} \int_0^\infty dt \pi (K_1^2(mt) - K_0^2(mt)) K_0^n(\mu r) I_0(p). \end{aligned} \quad (17, г)$$

Полученные выражения поляризационного оператора будут использованы для нахождения перенормированной массы и функции Грина скалярного поля, исследования асимптотического поведения ее мнимой части при больших импульсах и построения спектрального представления.

В импульсном пространстве (16) имеет следующий вид во втором порядке по Δm :

$$\Delta(p) = \frac{1}{\mu_0^2 - p^2} + \frac{\Pi^{(2)}(p^2)}{(\mu_0^2 - p^2)^2} \approx \frac{1}{\mu^2 - p^2 + (\Pi^{(2)}(p^2) - I_0^2(p^2))} \approx \frac{Z_2}{\mu^2 - p^2}, \quad (20)$$

где

$$\mu^2 = \mu_0^2 - \Pi^{(2)}(\mu^2); \delta\mu^2 = -\Pi^{(2)}(\mu^2) > 0,$$

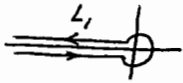
$$Z_s = \frac{1}{1 + (\Pi^{(2)}(p^2))' \Big|_{p^2 = \mu^2}} < 1, \quad (\Pi^{(2)}(p^2))' \Big|_{p^2 = \mu^2} > 0,$$

что находится в полном согласии с требованиями, предъявляемыми к конечной самосогласованной теории.

Найдем асимптотическое поведение мнимой части $\Pi^{(2)}(p^2)$ при $p^2 \rightarrow \infty$. Из выражения (17,г) методом, аналогичным использованному в работе /8/, для $\Im \Pi^{(2)}(p^2)$ находим

$$\Im \Pi^{(2)}(p^2) = -i \pi^2 \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{p}{16g} \rfloor} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{L_1} dz z (H_1^{(2)}(mz) - H_0^{(2)}(mz)) H_0^{(2)}(\mu z) H_0^{(1)}(pz), \quad (21)$$

где L_1 есть контур, изображенный на рис. 2.



Р и с. 2

Для оценки $\Im \Pi^{(2)}(p^2)$ при стремлении p^2 к бесконечности можно использовать метод перевала. В результате получаем (см. Приложение)

$$\Im \Pi^{(2)}(p^2) < \text{Const} \left(\frac{p}{\mu}\right)^{\frac{2}{\pi}} g^2. \quad (22)$$

С помощью выражения (17,а) можно показать, что $\Pi^{(2)}(p^2)$ при $p^2 \rightarrow \infty$ и в верхней комплексной полуплоскости ограничено той же величиной, что и мнимая часть, т.е.

$$|\Pi^{(2)}(p^2)| < C \left(\frac{p}{\mu}\right)^{\frac{2}{\pi}}. \quad (23)$$

Но тогда $\frac{\Pi^{(2)}(p^2)}{(p^2 - \mu_0^2)^2}$ будет аналитической функцией в верхней полуплоскости, и к ней можно применить интегральную формулу Коши. В результате приходим к представлению Лемана для скалярной функции Грина:

$$\Delta(p) = \frac{1}{\mu_0^2 - p^2} + \frac{\Pi^{(2)}(\mu_0^2)}{(\mu_0^2 - p^2)^2} - \frac{\Pi^{(2)}(\mu_0^2)}{\mu_0^2 - p^2} + \frac{1}{\pi} \int_{\mu_0^2}^{\infty} \frac{\Im \Pi^{(2)}(\kappa) d\kappa}{4m^2(\kappa - p^2)(\kappa - \mu_0^2)^2} =$$

$$= \frac{Z_s}{\mu^2 - p^2} + \frac{1}{\pi} \int_{\mu_0^2}^{\infty} \frac{\Im \Pi^{(2)}(\kappa) d\kappa}{4m^2(\kappa - p^2)(\kappa - \mu_0^2)^2}. \quad (24)$$

Проведенное исследование показало полное согласие поведения рассматриваемой функции Грина с требованиями, предъявляемыми к конечной замкнутой теории.

3. Спинорная функция Грина

Вычислим спинорную функцию Грина до второго порядка по Δm и покажем, как происходит перенормировка массы.

Используя (11) и (15) с помощью функционального интегрирования для спинорной функции Грина получаем

$$G(x, x') = \frac{\int \delta \phi e^{-\frac{i}{2} \int d\xi d\xi' \phi(\xi) \Delta_0^{-1}(\xi\xi') \phi(\xi')} G(xx' | \phi) S_0(\phi)}{\int \delta \phi e^{-\frac{i}{2} \int d\xi d\xi' \phi(\xi) \Delta_0^{-1}(\xi\xi') \phi(\xi')} S_0(\phi)} =$$

$$= Z_2 S_0^0(xx') e^{-i g \Delta_0^2(xx')} \{ 1 - (\Delta m)^2 \int dy_1 dy_2 e^{-i 4g^2 \Delta_0^2(y_1 y_2)} \text{Sp} \{ S_0^0(y_1 y_2) S_0^0(y_2 y_1) \} \} \times$$

$$\times (\text{Cos } 2g^2 [\Delta_0(xy_2) - \Delta_0(y_2 x') - \Delta_0(xy_1) + \Delta_0(y_1 x')] - 1) - Z_2 g^2 \Delta m e^{i g^2 \Delta_0^2(xx')} \int dy S_0^0(xy) S_0^0(gx) e^{-2i g^2 [\Delta_0(xy) + \Delta_0(yx)]} +$$

$$+ Z_2 (\Delta m)^2 e^{-i g^2 \Delta_0^2(xx')} \int dy_1 dy_2 S_0^0(xy_1) S_0^0(y_1 y_2) S_0^0(y_2 x') \exp \{ i 2g^2 [\Delta_0(xy_2) - \Delta_0(y_2 x') - \Delta_0(xy_1) + \Delta_0(y_1 x')] - 4g^2 \Delta_0^2(y_1 y_2) \}.$$

Для нахождения массового оператора воспользуемся формулой

$$G(p) = S_0(p) + S_0(p) M(p) G(p). \quad (27)$$

Представляя $G(p)$ и $M(p)$ в виде ряда по $(g \Delta m)$, получаем из (27) цепочку уравнений, связывающих функции Грина с массовым оператором в различных порядках.

$$G_0(p) = S_0(p) + S_0(p) M_0(p) G_0(p), \quad (27,а)$$

$$G_1(p) = S_0(p) [M_1(p) G_0(p) + M_0(p) G_1(p)], \quad (27,б)$$

$$G_2(p) = S_0(p) [M_2(p) G_0(p) + M_1(p) G_1(p) + M_0(p) G_2(p)]$$

.....

а) Рассмотрим нулевой порядок

$$G_0(x, x') = -Z_2 S_0^0(x, x') e^{-i g^2 \Delta_0(x, x')}$$

В импульсном пространстве в области $0 \leq p^2 \leq (\mu + m)^2$ $G_0(p)$ имеет вид:

$$G_0(p) = -Z_2 \left\{ \frac{1}{m - \hat{p}} + m \int_0^\infty dt \pi(e^{\frac{g^2}{2t} K_0(\mu t)} - 1) \left(\int_0^{\hat{p}} (|p|t) K_0(mt) - \frac{\hat{p}}{|p|} \int_1^{\hat{p}} (|p|t) K_1(mt) \right) \right\} = \frac{Z_2}{m - M_0(p) - \hat{p}}, \quad (28)$$

где

$$M_0(p) = (m - \hat{p})^2 F(\hat{p}), \quad F(\hat{p}) \Big|_{|p|=m} \neq 0. \quad (29)$$

Отсюда видно, что в этом порядке полюс функции Грина не сдвигается.

б) первый порядок

$$G_1(x, x') = -Z_2 r_3 \Delta m e^{i g^2 \Delta(x, x')} \int dy S_0^0(xy) S_0^0(yx') e^{-i g^2 [\Delta_0(xy) + \Delta_0(yx')]} \quad (30)$$

В импульсном пространстве эту функцию можно представить в виде

$$Z_2^{-1} G_1(p) = - \frac{r_3 \Delta m}{(m - \hat{p})^2} - r_3 \Delta m \Phi(\hat{p}). \quad (31)$$

Функция $\Phi(\hat{p})$ имеет полюс первого порядка в точке $|p| = m$ и точку ветвления при $p^2 = (m + \mu)^2$.

Из формулы (27,б) получим для массового оператора

$$M_1(\hat{p}) = -r_3 \Delta m [1 - (m - \hat{p}) F(\hat{p})]^2 [1 + (m - \hat{p})^2 \Phi(\hat{p})], \quad (32)$$

откуда видно, что полюс функции Грина сдвигается на величину $-r_3 \Delta m$ при учете членов первого порядка по Δm .

Учет членов второго порядка по $(\Delta m)^2$ дает вклад в сдвиг полюса функции Грина, пропорциональный $(\Delta m)^2$.

Исследование спинорной функции Грина в области малых x приводит к следующему ограничению на константу связи:

$$\frac{2}{\pi} g^2 < 1. \quad (33)$$

После удовлетворения этого требования ультрафиолетовые расходимости будут отсутствовать во всех порядках теории возмущений. Аналогичные ограничения на константу g возникали в модели с фиксированным нуклоном (2).

4. Заключение

Проведенное исследование показало, что интересующая нас модель в двумерном случае удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к замкнутой последовательной теории. Она приводит к конечной перенормировке массы, не имеет ультрафиолетовых расходимостей. Функции Грина обладают правильными аналитическими свойствами.

Следует отметить еще то качество рассматриваемой модели, что при разложении по Δm в каждом порядке как бы проведено суммирование по константе g . Это дает возможность уже в низших порядках по Δm рассматривать амплитуды множественного рождения частиц, что представляет известный интерес.

В заключение заметим, что подобными свойствами обладает и ряд других моделей, например, модель, рассмотренная Р. Арновитом и С. Дезером^{17/}. Но по сравнению с исследуемой моделью она обладает некоторыми недостатками (разложение проведено по большому параметру - массе нуклона, возможны инфракрасные расходимости).

Автор выражает благодарность Г.В. Ефимову и Б.М. Барбашову за предложение темы и особо признателен первому за многочисленные плодотворные обсуждения. Автор также глубоко благодарен проф. Д.И. Блохинцеву и акад. Н.Н. Боголюбову за внимание к работе и ценные указания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

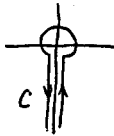
Для нахождения асимптотики $\hat{M}_n^{(2)}(p^2)$ при $p^2 \rightarrow \infty$ исследуем следующее выражение:

$$-\frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{p}{\mu} \rfloor} \frac{[2 - \frac{g^2}{\mu}]^n}{n!} \int_C dz F_n(z), \quad (1.1)$$

где

$$F_n(z) = z K_1^2\left(\frac{m}{p} z\right) K_0^n\left(\frac{\mu}{p} z\right) I_0(z) \quad (1.2)$$

и C - контур, изображенный на рис. 3.



Р и с. 3

Это выражение получается из формулы (21) после замены переменных $z \rightarrow -iz'$ рассмотрения лишь главных членов в каждом порядке по n .

Функция $F_n(z)$ на действительной положительной оси имеет точку перевала при малых значениях аргумента (если p велико). Поэтому интеграл в (1.1) можно оценить методом перевала,

$$\int_C dz F_n(z) \approx \int_0^{\infty} dz e^{f(z)}, \quad f(z) = \ln \Phi(z), \quad (1.3)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{(\ln \frac{1}{\mu})^n}{z} e^{(p - \mu z - 2n)z} R(z), \quad (1.4)$$

$R(z)$ — медленно меняющаяся функция.

Точка перевала, найденная из равенства нулю $f'(z)$, есть

$$z_0 \approx \frac{1}{p} \left(1 + \frac{n}{\ln p}\right), \quad f''(z_0) \approx p^2 \left(1 + \frac{n}{\ln p}\right) \gg 1. \quad (1.5)$$

Отсюда

$$\int_C dz F_n(z) = \int_{-i\infty + \varepsilon_0}^{+i\infty + \varepsilon_0} dz e^{i f(z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0) (z - z_0)^2} \approx i F(z_0) \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{1}{2} f''(z_0) t^2} \approx i \left(\ln \frac{p}{\mu}\right)^n \phi(n, p), \quad (1.6)$$

где

$$\phi(n, p) \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{m^2} \frac{I_0\left(1 + \frac{n}{\ln p}\right)}{\left(1 + \frac{n}{\ln p}\right)^{3/2}}. \quad (1.7)$$

Функция $\phi(n, p)$ ограничена некоторой константой при фиксированном n и $p \rightarrow \infty$. Заменяя ее на эту константу и подставляя (1.6) в (1.1), мы получим, заменив предел суммирования $\left[\frac{p}{\mu}\right]$ на ∞ (благодаря $n!$ в знаменателе это не приведет к существенному изменению результата), следующее:

$$\Im \Pi^{(2)}(p) \leq \text{Const} \sum_0^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{\mu} g^2 \ln \frac{p}{\mu}\right)^n}{n!} = \text{Const} \left(\frac{p}{\mu}\right)^{\frac{2}{\mu}} g^2, \quad (1.8)$$

где

$$\text{Const} > \frac{1}{2} \phi(n, p).$$

Л и т е р а т у р а

1. I. Bialynicki-Birula, Nucl. Phys., 12, 309 (1959).
2. Б.М. Барбашов, Г.В. Ефимов, ЖЭТФ, 40, 848 (1961).
3. Г.В. Ефимов, ЖЭТФ, 44, 2107 (1963).
4. E.S. Fradkin, Nucl. Phys., 49, 624 (1963).
5. Н.Н. Боголюбов и Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, 1957.
6. М.К. Волков, Г.В. Ефимов, ЖЭТФ, 47, 1800 (1964).
7. R. Arnowitt, S. Deser, Phys. Rev., 100, 347 (1955).

Рукопись поступила в издательский отдел
30 декабря 1964 г.