5/II 65.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-1934

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

М.И. Широков

О ЛОКАЛЬНОСТИ ТЕОРИИ ПОЛЯ ПО НЕКОММУТИРУЮЩИМ КООРДИНАТАМ

ЯФ, 1965, т 2, в 2, с 332-341.

1965

Р-1934

М.И. Широков

О ЛОКАЛЬНОСТИ ТЕОРИИ ПОЛЯ ПО НЕКОММУТИРУЮЩИМ КООРДИНАТАМ

Направлено в журнал "Ядерная физика"

В в е д е н и е

В этой работе исследуется одна попытка ввести в квантовую теорию поля измененное понятие координаты. Помимо обычнс декларируемой цели – устранения расходимостей – у такого рода попыток есть и другой смысл. Желательно иметь много конкурирующих теорий (одинаково безупречных в смысле общих требований), чтобы можно было выбрать теорию, соответствующую эксперименту.

Вместо того, чтобы нумеровать степени свободы поля координатами x_1, x_2, x_3, x_4, предлагаются в качестве параметров собственные значения других операторов r_μ, похожих в определенном смысле (см. § 1) на оператор x_μ. Потребуем, чтобы лагранжиан взаимодействия был локален в терминах этих собственных значений. Такое взаимодействие будет выглядеть как нелокальное в обычной параметризации (с помощью x_1, x_2 x_3, x_4). После этого в рамках обычной нелокальной теории накладываются требования трансляционной и лоренцовской инвариантности, а также унитарности теории (эрмитовости лагранжиана взаимодействия). Задачу работы можно изложить еще и так: найти класс трансляционно-лоренцовски инвариантных взаимодействий с формфакторами, которые можно представить как локальные по некоторой координате, отличной от x.

Следует отметить, что требуется переформулировка определения понятия локальности в случае, когда разные компоненты $\hat{r}_\mu$ не перестановочны, как, например, для координаты $\hat{s}_\mu$ Снайдера [1] (см. § 3).

Причинность в такого рода теории естественно было бы обсуждать в терминах новой координаты r_μ. Уже сама локальность по r_μ является признаком причинности (в терминах r_μ), хотя и недостаточным.

Укажем одно отличие настоящего подхода от некоторых близких попыток ввести измененную координату в теорию поля. Снайдер рассматривал [2] операторы поля как функции <u>операторов</u> $\hat{s}_\mu$. Такие величины могут быть изображены матрицами в x – представлении и они рассматривались также в работах М.А.Маркова, Х.Юкавы и др. (см. ссылки в [3]). Здесь новые операторы полей не матрицы, а некоторые суперпозиции операторов полей в x –представлении (см. далее (2.3)).

Результат работы означает, что употребление именно координаты x в теории поля оправдывается не только ее простотой.

§ 1. Операторы координаты

Одно из основных требований, предъявляемых к теории – ковариантность относительно неоднородной группы Лоренца. Входящие в эту группу трансляции являются сдвигами в некотором четырехмерном пространстве x_1, x_2, x_3, x_4. Следовательно, понятие о координате x является предпосылкой построения теории. Обычно считается, что кроме указанной функции, x_μ должны играть также роль координаты частицы, а в теории поля – роль параметров, нумерующих степени свободы поля. Понятие локальности взаимодействия определяется именно в терминах этих параметров. Эти две роли могут совпадать. В книге Швебера[4] (см. гл. 7 § 3), показано, что одночастичная амплитуда $\Phi^{(1)}(x)$, с одной стороны, зависит именно от параметров поля

$$\Phi^{(1)}(x) = \langle 0 | \phi^{+}(x) | \Phi \rangle ,$$

а, с другой стороны, может физически интерпретироваться как амплитуда вероятности найти частицу в точке $\vec{x}$ в момент x_0. Параметры x_μ, фигурирующие в теории поля, можно поэтому считать собственными значениями набора операторов $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4$, являющихся эрмитовыми$^{x)}$ в рамках нормы

$$\int d^4x \; \Psi \; \Phi \qquad \text{или} \qquad \int d^4p \; \Psi \; \Phi \; . \tag{1.1}$$

Употребление x_μ в качестве параметров степени свободы поля или координаты частицы является, однако, дополнительным постулатом. Из него следует, что x_μ и x_ν, а также x_μ и p_ν, $\mu \neq \nu$, можно измерить точно одновременно, а неопределенности в измерении x_μ и p_μ связаны соотношением

$$\overline{\Delta x_\mu^2} \quad \overline{\Delta p_\mu^2} \geqslant h^2/4 \; .$$

Эти следствия эксперимент точно подтвердить не может (например, координата измеряется с точностью до размеров зерна фотоэмульсии). Во всяком случае, не будет противоречить эксперименту допущение о том, что каждую из компонент координаты можно измерить с точностью, не превышающей комптоновской длины волны частицы. Ввиду этого можно в качестве оператора координаты постулировать любой такой оператор r_μ, что 1) коммутация $[r_\mu, r_\nu] \sim$ не равна нулю, но "мала" в смысле, который определяется в дальнейшем; 2) $[r_\mu, p_\nu] \sim$ "мало" отличается от $i\delta_{\mu\nu}$.

В случае скалярной частицы любой ее квантово-механический оператор является функцией x_μ и p_μ см.[4], гл. 1 § 1. Потребуем, чтобы r_μ был четырехвектором. Тогда r_μ имеет такой общий вид:

---

x) Заметим, что Швебер не считает x оператором координаты на том основании, что $\vec{x}$ неэрмитов, если употреблять норму $(\psi,\phi) = \int d^3p / p_0 \, \psi \phi$, см.[4], гл. § 3. Но x_μ эрмитовы, если пользоваться более общей нормой (1.1). Только в случае, когда Ψ или Φ имеют вид $\theta(p_0)\,\delta(p^2+m^2)\,\psi(\vec{p})$, т.е. являются решениями уравнения Клейна-Гордона, эта норма сводится к $\int d^3p / p_0 \, \psi \, \phi$.

$$r_\mu = A \, x_\mu + p_\mu B \, , \tag{1.2}$$

где A и B некоторые функции от инвариантов x^2, (xp) и p^2. A и B содержат параметры, малость которых позволяет считать "малыми" $[r_\mu, r_\nu]$ и $[r_\mu, p_\nu] - i\,\delta_{\mu\nu}$. Например, для известного оператора координаты Снайдера[1] (обозначим его s_μ) имеем $A = 1$ и $B = \ell^2 (px)$, где ℓ – малая длина. Тогда в системе единиц $h = 1$ и $c = 1$:

$$[s_\mu, s_\nu] = i \ell^2 (x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu) \tag{1.3}$$

$$[s_\mu, p_\nu] = i (\delta_{\mu\nu} + \ell^2 p_\mu p_\nu) . \tag{1.4}$$

Правые части (1.3) и (1.4) мало отличаются от нуля и $i\delta_{\mu\nu}$ при действии на волновые функции, которые в импульсном представлении малы при $p_\mu > 1/\ell$. Видно также, что $[s_\mu, p_\nu]$ будет заметно отличаться от $i\delta_{\mu\nu}$ в состояниях с большим средним импульсом. Однако всегда можно выбрать ℓ^2 столь малым, чтобы не было противоречия с измеряющим координату реальным экспериментом (который имеет дело с конечными энергиями). Именно в этом смысле понимается малость $[r_\mu, r_\nu]$ в этой работе.

Импульсное пространство считаем обычным, плоским (в отличие от работ Гольфанда и Кадышевского[5]), норма определяется (1.1) и чтобы r_μ был эрмитовым оператором, будем считать, что произведена необходимая симметризация. В частности,

$$s_\mu = x_\mu + \ell^2 \big(p_\mu (px) + (xp)\, p_\mu\big)/2 = x_\mu + \ell^2 p_\mu (px) + i \, \frac{5}{2} \, \ell^2 p_\mu \, . \tag{1.5}$$

§ 2. Локальность по коммутирующей координате

Рассмотрим операторы r_μ такие, что $[r_\mu, r_\nu] = 0$, но $[r_\mu, p_\nu] \neq i\delta_{\mu\nu}$. Примеры: $r_\mu = A(x^2)\, x_\mu$ и

$$r_\mu = \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 2\ell^2 p^2}\right) x_\mu + \ell^2 p_\mu (px) + \text{э.}\partial. \tag{2.1}$$

В качестве параметров оператора скалярного поля ϕ берем собственные значения этих операторов (обозначая их тоже через r). Лагранжиан самовзаимодействия записываем в виде:

$$L_{B3} = \int d^4 r \; E(r) \, \phi(r) \, \phi^{+}(r) \, \phi(r) . \tag{2.2}$$

С помощью функции преобразования от полного набора операторов r_μ к полному набору x_μ, $\mu = 1,2,3,4$, можно выразить $\phi(r)$ через $\phi(x)$

$$\phi(r) = \int d^4x \, \langle r | x \rangle \, \phi(x) . \tag{2.3}$$

Функции $\langle x | r \rangle$ составляет ортогональную и полную систему функций (как собственные функции эрмитовых операторов r_μ), причем $\langle r | x \rangle = \langle x | r \rangle^*$; употреблены обозначения Дирака.

Через $\phi(x)$ L_{B8} выражается следующим образом:

$$L_{B8} = \int d^4 r \iiint d^4x' d^4x'' d^4x''' \, E(r) \langle r | x' \rangle \langle r | x'' \rangle^* \langle r | x''' \rangle \cdot \tag{2.4}$$
$$\cdot \phi(x') \phi^+(x'') \phi(x'''),$$

т.е. так же, как в обычной теории с нелокальным взаимодействием с формфактором

$$F(x', x'', x''') = \int d^4 r \, E(r) \langle r | x' \rangle \langle r | x'' \rangle^* \langle r | x''' \rangle . \tag{2.5}$$

Нет необходимости переписывать всю теорию в новой параметризации (полный лагранжиан, уравнения движения и пр.). Физическая роль оператора r_μ исчерпывается тем, что нелокальное взаимодействие (2.4) является локальным с точки зрения координат r_μ.

Перепишем (2.5) в импульсном представлении, умножая обе стороны (2.5) на $\exp i\,[(p'x') - (p''x'') + (p'''x''')]$ и интегрируя по x', x'', x''':

$$F(p', p'', p''') = \int d^4 r \, E(r) \langle r | p' \rangle \langle r | p'' \rangle^* \langle r | p''' \rangle . \tag{2.6}$$

Здесь фигурируют функции преобразования $\langle r | p \rangle = \int d^4 x \langle r | x \rangle \exp i (px)$. Трансляционная и лоренцовская инвариантность теории выражаются в импульсном представлении проще, чем в координатном: формфактор должен иметь вид (см.[6]):

$$F(p', p'', p''') = \delta^4(p' - p'' + p''') \, F(p'^2, p'''^2, (p'p''')). \tag{2.7}$$

Эрмитовость L_{B3} требует, чтобы

$$F(p'^2, p'''^2, (p'p''')) = F^*(p'''^2, p'^2, (p'''p')). \tag{2.8}$$

Задача, которая будет решаться, состоит в следующем: каковы должны быть $\langle r | p \rangle$ и функции $E(r)$ и F, удовлетворяющие (2.6) с учетом (2.7) и (2.8):

$$\int d^4 r \, E(r) \langle r | p' \rangle \langle r | p'' \rangle^* \langle r | p''' \rangle = \delta^4(p' - p'' + p''') \, F(p'^2, p'''^2, (p'p''')) . \tag{2.9}$$

Возможно задачу сформулировать в разных математических формах. Умножим обе части (2.9) на $\langle r_0 | p'' \rangle$ и проинтегрируем по p'', пользуясь полнотой функций $\langle r | p \rangle$. Тогда задача сводится к функциональному уравнению, которое в измененных обозначениях имеет вид:

$$E(r) \langle r | p \rangle \langle r | q \rangle = F(p^2, q^2, pq) \langle r | p + q \rangle . \tag{2.10}$$

Общей теории решения функциональных уравнений нет, решены только некоторые типы уравнений[7]. Один общий прием заключается в дифференцировании уравнения.

Логарифмируем уравнение (2.10) и обозначим $\ln E(r) = e(r)$, $\ln F = f$ и $\ln \langle r | p \rangle = \Psi_r(p)$:

$$e(r) + \Psi_r(p) + \Psi_r(q) = \Psi_r(p+q) + f(p^2, q^2, (pq)). \tag{2.11}$$

Дифференцируем (2.11) по p_λ, $\lambda = 1,2,3,4$:

$$\frac{\partial}{\partial p_\lambda} \Psi_r(p) = \frac{\partial}{\partial p_\lambda} \Psi_r(p+q) + f'' 2p_\lambda + f''' q_\lambda . \tag{2.12}$$

Здесь f'' обозначает производную по первому аргументу, аналогично $f''' = \partial f / \partial (pq)$. Заметим, что $\partial \Psi(p+q)/\partial p_\lambda = \partial \Psi(p+q)/\partial q_\lambda$. Положим теперь $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0$ и обозначим $\partial \Psi_r(p) / \partial p_\lambda$ в этой точке через $a_{r\lambda}$. Получаем

$$\frac{\partial}{\partial q_\lambda} \Psi_r(q) = a_{r\lambda} - q_\lambda f''(0, q^2, 0). \tag{2.13}$$

Обозначим $f'(0, q^2, 0) = -V(q^2)$. Функцию $\Psi_r(q)$ теперь можно выразить через $V(q^2)$, решая совместно четыре уравнения (2.13). Можно решение

$$\Psi_r(q) = a_{r1} q_1 + W(q^2) + Z(q_2, q_3, q_4) \tag{2.14}$$

первого уравнения (Z –произвольная функция, $W(x) = \int V(x) dx$) подставить во второе и т.д. Получаем:

$$\Psi_r(q) = \sum_\lambda a_{r\lambda} q_\lambda + W(q^2). \tag{2.15}$$

Теперь найдем зависимость от r. В (2.11) подставляем (2.15):

$$e(r) + W(p^2) + W(q^2) = W((p+q)^2) + f(p^2, q^2, (pq)). \tag{2.16}$$

Сюда $a_{r\lambda}$ не входят и поэтому они могут быть произвольными функциями r. Как видно, $e(r)$ от r не должно зависеть. Соотношение (2.16) выражает функцию F через W. Полагая в (2.16) $p = -q$ и дифференцируя после этого по p^2, получаем, что $2W'(p^2) = \partial f(p^2, p^2, -p^2)/\partial p^2 = F^{-1} \partial F / \partial p^2$. Из свойства эрмитовости (2.8) следует действительность $F(p^2, p^2, -p^2)$. Следовательно, $W'(p^2)$ тоже действительная функция, в остальном она совершенно произвольна.

Функции $\langle r | p \rangle = \exp[\sum_\lambda a_{r\lambda} p_\lambda + W(p^2)]$ должны образовывать ортогональную и полную систему. Для этого оператор, собственными функциями которого они являются, должен быть эрмитовым. Найдем его, дифференцируя $\langle r | p \rangle$ по p_λ:

$$\frac{\partial}{\partial p_\lambda} \langle r | p \rangle = (a_{r\lambda} + W' \cdot 2p_\lambda) \langle r | p \rangle . \tag{2.17}$$

Уравнение (2.17) может рассматриваться как уравнение для собственной функции оператора $r_\lambda = i \frac{\partial}{\partial p_\lambda} + 2ip_\lambda W'$ с собственным значением $a_{r\lambda}$. Первый оператор $i\partial/\partial p_\lambda$ сделан эрмитовским, но второй тогда неэрмитов ввиду действительности $W'(p^2)$. Оператор r_λ эрмитов только при $W' = 0$. Тогда для действительности собственных значений надо чтобы $a_{r\lambda}$ было чисто мнимым (удобно выбрать $a_{r\lambda} = i r_\lambda$).

Оказывается, что x_μ – единственный из всех коммутирующих операторов координаты, при котором обеспечивается одновременно локальность, эрмитовость и трансляционно-лоренцовская инвариантность взаимодействия.

Насколько общим является решение функционального уравнения, на основании которого сделан этот вывод? Задача была сведена к дифференциальным уравнениям и решение найдено в классе дифференцируемых функций. Но функция $\langle p | r \rangle$ должна быть собственной функцией оператора вида (1.2). В тех случаях, когда он является дифференциальным оператором в импульсном представлении функция с самого начала предполагается дифференцируемой. Следовательно, если ограничиваться классом таких операторов t_μ, то полученное решение является общим.

§ 3. Локальность по координате Снайдера

1. Выражение координаты Снайдера s_μ через $\hat{x}$ и $\hat{p}$ и перестановочные соотношения были выписаны в § 1. Поскольку $[s_\mu, s_\nu] \neq 0$, то необходима другая формулировка понятия локальности взаимодействия по координате Снайдера. Будем нумеровать степени свободы поля набором собственных значений одного из операторов s_μ, например, s_1 и трех других операторов, коммутирующих с ним и между собой (пример конкретного выбора их будет дан позже). В этом представлении запишем локальность L_{B3} по собственным значениям s_1, оставляя произвольной зависимости формфактора от остальных параметров. Требуем, чтобы L_{B3} в другом представлении, когда диагонален s_2, был локален по собственным значениям s_2 и т.д. В применении к операторам x_μ эта процедура дает обычную локальность.

2. Однако прежде всего надо обеспечить трансляционно-лоренцовскую инвариантность взаимодействия, локального хотя бы по одной из координат Снайдера. Для этого надо знать собственные функции s_μ. Оказывается возможным не только найти их без предварительного знания трех дополнительных операторов, но и получить автоматически наиболее простые такие три оператора.

Уравнение для собственной функции χ оператора s_μ является уравнением в частных производных первого порядка, если его записать в импульсном представлении x):

$$\left(i \frac{\partial}{\partial p_\mu} + \ell^2 p_\mu \sum_\lambda p_\lambda i \frac{\partial}{\partial p_\lambda} + \frac{5}{2} i \ell^2 p_\mu \right) \chi(p) = \rho_\mu \chi(p). \tag{3.1}$$

Пусть сначала μ принимает одно из значений 1, 2, 3. Составим уравнения для характеристик, см. /9/:

$$\frac{\partial p_\mu}{dt} = \ell^2 p_\mu^2 + 1; \qquad \frac{d p_a}{dt} = \ell^2 p_\mu p_a, \quad a \neq \mu; \tag{3.2}$$

$$\frac{d\chi}{dt} = \left(-i \rho_\mu - \frac{5}{2} \ell^2 p_\mu \right) \chi.$$

Из первых четырех уравнений находим три такие интеграла $p_a / \sqrt{p_\mu^2 + m^2} = C_a$, $m = 1/\ell$, a пробегает значения не равные μ. Деля последнее уравнение на μ-тое, находим интеграл с участием χ. Общее решение (3.1) записываем в виде /9/:

$$\chi = (p_\mu^2 + m^2)^{-5/4} \exp(-i m \rho_\mu \operatorname{arctg} p_\mu / m) \times$$
$$\times U\left(\frac{p_a}{\sqrt{p_\mu^2 + m^2}}; \frac{p_\beta}{\sqrt{p_\mu^2 + m^2}}; \frac{p_\gamma}{\sqrt{p_\mu^2 + m^2}} \right), \tag{3.4}$$

---

x) В /8/ использовалось координатное представление. Соответствующее уравнение второго порядка авторы решали только в разных частных случаях.

где U — произвольная функция своих аргументов, a, β, γ не равны μ. Вид U определяется, если потребовать, чтобы χ была одновременно собственной функцией других операторов, коммутирующих с s_μ x). При любом их выборе аргументами U будут указанные в (3.4) комбинации. Они диктуют простейший выбор — это операторы $\hat{p}_a / \sqrt{\hat{p}_\mu^2 + m^2}$, $a \neq \mu$. Их собственные функции пропорциональны $\delta(\pi_a - p_a / \sqrt{p_\mu^2 + m^2})$ в импульсном представлении (если их собственные значения обозначить через π_a). Можно проверить, что эти операторы коммутируют с s_μ. Здесь мы не будем излагать проверку ортогональности и полноты собственных функций χ, хотя это и не является тривиальным. Собственные значения ρ_μ кратны ℓ, так что ρ_μ / ℓ принимает целые значения. Выражение для собственной функции оператора s_0 можно получить из (3.4), просто заменяя p_μ на $p_4 = i p_0$. В связи с этим arctg в (3.4) переходит в Arth (в случае $p_0 < m$) и спектр собственных значений s_0 получается непрерывным.

3. Запишем взаимодействие, локальное только по ρ_μ:

$$L_{B3} = \sum_{\rho\mu} \int d^3\pi' d^3\pi'' d^3\pi''' \, \Phi(\rho_\mu; \pi', \pi'', \pi''') \cdot$$
$$\cdot \phi(\rho_\mu, \pi') \phi^+(\rho_\mu, \pi'') \phi(\rho_\mu, \pi''') . \tag{3.5}$$

Если $\mu = 0$, то сумма должна быть заменена интегралом; π обозначает тройку $\pi_a, \pi_\beta, \pi_\gamma$. В полной аналогии с переходами от (2.2) к (2.4) и далее к (2.10) получаем условие трансляционной и лоренцовской инвариантности L_{B3}:

$$\int d^3\pi' d^3\pi''' \, \Phi(\rho_\mu; \pi', \pi, \pi''') \langle \rho_\mu \pi' | p \rangle \langle \rho_\mu \pi''' | q \rangle =$$
$$= \langle \rho_\mu \pi | p + q \rangle F(p^2, q^2, (pq)). \tag{3.6}$$

Подставляя сюда

$$\langle \rho_\mu \pi | p \rangle = N e^{i m \rho_\mu \operatorname{arctg} p_\mu / m} (p_\mu^2 + m^2)^{-5/4} \prod_{a \neq \mu} \delta\left(\pi_a - \frac{p_a}{\sqrt{p_\mu^2 + m^2}} \right), \tag{3.7}$$

получаем функциональное уравнение

$$\Phi(\rho_\mu; \pi_p; \pi_a \pi_\beta \pi_\gamma; \pi_q) N^2 [(p_\mu^2 + m^2)(q_\mu^2 + m^2)]^{-5/4} \exp i m \rho_\mu \left(\operatorname{arctg} \frac{p_\mu}{m} + \operatorname{arctg} \frac{q_\mu}{m} \right) =$$
$$= \prod_{a \neq \mu} \delta\left(\pi_a - \frac{p_a + q_a}{\sqrt{(p_\mu + q_\mu)^2 + m^2}} \right) N [(p_\mu + q_\mu)^2 + m^2]^{-5/4} \exp\left[i m \rho_\mu \operatorname{arctg} \frac{p_\mu + q_\mu}{m} \right] F(p^2, q^2, (pq)). \tag{3.8}$$

Здесь π_p обозначает совокупность

$$\{ \pi_p^a, \pi_p^\beta, \pi_p^\gamma \} \equiv \left\{ \frac{p_a}{\sqrt{p_\mu^2 + m^2}}; \frac{p_\beta}{\sqrt{p_\mu^2 + m^2}}; \frac{p_\gamma}{\sqrt{p_\mu^2 + m^2}} \right\}$$

---

x) Например, таким оператором может быть любой генератор лоренцовского вращения в плоскости, не содержащей μ-ой оси (поскольку коммутатор его с μ-ой компонентой любого четырехвектора равен нулю).

и аналогично π_q. Уравнение дает сразу явную зависимость Φ от аргументов π_α, π_β, π_γ

$$\Phi = \prod_{\alpha \neq \mu} \delta\left(\pi_\alpha - \frac{p_\alpha + q_\alpha}{\sqrt{(p_\mu + q_\mu)^2 + m^2}}\right) \tilde{\Phi}(p_\mu ; \pi_p ; \pi_q), \tag{3.9}$$

поскольку остальные факторы от них не зависят.

Логарифмируем уравнение (3.8)

$$\phi + \Psi(p) + \Psi(q) = \Psi(p+q) + f. \tag{3.10}$$

Введены понятные обозначения для логарифмов функций $\tilde{\Phi}$ и F,

$$\Psi(p) = i m \rho_\mu \operatorname{arctg} \frac{p_\mu}{m} - \frac{5}{4} \ln(p_\mu^2 + m^2) + \ln N.$$

Найдем одно из дифференциальных уравнений, которому подчиняется функция ϕ, исключая из четырех соотношений

$$\partial\phi / \partial p_\alpha = (p_\mu^2 + m^2)^{-1/2} \partial\phi/\partial\pi_p^\alpha$$

$$\partial\phi/\partial p_\mu = -p_\mu (p_\mu^2 + m^2)^{-3/2} \sum_\alpha p_\alpha \partial\phi/\partial\pi_p^\alpha$$

производные $\partial\phi/\partial\pi_p^\alpha$ (α принимает все значения, кроме μ). Полученному уравнению

$$\sum_{\alpha \neq \mu} p_\alpha \partial\phi/\partial p_\alpha + \frac{p_\mu^2 + m^2}{p_\mu} \partial\phi/\partial p_\mu = 0$$

должна удовлетворять равная ϕ в силу (3.10) комбинация $f + \Psi(p+q) - \Psi(p) - \Psi(q)$. Таким образом, получается уравнение, которому должна удовлетворять f:

$$\left(\sum_{\lambda=1}^{4} p_\lambda \frac{\partial}{\partial p_\lambda} - \frac{m^2}{p_\mu} \frac{\partial}{\partial p_\mu}\right) f = g(p_\mu, q_\mu), \tag{3.11}$$

где справа фигурирует известная функция от p_μ и q_μ. Поскольку $\partial f/\partial p_\lambda = f' \, 2p_\lambda + f'' q_\lambda$, то (3.11) можно преобразовать к виду:

$$2(p^2 + m^2) f' + \left((pq) + m^2 \frac{q_\mu}{p_\mu}\right) f'' = g(p_\mu, q_\mu). \tag{3.12}$$

Функции f' и f'' являются инвариантными и поэтому (3.12) не имеет решений. Например, согласно (3.12) f'' выражается через инварианты p, f', (pq) и еще через функции, зависящие только от p_μ и q_μ. Заметим, что при $1/m = \ell = 0$ функция $g(p_\mu, q_\mu) = 0$ и существует решение $f = \text{const}$, соответствующее координате x_μ.

4. Итак, локальность по координате Снайдера оказывается несовместимой с трансляционной и лоренцовской инвариантностью теории. Если поставить себе целью ввести тем не менее эту координату в теорию, то надо либо отказаться от инвариантности (пытаясь как-то преодолеть трудности с нарушением законов сохранения (см., например /5/), либо объявить неизбежной некоторую нелокальность теории. Можно попытаться, например, определить минимально нелокальное взаимодействие, еще совместимое с инвариантностью. Это последнее направление приводит к известным проблемам обычной нелокальной теории, центральной из которых является причинность /10/.

§ 4. Локальность в случае некоммутирующей координаты более общего вида

1. Если оператор r_μ таков, что уравнение для собственной функции χ является уравнением первого порядка, то ее нахождение представляет только вычислительные трудности. В этом случае χ имеет такой общий вид

$$\chi(p) = e^{\Psi(\rho_\mu \cdot p_\mu \cdot p^2)} U(p_\alpha I(p^2); \quad p_\beta I(p^2); \quad p_\gamma I(p^2)). \tag{4.1}$$

Конкретный вид функций Ψ и I зависит от вида функций $A(p^2)$ и $B = B_1(p^2) + B_2(p^2)(px)$ в (1.2). U – произвольная функция, α, β, γ не равны μ.

Рассмотрим собственные функции более общего вида:

$$\chi(p) = e^{\Psi(\rho_\mu \cdot p)} U(\pi_\alpha(p), \pi_\beta(p), \pi_\gamma(p)), \tag{4.2}$$

где Ψ и π_α – некоторые функции всех четырех компонент импульса. Неизвестно, является ли (4.2) совершенно общим видом собственной функции оператора (1.2).

Рассмотрим взаимодействие вида (3.5), где теперь π –собственные значения операторов $\pi(\hat{p})$, которые <u>должны</u> коммутировать с r_μ. Функциональное уравнение получается так же, как и ранее. Логарифмированное уравнение имеет вид (3.10), где теперь Ψ –неизвестные функции, как и $f(p^2, q^2, (pq))$ и $\phi(\rho_\mu, \pi_p, \pi_q)$, где $\pi_p \equiv \{\pi_\alpha(p); \pi_\beta(p); \pi_\gamma(p)\}$.

Решение его, как и в § 3, целесообразно начать с исключения функции ϕ (ценой появления производных от Ψ и f вместо самих этих функций). Функция ϕ подчиняется двум уравнениям в частных производных первого порядка. Одно из них получается как условие совместности четырех уравнений

$$\frac{\partial\phi}{\partial p_\lambda} = \sum_{\alpha \neq \mu} \frac{\partial\phi}{\partial\pi_\alpha(p)} \frac{\partial\pi_\alpha(p)}{\partial p_\lambda}, \qquad \lambda = 1,2,3,4,$$

рассматриваемых как алгебраические уравнения с неизвестными $\partial\phi/\partial\pi_\alpha$, ср. /7/, гл. 8 § 3 п. 5. Полученное уравнение

$$\frac{D(\pi_\alpha(p), \pi_\beta(p), \pi_\gamma(p), \phi)}{D(p_1, p_2, p_3, p_4)} = 0 \tag{4.3}$$

выглядит как приравненный нулю функциональный определитель и выражает факт функциональной зависимости ϕ от функций π_α, π_β, π_γ. Другое уравнение имеет аналогичный вид:

$$\frac{D(\pi_\alpha(q), \pi_\beta(q), \pi_\gamma(q), \phi)}{D(q_1, q_2, q_3, q_4)} = 0. \tag{4.4}$$

В силу нашего функционального уравнения и комбинация $f + \Psi(p+q) - \Psi(p) - \Psi(q)$ должна подчиняться уравнениям (4.3) и (4.4). Первое из них можно записать в виде:

$$\left(\sum_{\lambda=1}^{4} \Pi_\lambda(p) \frac{\partial}{\partial p_\lambda}\right) [f(p^2, q^2, (pq)) - \Psi(p+q) - \Psi(p)] = 0. \tag{4.5}$$

Через $\Pi_\lambda(p)$ обозначены алгебраические дополнения к элементам столбца функционального определителя в (4.3), содержащего производные $\partial\phi/\partial p_\lambda$. Оператор уравнения (4.5) зависит только от p, оператор второго уравнения (4.4) только от q, причем так же. Поскольку $\Psi(p+q)-\Psi(p)-\Psi(q)$ одинаково зависит от p и q, то получаем, что f должна одинаково зависеть от p и q. Этим исчерпывается роль второго уравнения.

Замечая, что $\partial f/\partial p_\lambda = f' \cdot 2p_\lambda + f'' q_\lambda$ и что $\partial\Psi(p+q)/\partial p_\lambda = \partial\Psi(p+q)/2q_\lambda$, видим, что при $p_1=p_2=p_3=p_4=0$ нелинейное уравнение (4.5) для пяти функций $\pi_\alpha, \pi_\beta, \pi_\gamma, f, \Psi$ превращается в простое уравнение:

$$\sum_\lambda a_\lambda \left(f''(0, q^2, 0)\, q_\lambda + \partial\Psi(q)/\partial q_\lambda - b_\lambda \right) = 0, \tag{4.6}$$

где a_λ и b_λ обозначают значения $\Pi_\lambda(p)$ и $\partial\Psi(p)/\partial p_\lambda$ в точке $p=0$. Заметим, что b_λ могут зависеть от опущенного выше индекса собственного значения ρ_μ; a_λ от него не зависят, но зависят от номера μ выбранной компоненты координаты (в случае (4.1) $a_\lambda = \delta_{\mu\lambda}$).

Теперь, как и в § 2, можно выразить Ψ через функцию $f''(0,q^2,0) \equiv -V(q^2)$, решая дифференциальное уравнение (4.6). С помощью следующих интегралов характеристических уравнений $dq_\lambda/dt = a_\lambda$:

$$a_\alpha(aq) - a^2 q_\alpha = C_\alpha; \quad a^2 q^2 - (aq)^2 = C$$

запишем решение в виде, удобном для дальнейшего:

$$\Psi(q) = (ab)(aq)/a^2 + W(q^2) +$$
$$+ Z\left(a_\alpha(aq) - a^2 q_\alpha;\ a_\beta(aq) - a^2 q_\beta;\ a_\gamma(aq) - a^2 q_\gamma\right). \tag{4.7}$$

Обозначения: $(ab) = \sum_\lambda a_\lambda b_\lambda$ и аналогично (aq) и a^2; $W(x) = \int V(x)\,dx$. Z – произвольная функция от указанных аргументов и, возможно, от ρ_μ.

Подставим найденное Ψ в (3.10) и запишем получающееся соотношение в виде:

$$\phi(\rho_\mu;\ \pi_p;\ \pi_q) + Z(p) + Z(q) - Z(p+q) =$$
$$= f(p^2, q^2, (pq)) + W((p+q)^2) - W(p^2) - W(q^2). \tag{4.8}$$

Покажем, что левая часть (4.8) не может зависеть от инвариантов p^2, q^2 и (pq) или $(p+q)^2$. Это будет означать, что обе части порознь равны произвольной константе.

Прежде всего, из аргументов функции Z нельзя составить инварианта. Если бы это было возможно, то, например, функциональный определитель

$$\frac{D\left(a_2(aq) - a^2 q_2,\ a_3(aq) - a^2 q_3,\ a_4(aq) - a^2 q_4;\ q^2\right)}{D(q_1, q_2, q_3, q_4)}$$

равнялся бы нулю. Но он равен $2a^4 a_1(aq)$, что не равно нулю.

Если бы из аргументов функции ϕ можно было составить p^2 или q^2, то это означало бы, что одним из аргументов функции U в (4.2) можно взять p^2. Отсюда далее следовало бы, что p^2 должно коммутировать с r_μ. Однако в силу постулиров. ной близости r_μ к x_μ, r_μ не может быть перестановочным со всеми операторами p_1, p_2, p_3, p_4; один из коммутаторов r с p должен быть близок к ih, поэтому $[r_\mu, p^2] \neq 0$ x).

От (pq) функция ϕ может зависеть в том случае, если из функций $\pi(p)$ можно построить p_1, p_2, p_3, p_4, а из $\pi(q) - q_1, q_2, q_3 q_4$ (затем можно образовать (pq)). Это невозможно, хотя бы по вышеизложенной причине.

Таким образом:

$$\phi = Z(p+q) - Z(p) - Z(q) + C \tag{4.9}$$

$$f = -W((p+q)^2) + W(p^2) + W(q^2) + C. \tag{4.10}$$

Из (4.9) видно, что функции $\pi_\alpha(p)$ должны совпадать с аргументами Z, см. (4.7). Полагая в (4.10) $q=-p$ и дифференцируя по p^2 убеждаемся, что $2W'(p^2) = \partial f(p^2, p^2, -p^2)/\partial p^2$ действительная функция в силу (2.8). В остальном W и Z произвольные функции своих аргументов.

Таким образом, наше функциональное уравнение удовлетворяется, если собственная функция χ имеет вид:

$$\chi(p) = \exp\left[\frac{(ab)(ap)}{a^2} + W(p^2) + Z\right] \times U, \tag{4.11}$$

где a_λ – произвольные константы, b_λ – произвольные функции ρ_μ; U и Z – произвольные функции трех аргументов $a_\alpha(ap) - a^2 p_\alpha$, $\alpha \neq \mu$ (Z кроме того может зависеть от ρ_μ).

Построим соответствующий оператор координаты, ср. § 2. Обычным способом, см. [7] § 3, п. 5, находим в случае $\mu = 1$,

$$(a^2)^2 a_1 \left\{ \sum_\lambda a_\lambda \frac{\partial}{\partial p_\lambda} - (ab) - 2W'(ap) \right\} \chi = 0. \tag{4.12}$$

Соответствующий оператор r_1

$$r_1 = \sum_\lambda a_\lambda i \frac{\partial}{\partial p_\lambda} - 2i(ap)W' \tag{4.13}$$

---

x) Пример координаты, не относящейся к рассматриваемому нами классу: $[g_\mu, p_\nu] = i(\delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu/p^2)$, откуда $[g_\mu, p^2] = 0$ [11]. Следует отметить, что $[g_\mu, g_\nu] \neq 0$ вопреки ошибочному утверждению в [12]: с помощью написанного выше коммутатора $[g_\mu, p_\nu]$, можно показать, что $[[g_\mu, g_\nu], p_\lambda] = i(p_\mu \delta_{\nu\lambda} - p_\nu \delta_{\mu\lambda})/p^2 \neq 0$.

имеет ковариантный вид (1.2), если $A = a_1$, $B = -2ia_1 W'(p^2)$ и $a_2 = a_3 = a_4 = 0$.
В записи (4.13) первые слагаемые эрмитовы, если a_λ действительные. Тогда последнее слагаемое эрмитово только если $W' = 0$. Другими словами, всем поставленным требованиям из рассмотренного класса операторов (1.2) с собственной функцией (4.2) удовлетворяет только оператор X_μ.

Литература

1. H.S.Snyder. Phys. Rev., 71, 38 (1947).
2. H.S.Snyder. Phys. Rev., 72, 68 (1947).
3. I.Watanabe. Progr. Theor. Phys., 24, 465 (1960).
4. С.Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. Москва, 1963 г. ИИЛ
5. Ю.А.Гольфанд. ЖЭТФ, 44, 1248 (1963).
6. В.Г.Кадышевский. ЖЭТФ, 41, 1885 (1961).
7. R.Kristensen and C.Møller. Det Kong. Danske Vid. Selsk. Mat.-fys. Medd., 27, No. 7 (1952).
8. Я.Ацель. Успехи мат. наук 11, вып. 3 (1956).
9. E.L.Hellund and K.Tanaka. Phys. Rev., 94, 192 (1954).
10. В.В.Степанов. Курс дифференциальных уравнений, гл. 8-ая, Москва, 1958г.ГИФМЛ.
11. Д.А.Киржниц. ЖЭТФ, 41, 551 (1961).
12. Ю.М.Широков. ЖЭТФ, 33, 861 (1957).
13. H.Bacry. Phys. Lett., 5, 37 (1963); Journ. Math. Phys., 5, 109 (1964).

Рукопись поступила в издательский отдел
30 декабря 1964 г.