

И. Блатон

**Геометрическая интерпретация сохранения энергии
и импульса в атомных столкновениях и процессах расщепления**

И. БЛАТОН

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СОХРАНЕНИЯ
ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА В АТОМНЫХ СТОЛКНОВЕНИЯХ И
ПРОЦЕССАХ РАСЩЕПЛЕНИЯ

(Приложение и перевод Л.И.ЛАПИДУСА)

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

В в е д е н и е

Во всех процессах столкновения и расщепления мы имеем дело с соотношениями двух сортов, а именно с соотношениями, получающимися из простых законов сохранения, причем они справедливы и в классической и квантовой теории, и с соотношениями, которые для различных процессов разрешаются законами сохранения и дают вероятности, получающиеся из квантово-механического рассмотрения.

Во всех процессах столкновения и расщепления в начальном состоянии имеется одна или две частицы; нет необходимости рассматривать отдельно случай одной частицы (спонтанный распад), так как это специальный случай процесса с двумя начальными частицами, одна из которых имеет равные нулю массу и импульс. Конечное состояние содержит две или более частицы. В дальнейшем, однако, мы будем рассматривать процессы только с двумя частицами в конечном состоянии; некоторые заключения для случая трех частиц будут сделаны в последнем разделе.

Настоящая статья связана только с соотношениями, которые могут быть выведены из законов сохранения энергии и импульса. Законы сохранения применяются в релятивистской форме и только для некоторых применений мы переходим в нерелятивистскую область. Законы сохранения допускают интерпретацию с помощью

простой геометрической картины, из которой для каждого процесса столкновения и расщепления можно получить качественные и количественные заключения, относящиеся к возможному импульсу и энергии частиц в конечном состоянии.

Для специального случая упругих столкновений эту картину дали Ландау и Лифшиц ^(I), но она может быть распространена на все виды процессов столкновения и расщепления.

Как будет видно в § I рассматриваемая геометрическая картина состоит из эллипсоида вращения с большой осью в направлении полного импульса системы вместе с двумя точками A_1 и A_2 , лежащими на ее большой оси на расстоянии, равном полному импульсу системы (фиг. I). Этот эллипсоид может быть назван эллипсоидом импульсов. Если A_1 берется в качестве начала импульса одной из двух частиц в конечном состоянии (обозначаемой как частица 1), то все конечные точки B этого вектора импульса лежат на поверхности эллипсоида импульсов. Соответствующий импульс частицы 2 в конечном состоянии дается вектором из B в A_2 . Параметры, описывающие эллипсоид импульсов (т.е. малая ось и эксцентриситет) легко получаются из полной энергии и полного импульса системы и из масс покоя m_1 и m_2 частиц 1 и 2, соответственно. Для данного эллипсоида эти две массы и определяют положения относительно эллипсоида соответствующих точек A_1 и A_2 . Точка A_1 может лежать внутри или вне эллипсоида импульсов или на его поверхности; то же справедливо для точки A_2 .

Из нашей геометрической картины следует, что для направления полета вылетающей частицы имеется несколько разных возможностей.

В § 2 из геометрических свойств эллипсоида импульсов выводятся полезные соотношения между соответствующими величинами в лабораторной системе и в системе центра инерции. Непосредственно мы получаем формулы для величин импульса и энергии частицы как функции углов ϑ между направлениями полета частицы и полного импульса системы. Кроме того, выводится соотношение между угловыми распределениями вылетающих частиц в системе центра инерции и в лабораторной системе. Особенно простой является связь между угловым распределением в системе центра инерции и распределением по энергиям в лабораторной системе. Во всех практических применениях мы можем предположить, что одна из частиц в начальном состоянии покоится; элементы геометрической картины для этого случая даны в § 3. В последующих четырех разделах (§ 4 - § 7) геометрическая картина применяется к обсуждению некоторых физических важных случаев. Упругие столкновения обсуждаются в § 4. В этом случае, точка A_2 , относящаяся к частице, которая до столкновения покоилась, лежит на поверхности эллипсоида импульсов, в то время как точка A_1 лежит внутри или вне эллипсоида в зависимости от соотношения между массами сталкивающихся частиц. Обсуждение ядерных реакций в § 5 упрощается тем фактом, что здесь мы вообще имеем дело с нерелятивистскими энергиями, для которых эллипсоид импульсов обращается в сферу. Это позволяет получить простое геометрическое

представление для квадратных корней из кинетических энергий вылетающих частиц.

В § 6 рассматривается фоторасщепление. Характерным для этого процесса (как эндотермического процесса) является то, что энергия и возможные направления полета продуктов расщепления быстро изменяются для сравнительно малого изменения энергии падающего фотона около пороговой энергии.

§ 7 связан со спонтанным распадом мезона на две частицы. Эта задача имеет значительный интерес в связи с открытием Поуэллом и его сотрудниками ⁽³⁾ тяжелых мезонов. Подсчитывается угловое и энергетическое распределение вторичных частиц для данной энергии первичного мезона.

Наконец, в § 8 показано, что метод может быть применен к случаю трех частиц в конечном состоянии и как пример дана геометрическая картина для β -распада ядра.

§ I. Геометрическая картина законов сохранения

В любом процессе, который происходит с участием только двух частиц, законы сохранения энергии и импульса можно просто интерпретировать геометрически. Мы рассмотрим для определенности начальное состояние, в котором имеются две свободные частицы (I и II) с массами покоя m_I и m_{II} и импульсами \vec{k}_I и \vec{k}_{II} (импульс и масса всюду измеряются в энергетических единицах, т.е. \vec{k} означает импульс

в обычных единицах, умноженный на скорость света C , а m -масса в обычных единицах, умноженная на C^2). Случай спонтанного распада с одной частицей в начальном состоянии может быть описан подстановкой $m_{II} = 0$, $\vec{K}_{II} = 0$. Две свободные частицы I и 2, имеющиеся в конечном состоянии, необязательно те же, что и в начальном состоянии; пусть их массы покоя будут m_1 и m_2 , а импульсы \vec{K}_1 и \vec{K}_2 . Обозначая полную энергию системы через E , а полный импульс через \vec{K} , при рассмотрении начального состояния мы получаем;

$$E = \sqrt{m_1^2 + K_1^2} + \sqrt{m_2^2 + K_2^2} \quad (I.1)$$

$$\vec{K} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2 \quad (I.2)$$

и согласно законам сохранения:

$$E = \sqrt{m_1^2 + K_1^2} + \sqrt{m_2^2 + K_2^2} \quad (I.3)$$

$$K = \vec{K}_1 + \vec{K}_2 \quad (I.4)$$

Для произвольной системы Лоренца величина

$$N = \sqrt{E^2 - K^2} \quad (I.5)$$

является инвариантом, давая энергию системы в системе центра инерции. Скорость центра масс в единицах скорости света равна

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{K}}{E} \quad (I.6)$$

В начальном, так же как и в конечном состоянии, частицы движутся в системе центра инерции в противоположных направлениях, имея равные абсолютные величины импульса. Для конечного состояния величина такого импульса в системе центра инерции, которую мы обозначаем через β , быстро получается из законов сохранения в системе центра инерции и оказывается равной

$$\beta = \frac{1}{2N} \sqrt{\{N^2 - (m_1 + m_2)^2\} \{N^2 - (m_1 - m_2)^2\}} \quad (\text{I.7})$$

Соответствующие энергии

$$e_1^* = \sqrt{m_1^2 + \beta^2} \quad \text{и} \quad e_2^* = \sqrt{m_2^2 + \beta^2} \quad (\text{I.8})$$

частиц 1 и 2 в системе центра инерции тогда равны:

$$e_1^* = \frac{N}{2} \left(1 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{N^2} \right); \quad e_2^* = \frac{N}{2} \left(1 + \frac{m_2^2 - m_1^2}{N^2} \right) \quad (\text{I.9})$$

Значок * относится к величинам в системе центра инерции:

Проводя преобразование Лоренца, которое возвращает нас обратно в лабораторную систему с осью z вдоль направления полного импульса \vec{K} , мы получили следующее уравнение для компонент \vec{K}_1

$$\frac{K_{1x}^2 + K_{1y}^2}{\beta^2} + \frac{(K_{1z} - \alpha_1)^2}{\alpha^2} = 1 \quad (\text{I.10})$$

где

$$\alpha = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{I.11})$$

$$\alpha_1 = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} e_1^* \quad (\text{I.12})$$

Аналогичное уравнение, в котором α_1 заменено на

$$\alpha_2 = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} e_2^* = K - \alpha_1 \quad (\text{I.I2a})$$

справедливо для компонент импульса \vec{K}_2 .

Уравнение (I.I0) представляет уравнение эллипсоида вращения с осью симметрии по направлению \vec{K} и с центром, смещенным на расстояние α_1 по направлению \vec{K} от начала A_I вектора \vec{K}_1 (х). Произвольный вектор из точки A_I к произвольной точке В на поверхности эллипсоида представляет тем самым возможный импульс частицы 1 в конечном состоянии или наоборот. По другую сторону от центра эллипсоида, на расстоянии α_2 от него лежит точка A_2 и вектор В в A_2 представляет соответствующий импульс \vec{K}_2 частицы 2. Эллипсоид, определяемый уравнением (I.I0), может быть назван эллипсоидом импульсов. Малая полуось эллипсоида импульсов равна величине E импульса обеих частиц в системе центра инерции, как определено в (I.7), в то время как большая полуось α дается (I.II). Эксцентриситет эллипсоида равен скорости центра масс, т.е.

х) Согласно замечанию проф. Э.Клейна, эллипсоид (I.I0) можно рассматривать как сечение в \vec{K}_1 пространстве четырехмерного эллипсоида вращения в (\vec{K}_1, x_4) пространстве. Уравнение этого четырехмерного эллипсоида имеет вид:

$$\sqrt{K_1^2 + (x_4 - m_1)^2} + \sqrt{(\vec{K}_1 - \vec{K})^2 + (x_4 - m_2)^2} = E$$

Подставляя $x_4 = 0$, мы получим уравнение, которое немедленно получается из (I.3) и (I.4). Фокусы этого четырехмерного эллипсоида лежат на плоскости (\vec{K}_1, K_4) и имеют там координаты $(0, m_1)$ и (K_1, m_2) , соответственно; большая ось равна E .

$$\beta = f/\alpha = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha}, \quad (I.I3)$$

где

$$f = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \quad (I.I4)$$

равно половине расстояния между фокусами (фиг.1).

Проводимое здесь и в следующих разделах рассмотрение одинаково справедливо для обеих частиц 1 и 2 и мы поэтому обозначаем все величины, относящиеся к одной из этих частиц индексом n ($n = 1, 2$).

Расстояние α_n можно, учитывая (I.I2), (I.8), (I.I3), записать также в виде

$$\alpha_n = \frac{f}{\beta} \sqrt{\beta^2 + m_n^2} \quad (I.I5)$$

откуда видно, что для данного эллипсоида импульсов расстояние α_n полностью определяется соответствующей массой m_n .

Результаты построения A_n из (I.I5) приведены на фиг.2. Из (I.I5) имеем, что всегда $\alpha_n \geq f$.

Равенство между α_n и f достигается только при $m_n = 0$.

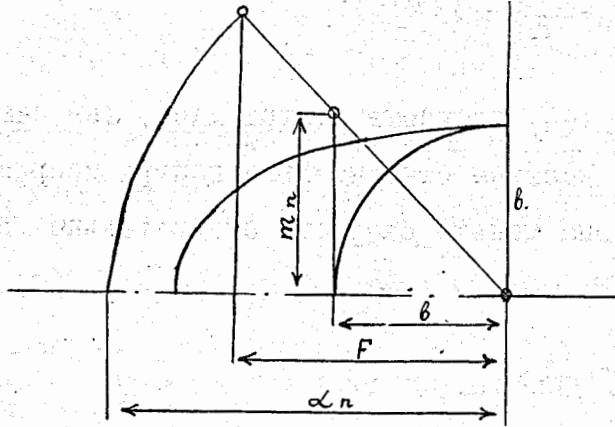
В зависимости от возможных направлений импульса частицы n

в конечном состоянии, мы будем различать два случая, а именно

$\alpha_n > \alpha$ и $\alpha_n < \alpha$. В первом случае вектор \vec{v} всегда образует

с направлением \vec{K} острый угол ϑ , который не превышает

некоторого максимального угла $\vartheta_{n \max}$, в то время как во втором



Фиг. 2. Геометрическое построение точки A_n (начало вектора K_n) с помощью пропорции: $\alpha_n : \sqrt{b^2 + m_n^2} = f : b$

случае такого ограничения нет.

Для рассмотрения этих двух случаев мы введем

$$\gamma_n = \frac{\alpha_n}{a} \quad (I.I6)$$

Тогда первый случай характеризуется соотношением $\gamma_n \gg 1$, а второй случай $\gamma_n < 1$. Величина γ_n имеет простой физический смысл. Как видно из (I.II) и (I.I2)

$$\gamma_n = \beta \frac{e_n^*}{B} \quad (I.I7)$$

Учитывая, что скорость β_n^* частицы n в системе центра инерции равна

$$\beta_n^* = b/e_n^* \quad (I.I8)$$

мы получим

$$\gamma_n = \frac{\alpha_n}{\alpha} = \beta / \beta_n^* \quad (I.19)$$

В первом случае ($\gamma_n \gg 1$) скорость центра масс, тем самым превышает или равна скорости частицы относительно центра инерции, во втором случае ($\gamma_n < 1$) она меньше скорости относительно центра инерции. Всегда

$$\gamma_n \gg \beta \quad (I.20)$$

Равенство достигается при $m_n = 0$.

На фиг. I можно просто получить максимальный угол $\vartheta_{n \max}$, встречающийся в случае $\gamma_n \gg 1$ (см. также следующий раздел)

$$\sin \vartheta_{n \max} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha_n^2 - \beta^2}} \quad \vartheta_{n \max} \leq \pi/2$$

или через γ_n и β

$$\sin \vartheta_{n \max} = \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{\gamma_n^2 - \beta^2}} \quad (I.21)$$

Другое выражение вместо (I.21) имеет вид

$$\sin \vartheta_{n \max} = \frac{\beta^2}{f m_n} \quad (I.22)$$

§ 2. Соотношения между соответствующими величинами в лабораторной системе и в системе центра инерции

Геометрическая интерпретация сохранения энергии и импульса ведет к геометрическому построению связи между величиной и направлением импульса частицы в системе центра инерции с соответствующими

величинами в лабораторной системе, как указано на фиг.3. Из фиг.3 мы видим, что

$$\frac{b \sin \vartheta_n^*}{a_n + a \cos \vartheta_n^*} = \sqrt{1 - \beta^2} \frac{\sin \vartheta_n^*}{\gamma_n + \cos \vartheta_n^*} = \operatorname{tg} \vartheta_n \quad (2.1)$$

Значок * относится к величинам в системе центра инерции.

Из (2.1) можно выразить угол ϑ_n^* через ϑ_n и получить

$$\cos \vartheta_n^* = \frac{1}{1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta_n} \left\{ -\gamma_n \sin \vartheta_n \pm (1 - \beta^2) \sqrt{1 - \frac{\gamma_n^2 - \beta^2}{1 - \beta^2} \sin^2 \vartheta_n} \cos \vartheta_n \right\} \quad (2.2)$$

Функция $\cos \vartheta_n^*$ для $\gamma_n \geq 1$ является двузначной потому, что, как это прямо видно из фиг.3, линия, идущая из A_n под углом ϑ_n с \vec{K} будет, для всех углов ϑ_n меньших $\vartheta_{n \max}$, иметь две точки пересечения с эллипсоидом импульсов, давая два возможных значения для ϑ_n^* и два возможных импульса в лабораторной системе. Знак плюс в (2.2) относится к большему из возможных значений импульса в направлении ϑ_n . Как видно из (2.2) в связи с (2.2I) $\vartheta_n = \vartheta_{n \max}$ соответствует ϑ_{n0}^* , причем

$$\cos \vartheta_{n0}^* = -\frac{1}{\gamma_n} \quad (2.3)$$

В случае $\gamma_n \leq 1$ для того, чтобы получить правильное значение ϑ_n^* необходимо брать только знак +. Из (2.2) можно легко получить импульс частицы, двигающейся под углом ϑ_n . Из фиг.3 мы видим, что

$$K_n(\vartheta_n) = a \cdot \frac{\gamma_n + \cos \vartheta_n^*}{\cos \vartheta_n} \quad (2.4)$$

Так что, согласно (2.2)

$$K_n(\vartheta_n) = \frac{P}{1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta_n} \left\{ \gamma_n \cos \vartheta_n \pm \sqrt{1 - \frac{\gamma_n^2 - \beta^2}{1 - \beta^2} \sin^2 \vartheta_n} \right\} \quad (2.5)$$

где

$$P = \beta \sqrt{1 - \beta^2} \quad (2.6)$$

параметр эллипсоида. Что касается знака, то для него справедливы те же условия, что для (2.2).

Энергию $e_n = \sqrt{K_n^2 + m_n^2}$ частицы n можно тоже выразить через ϑ_n . Уравнение для преобразования энергии из системы центра инерции в лабораторную систему имеет вид:

$$e_n = \frac{e_n^*}{\sqrt{1 - \beta^2}} + f \cos \vartheta_n^* \quad (2.7)$$

Из этого уравнения немедленно следует, что область энергии каждой частицы в конечном состоянии дается расстоянием $2f$ между фокусами, т.е.

$$e_{n \max} - e_{n \min} = 2f \quad (2.8)$$

с

$$e_{n \max} = \frac{\alpha_n}{\beta} + f ; \quad e_{n \min} = \frac{\alpha_n}{\beta} - f \quad (2.9)$$

Выражая $\cos \vartheta_n^*$ с помощью (2.4), мы получим

$$e_n = \sqrt{1 - \beta^2} e_n^* + \beta K_n \cos \vartheta_n = \frac{P}{f} d_n + \beta K_n \cos \vartheta_n \quad (2.10)$$

С точностью до постоянной $P/f d_n$, энергия частицы в конечном состоянии дается произведением компоненты импульса в направлении полного момента на эксцентриситет эллипса.

С помощью (2.2) мы можем легко получить связь между угловым распределением частиц в лабораторной системе и в системе центра инерции. Если обозначить через $\sigma_n(\vartheta_n, \varphi)$ и $\sigma_n^*(\vartheta_n^*, \varphi)$ вероятность на единицу телесного угла найти частицу n в определенном направлении в лабораторной системе и в системе центра инерции соответственно, то мы имеем:

$$\sigma_n(\vartheta_n, \varphi) = \sigma_n^*(\vartheta_n^*, \varphi) \frac{d \cos \vartheta_n^*}{d \cos \vartheta_n} \quad (2.II)$$

Здесь мы аналогично (2.2) и (2.5), будем различать два случая $\gamma_n > 1$ и $\gamma_n \leq 1$. В первом случае $\cos \vartheta_n$ как функция $\cos \vartheta_n^*$ имеет минимальное значение $\cos \vartheta_{n \max}$. Таким образом $\cos \vartheta_n^*$ так же как и $\frac{d \cos \vartheta_n^*}{d \cos \vartheta_n}$ являются двузначными функциями $\cos \vartheta_n$, а $\frac{d \cos \vartheta_n^*}{d \cos \vartheta_n}$ становится бесконечным для $\vartheta_n = \vartheta_{n \max}$. Для двух ветвей (которые соответствуют различным абсолютным значениям импульса) $\frac{d \cos \vartheta_n^*}{d \cos \vartheta_n}$ имеет разные знаки. Знак положителен для частицы, двигающейся в направлении ϑ_n с большей величиной импульса и знак отрицателен для частицы, двигающейся в том же направлении с меньшим импульсом. В последнем случае плотность вероятности дается $|\sigma|$.

Для $\chi_n \leq 1$ $\cos \vartheta_n^*$ является однозначной функцией $\cos \vartheta_n$, а $\frac{d \cos \vartheta_n^*}{d \cos \vartheta_n}$ однозначна, конечна и положительна.

Проводя дифференцирование, мы получим из (2.11), (2.2) и (2.5)

$$\sigma_n(\vartheta_n, \varphi) = \pm \sigma_n^*(\vartheta_n^*, \varphi) \left(\frac{\kappa_n}{\beta}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\chi_n^2 - \beta^2}{1 - \beta^2} \sin^2 \vartheta_n}}, \quad (2.12)$$

где κ_n выражено через ϑ_n в (2.5). Что касается знака, то для него справедливы те же условия, что и в (2.2) и (2.5). Мы видим из (2.12), что в случае $\chi_n > 1$ и для сферически симметричного углового распределения в системе центра инерции, плотность вероятности для данного угла ϑ_n из-за фактора κ_n^2 всегда больше для частиц с большим (из двух возможных) значением импульса.

В случае $\chi_n = 1$, который осуществляется, например, в случае упругого столкновения, когда частица до столкновения покоилась в лабораторной системе (сравни § 4) (2.12) приводится с помощью (2.5) к виду

$$\sigma_n = \sigma_n^* \frac{4(1 - \beta^2)}{(1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta_n)^2} \cos \vartheta_n$$

Имеет место очень простое соотношение между угловым распределением в системе центра инерции и распределением по энергии $\sigma_n(e_n)$ на единичный интервал энергий в лабораторной системе, которое сразу вытекает из (2.7).

Из этого уравнения дифференцированием сразу получим

$$de_n = f d \cos \vartheta_n^*$$

Так как $\sigma_n^*(\vartheta_n^*, \varphi)$ вообще не зависит от азимута φ , так что $\sigma_n^*(\vartheta_n^*, \varphi) = \sigma_n^*(\vartheta_n^*)$, то мы получим, после интегрирования по азимуту φ для $\sigma_n(e_n)$:

$$\sigma_n(e_n) = \frac{2\pi}{f} \sigma_n^*(\vartheta_n^*) \quad e_{n \min} \leq e_n \leq e_{n \max}$$

где ϑ_n^* в $\sigma_n^*(\vartheta_n^*)$ выражается через e_n с помощью формулы (2.7)

$$\cos \vartheta_n^* = \frac{1}{f} (e_n - \frac{\alpha_n}{\beta})$$

Если угловое распределение в системе центра инерции сферически симметрично ($\sigma^* = \frac{1}{4\pi}$) вероятность $\sigma_n(e_n)$ на интервал энергий постоянна и равна

$$\sigma_n(e_n) = \frac{1}{2f} \quad e_{n \min} \leq e_n \leq e_{n \max}$$

что хорошо известно в нерелятивистском случае (4).

§ 3. Столкновения с первоначально покоящейся частицей

Во всех практически важных случаях мы можем предположить, что в лабораторной системе одна из двух частиц в начальном состоянии покоилась. В последующих применениях (§§ 4-8) покоящейся считается частица П ($\vec{k}_\Pi = 0$). Из (I.I) тогда следует, что

$$\vec{K} = \vec{K}_I \quad E = \sqrt{m_I^2 + K_I^2} + m_\Pi \quad (3.I)$$

и для энергии N системы частиц в системе центра инерции

$$N = \sqrt{M_i^2 + 2m_{II}W_i} \quad (3.2)$$

где индекс i относится к начальному состоянию системы, W - кинетическая энергия системы (определяемая как полная энергия минус масса покоя)

$$W_i = \sqrt{m_I^2 + K_I^2} - m_I \quad (3.3)$$

и M - сумма масс покоя рассматриваемых частиц

$$M_i = m_I + m_{II} \quad (3.4)$$

$$M_f = m_1 + m_2 \quad (3.5)$$

индекс f относится к конечному состоянию системы.

Энергия реакции Q , реализуемая в процессе, равна тогда величине

$$Q = M_i - M_f, \quad (3.6)$$

которая положительна для экзотермических и отрицательна для эндотермических процессов. Если

$$M = \frac{1}{2} (M_i + M_f) \quad (3.7)$$

среднее арифметическое суммы масс покоя в конечном и в начальном состояниях, мы можем написать величину β малой полуоси эллипсоида импульсов в виде

$$\beta = \sqrt{\frac{(QM + m_{II}W_i)(QM + m_{II}W_i + 2m_1m_2)}{M_i^2 + 2m_{II}W_i}} \quad (3.8)$$

Для эндотермических процессов ($Q < 0$) мы получаем из этого уравнения энергию порога $w_i = \delta$, пользуясь тем, что β должно быть действительно

$$\delta = \frac{M}{m_{II}} |Q| \quad (3.9)$$

и для этой величины w_i мы имеем $\beta = \alpha = 0$.

Используя (3.6), можно получить

$$\delta = \frac{M_f^2 - M_i^2}{2m_{II}} \quad (3.10)$$

§ 4. Упругое рассеяние

В этом особом случае массы покоя двух частиц остаются неизменными в течение процесса $m_I = m_1$, $m_2 = m_{II}$ и, следовательно $M = M_i = M_f$. Эллипсоид импульсов определяется своим эксцентриситетом β (= скорости центра масс), получающимся из (1.6), (3.3), (3.1) и (3.4)

$$\beta = \frac{\sqrt{w_i(2m_i + w_i)}}{M + w_i}, \quad (4.1)$$

а параметр $p = \beta \sqrt{1 - \beta^2}$, согласно (4.1), (3.8) и (3.6) дается

$$p = m_2 \beta \quad (4.2)$$

Малая и большая полуоси тогда

$$b = \frac{m_2 \beta}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad a = \frac{m_2 \beta}{1-\beta^2} \quad (4.3)$$

Расстояния α_1 и α_2 получаются из (I.I2), (I.9), (3.2) и (4.3)

$$\alpha_1 = \frac{W_i + \frac{m_1}{m_2} M}{W_i + M} \alpha; \quad \alpha_2 = \alpha \quad (4.4)$$

Из (4.4) и (I.I6) мы видим сразу, что $\gamma_1 \gg 1$ для $m_1 \gg m_2$ и $\gamma_1 < 1$ для $m_1 < m_2$, в то время как $\gamma_2 = 1$ так как частица покоится до столкновения и имеет скорость $\beta_2^* = \beta$ относительно центра инерции как в начальном, так и в конечном состояниях.

Три возможных случая $m_1 = m_2$, $m_1 > m_2$ и $m_1 < m_2$ показаны на фиг. 4, 5, 6.

Из геометрической картины мы можем легко вывести следующие результаты для упругих столкновений:

1) Импульс частицы отдачи, двигающейся после столкновения в направлении ϑ_2 , из (2.5) получается равным

$$K_2 = \frac{2m_2 \beta \cos \vartheta_2}{1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta_2} \quad (4.5)$$

2) Максимальный импульс $K_{2 \max}$, передаваемый при упругих столкновениях частице отдачи дается большой осью эллипсоида, как определено в (4.3). ($=2a$).

3) Кинетическая энергия, передаваемая частице отдачи из (2.10), (4.2) и (4.4)

$$W_2 = \beta K_2 \cos \vartheta_2 \quad (4.6)$$

равна произведению проекции импульса частицы на первоначальное направление на эксцентриситет эллипса.

4) Максимальная энергия передается при $\vartheta_2 = 0$, причем

$$(W_2)_{\max} = 2m_2 \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = 2f \quad (4.7)$$

$(W_2)_{\max}$, тем самым, равно расстоянию между фокусами, как прямо видно из (2.8).

5) Угол ϑ_2 между направлением частицы отдачи и первичным направлением падающей частицы, определяется из (4.6)

$$\cos \vartheta_2 = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{W_2}{W_2 + 2m_2}} \quad (4.8)$$

6) Область углов ϑ_2 частицы отдачи, для данной передачи энергии W_2 из (4.8)

$$\vartheta_2(W_2) < \theta_2(W_2), \quad \text{где} \quad \text{ctg} \theta_2 = \sqrt{\frac{W_2}{2m_2}} \quad (4.9)$$

Этот граничный угол θ_2 не зависит от массы и энергии падающей частицы. Из (4.9) следует, что пучок частиц, двигающихся с релятивистской энергией при упругом столкновении ($W_2 \gg m_2$) всегда образует очень малый угол с первичным направлением. Наоборот, для данного угла [5]

$$\frac{W_2}{m_2} < 2 \text{ctg}^2 \vartheta_2$$

7) Массу m_1 падающей частицы можно определить, зная начальный импульс \vec{K} (по магнитной кривизне) и направление полета и импульс частицы отдачи известной массы (6). С помощью (1.6) и (4.6) мы можем определить полную энергию системы $E = \frac{K}{\beta} = K \frac{K_2 \cos \vartheta_2}{W_2}$ и тем самым так же и m_1 , которая согласно (3.1) дается в виде

$$m_1^2 = \left(K \frac{K_2 \cos \vartheta_2}{W_2} - m_2 \right)^2 - K^2$$

Эта формула упрощается в случае $m_1 \gg m_2$, например для столкновения мезонов с электронами.

8) Кинетическая энергия W_1 падающей частицы при упругом столкновении с другой частицей равной массы ($m_1 = m_2 = m$) может быть определена из двух направлений после столкновения (из эллипса на фиг.4)

$$\frac{W_1}{2m} + 1 = \operatorname{ctg} \vartheta_1 \cdot \operatorname{ctg} \vartheta_2 \quad (4.10)$$

Для кинетических энергий, малых по сравнению с массой покоя, мы имеем $\vartheta_1 + \vartheta_2 \sim \pi/2$ как хорошо известно для нерелятивистских скоростей. Тем самым формула (4.10) удобна для определения энергии быстрых частиц. Экспериментально это было проверено Чемпионом (7) для случая столкновения двух электронов.

9) Угол ψ между частицами после столкновения в случае $m_1 > m_2$ может изменяться от 0 до $\pi/2$, но при $m_1 = m_2$ имеется нижний предел ψ_{\min} для этого угла, даваемый

$$\cos \psi_{\min} = \frac{W_1}{W_1 + 4m}$$

Минимальное значение достигается при $\vartheta_1 = \vartheta_2$.

10) Импульс K_1 фотона с первоначальным импульсом \vec{K} рассеившегося на угол ϑ_2 , частицей массы m_2 дается стандартной формой уравнения эллипса в полярных координатах

$$K = \frac{m_2 \beta}{1 - \beta \cos \vartheta_2} \quad (4.II)$$

$$\beta = \frac{K}{m_2 + K} \quad (4.I2)$$

Это уравнение представляет хорошо известную формулу Комптона. Часто употребляется (8) определение энергии фотона с помощью измерения импульса (или энергии) комптоновского электрона.

Из (4.II), (4.I2) и (4.6) имеем

$$K = \frac{m_2}{K_2 / W_2 \cos \vartheta_2 - 1}$$

Для $\vartheta_2 = 0$, в направлении которого вероятность движения электрона наивысшая, мы имеем из графика

$$K = a + f = \frac{1}{2} (K_2 + W_2)$$

II) В случае $m_1 > m_2$ максимальный угол отклонения падающей частицы дается из (I.22) и (4.3) в виде

$$\sin \vartheta_{1, \max} = \frac{m_2}{m_1}$$

§ 5. Ядерные реакции

Для применения геометрической картины сохранения энергии и импульса мы можем обратиться к нерелятивистской области и будем рассматривать только случай, в котором кинетическая энергия как в начальном, так и в конечном состоянии мала по сравнению с массой покоя любой из рассматриваемых частиц. Эллипсоид импульсов переходит в сферу с радиусом, получающимся из (3.8)

$$\alpha = \beta = \frac{1}{M} \sqrt{2m_1 m_2 (m_{II} \omega_i + MQ)} \quad (5.1)$$

Расстояние α_n получается из (I.12) подстановкой

$$e_n^* = m_n \quad \beta = \frac{K}{M}$$

равным

$$\alpha_n = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} e_n^* = \frac{K/M}{\sqrt{1-K^2/M^2}} m_n \cong \frac{m_n}{M} K$$

Физический смысл последней формулы ясен, α_n представляет теперь часть импульса частицы n , которая происходит от движения центра масс, как видно из фиг.7.

Выражая α_n через кинетическую энергию ω_i падающей частицы, мы получаем

$$\alpha_n = \frac{m_n}{M} \sqrt{2m_I \omega_i} \quad (5.2)$$

Для обсуждения различных случаев удобно ввести величину

$$\delta' = \frac{M}{m_{II}} Q, \quad (5.3)$$

которая в специальном случае эндотермических процессов представляет пороговую энергию δ с отрицательным знаком.

Направления, в которых частицы I и 2 движутся в конечном состоянии, определяются через γ_1 и γ_2 , которые согласно (I.16), (5.1), (5.2) и (5.3) даются в виде

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{m_I}{m_{II}} \cdot \frac{w_i}{w_i + \delta'}}, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{m_I}{m_{II}} \cdot \frac{w_i}{w_i + \delta'}} \quad (5.4)$$

Для $\gamma_n \gg 1$ направление вылетающей частицы n образует с первоначальным направлением острый угол, меньший или равный $\vartheta_{n \max}$ который, согласно (I.21), в нерелятивистском случае, рассматриваемом здесь, дается выражением

$$\sin \vartheta_{n \max} = \frac{1}{\gamma_n} \quad (5.5)$$

В дальнейшем мы будем приписывать индекс I той из двух частиц в конечном состоянии, которая имеет меньшую массу, т.е.

$$m_1 \leq m_2$$

Почти во всех ядерных реакциях^{x)} $m_I \leq m_{II}$. Таким образом

$$\sqrt{\frac{w_i}{w_i + \delta'}} < 1 (> 1)$$

для экзотермической (эндотермической) реакции и возрастает (падает) с ростом w_i . С помощью этих данных мы можем вывести из (5.4) следующие результаты:

x) В действительности единственным исключением является бомбардировка дейтрона α - частицами.

Экзотермические реакции

1) Величина γ_1 всегда меньше единицы; следовательно направление движения более легкой частицы или обеих частиц, если они имеют одинаковые массы, не ограничено.

2) Величина γ_2 больше или равна единице только в реакциях, в которых $m_I > m_1$ (т.е. в (d, p) , (d, n) , (α, p) и (α, n) реакциях) и в которых энергия w_i удовлетворяет условию

$$w_i \geq \frac{m_1}{m_I - m_1} Q$$

Направление движения ядер отдачи ограничено тогда условием (5.5).

Эндотермические реакции

1) При пороговой энергии $w_i = \delta$, $\alpha = 0$ ($\gamma_1 = \gamma_2 = \infty$) обе частицы в конечном состоянии движутся в первоначальном направлении с энергиями $m_1 \frac{m_I}{M m_{II}} Q$ и $m_2 \frac{m_I}{M m_{II}} Q$ для частиц I и 2 соответственно.

2) Величина γ_1 меньше или равна единице, в зависимости от того превышает ли энергия w_i падающей частицы пороговую энергию δ на величину большую или равную

$$\frac{m_I m_{II}}{M(m_2 - m_1)} \delta$$

Отсюда, направление движения легкой частицы ограничено только тогда, когда энергия w_i лежит в малом интервале, даваемом

этим выражением. Для $\gamma_1 = 1$ максимум кинетической энергии частицы I приблизительно вчетверо превышает энергию вблизи порога.

3) Величина γ_2 меньше или равна единице только в реакциях, в которых $m_1 > m_I$ (например " $N(n, \alpha)$ " В) и в которых энергия w_i превышает пороговую энергию δ на величину большую или равную

$$\frac{m_2 m_I}{M(m_1 - m_I)} \delta$$

Для того, чтобы получить прямо энергии уходящих частиц графическим построением, удобно ввести для каждой частицы (I и 2) отдельные шкалы для α и α . Итак, мы вводим

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{2m_1}} = \frac{\sqrt{m_2 m_I}}{M} \sqrt{w_i + \delta'}; \quad c_1 = \frac{\alpha_1}{\sqrt{2m_1}} = \frac{\sqrt{m_1 m_I}}{M} \sqrt{w_i}$$

для частицы I, и

$$\alpha_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{2m_2}} = \frac{\sqrt{m_2 m_I}}{M} \sqrt{w_i + \delta'}; \quad c_2 = \frac{\alpha_2}{\sqrt{2m_2}} = \frac{\sqrt{m_2 m_I}}{M} \sqrt{w_i}$$

для частицы 2. Величина $(\alpha_n)^2$ является тогда энергией, которую частица получает в системе центра инерции. Соответствующие векторы в геометрической картине будут тогда прямо давать квадратные корни из энергий частиц, как показано на фиг.8.

§ 6. Фоторасщепление

При обсуждении фоторасщепления частицей I является фотон ($m_I = 0$) импульса \vec{k} , а частицей II является ядро с массой

$m_{II} = m$. В конечном состоянии мы имеем нейтроны с массой m_1 и остающееся ядро с массой m_2 . Для пороговой энергии фотона мы получаем из (3.9), 3.6) и (3.7)

$$\delta = |Q| \left(1 + \frac{|Q|}{2m} \right)$$

Энергия порога в этом случае превышает энергию связи $|Q|$ ядра только на малую величину $Q^2/2m$. Для дейтрона ($|Q| = 2,2 \text{ мэв}$) например, порог фоторасщепления лежит только на 1.3 Кэв выше энергии связи. Для энергий фотона малых по сравнению с массой покоя ядра ($K \ll m$) ; как и ранее, мы можем обратиться к нерелятивистскому приближению и получим из (3.8) и (3.9)

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{2m_1 m_2}{m} (K - \delta)}$$

и из (I.I2)
$$d_n = \frac{m_n}{m} K$$

Измеряя $K - \delta$ в единицах величины порога δ , т.е. вводя

$$X = \frac{K - \delta}{\delta}$$

мы получим для отношений $\chi_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha}$ и $\chi_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha}$

$$\chi_1 = \sqrt{\frac{m_1 \delta}{2m_2 m}} \cdot \frac{X+1}{\sqrt{X}} ; \quad \chi_2 = \sqrt{\frac{m_2 \delta}{2m_1 m}} \cdot \frac{X+1}{\sqrt{X}}$$

Эти отношения, будучи бесконечными около порога $X = 0$, очень быстро уменьшаются недалеко от порога и становятся равными единице при

$$\chi_1 \cong \frac{m_1 \delta}{2m_2 m} , \quad \chi_2 \cong \frac{m_2 \delta}{2m_1 m}$$

для частиц I и 2, соответственно. Получающиеся нейтроны могут иметь исчезающую кинетическую энергию только при энергии фотона, соответствующей χ_1 . Энергия фотона для этого случая была определена экспериментально Виденбеком и Маргофером ⁽⁹⁾ для дейтрона (2,185 Мэв) и ядра бериллия (1,630 Мэв). Для дейтрона эта энергия превышает энергию связи Q на величину $\sim 2,5$ Кэв.

Минимальное значение γ_1 и γ_2 достигается при $X = 1$, т.е. когда $K = 2\delta$. Эти минимальные значения γ_1 и γ_2 равны

$$\gamma_{1 \min} = \sqrt{2 \frac{m_1}{m_2} \frac{\delta}{m}} \quad \gamma_{2 \min} = \sqrt{2 \frac{m_2}{m_1} \frac{\delta}{m}}$$

и из-за малости δ/m являются очень малыми величинами; в этом случае две частицы движутся приблизительно в противоположных направлениях.

Три типичных случая $K = \delta$, $\gamma_1 = 1$, $K = 2\delta$ показаны для дейтрона на фиг. 9а, в, с.

§ 7. Распад мезона на две частицы

В начальном состоянии мы имеем первичную частицу (мезон) массы $m_I = M$ с импульсом $\vec{K}_I = \vec{K}(m_{II} = 0, \vec{K}_{II} = 0)$. В конечном состоянии, получающемся от распада первичного мезона, мы имеем две вторичные частицы с массами m_1 и m_2 . Принимая во внимание, что согласно (I.5) $N = M$, мы получим (I.7) для малой полуоси эллипсоида импульсов ($=$ импульсу вторичной частицы, если первичная частица покоилась):

$$\beta = \frac{1}{2M} \sqrt{\{M^2 - (m_1 + m_2)^2\} \{M^2 - (m_1 - m_2)^2\}} \quad (7.1)$$

Эксцентриситет эллипсоида равен скорости β первичной частицы. Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести сокращения

$$L = K/M = \beta / \sqrt{1 - \beta^2} \quad (7.2)$$

$$L_n^* = \frac{b}{m_n} = \beta_n^* / \sqrt{1 - \beta_n^{2*}} \quad (7.3)$$

где значок * относится к системе покоя первичной частицы.

Мы можем выразить L_n^* через кинетическую энергию W_n^* , которую имеют вторичные частицы, получающиеся при распаде остановившегося мезона:

$$L_n^* = \sqrt{\frac{W_n^*}{m_n^*} (2 + W_n^*/m_n^*)} \quad (7.4)$$

Из (I.9) можно видеть, что при распаде остановившегося мезона, кинетическая энергия W_n^* частицы I, ее масса m_1 и отношение масс M/m_1 определяют массу m_2 другой вторичной частицы:

$$\frac{m_2}{m_1} = \sqrt{\left(\frac{M}{m_1} - 1\right)^2 - 2 \frac{M}{m_1} \frac{W_1^*}{m_1}}$$

Возможные углы, с которыми вторичные частицы могут двигаться относительно первичного направления и максимальное значение этого угла находится из (I.2I), (7.2) и (7.3)

$$\sin \vartheta_{n \max} = \frac{L_n^*}{L} \quad (7.5)$$

Только для $L > L_n^*$ направление полета ограничено (7.5). Импульс частицы n , испущенной в направлении ϑ_n дается (2.5) или в наших новых обозначениях, используя (7.2) и (7.3), уравнением

$$K_n(\vartheta_n) = \frac{m_n}{1+L^2 \sin^2 \vartheta_n} \left\{ L \sqrt{1+L_n^{*2}} \cos \vartheta_n \pm L_n^* \sqrt{1+L^2 - \frac{L^2}{L_n^{*2}} \sin^2 \vartheta_n} \right\} \quad (7.6)$$

Что касается знака, то здесь справедливы те же рассуждения, что в случае (2.5), т.е. для $L \leq L_n^*$ берем знак +, в то время как для $L > L_n^*$ мы имеем в любом направлении два возможных импульса, которые отличаются знаком в (7.6).

Для наблюдения распада налета мезона с временем жизни τ_0 в камере Вильсона, средний свободный путь для распада

$$l = \frac{\beta_0 c}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \tau_0 = L l_0 \quad l_0 = c \tau_0 \quad (c = \text{скорости света})$$
 должен быть порядка 3-30 см. Для времени жизни $\tau_0 \sim 10^{-10}$ сек ($l_0 = 3$ см) это дает L порядка 1 - 10, в то время как для времени жизни $\tau_0 \sim 10^{-9}$ сек. ($l_0 \sim 30$ см) мы должны иметь L порядка 0,1 - 1.

Величина L_n^* для вторичной частицы, наблюдаемой при распаде π -мезона может быть получена из работы Лейтеса, Оккиалини и Поуэлла (3), которые измеряли пробег вторичных частиц, получающихся при распаде остановившихся мезонов в эмульсии. Предполагая различные значения для масс вторичных частиц, они получают соответствующие величины для их кинетических энергий W_n^* , из которых с помощью (7.4) L_n^* может быть определено равным :

Масса m_i (в единицах электронных масс)	100	150	200	250	300
W_i^* в МэВ	3,0	3,6	4,1	4,5	4,85
L_i^*	0,35	0,31	0,29	0,27	0,25

Таким образом, мы видим, что во всех случаях, где $L > 0,35$ вторичная частица в лабораторной системе испускается внутри конуса с половиной угла при вершине равным (7.5).

В системе покоя первичной частицы вторичная частица может быть испущена во всех направлениях с одинаковой вероятностью.

Из изотропности углового распределения в системе центра инерции следует, как указано в § 2, что вероятность на единицу энергетического интервала для вторичной частицы, имеющей энергию e_n лежащую внутри пределов

$$e_{n \min} \leq e_n \leq e_{n \max}$$

постоянна и равна

$$\sigma_n(e_n) = \frac{1}{2f} = \frac{M}{2\beta k}$$

Минимальная и максимальная энергия вторичной частицы для данного импульса \vec{K} первичной частицы дается (2.9).

Угловое распределение вторичных частиц дается (2.12). В случае $L > L_n^*$ направление частицы n лежит внутри конуса с половиной угла при вершине $\vartheta_{n \max}$ и вероятность на единицу телесного угла становится бесконечной для $\vartheta_n = \vartheta_{n \max}$. Для этого случая более удобно ввести интегральную вероятность $P_n(\vartheta_n)$ того, что направление вторичной частицы лежит внутри конуса с половиной угла раствора ϑ_n . В системе центра инерции углу ϑ_n соответствуют два угла, ϑ_{n+}^* и ϑ_{n-}^* ; углу $\vartheta_n = 0$ соответствуют в системе центра инерции углы $\vartheta_{n+}^* = 0$ и $\vartheta_{n-}^* = \pi$. Следовательно, телесный угол в системе центра инерции, который соответствует конусу с половиной угла, равной ϑ_n , в лабораторной системе равен

$$2\pi(1 - \cos \vartheta_{n+}^*) + 2\pi(1 + \cos \vartheta_{n-}^*)$$

Деля на 4π , мы получим вероятность $P_n(\vartheta)$ из (2.2)

$$P_n(\vartheta_n) = 1 - \frac{\cos \vartheta_n}{1 + L^2 \sin^2 \vartheta_n} \sqrt{1 - \frac{L^2}{L_n^{*2}} \sin^2 \vartheta_n}$$

Для распада обычного мезона ($M \sim 200 m_e$) на электрон и нейтрино, мы имеем для электрона, из (7.1) и (7.3)

$$L_e^* \sim 100$$

Тем самым, случай, обсужденный выше $L > L_e^*$ реализуется только для $k > 100 M$, т.е. для мезонов с энергией выше 10^{10} эв. Для мезонов с энергиями много меньшими, чем 10^{10} эв. мы можем пренебречь L^2/L_e^{*2} по сравнению с 1 ($\gamma_e = \beta$) и получить из (2.12) и (2.5) для вероятности на единицу телесного угла найти электрон распада под углом ϑ, φ к первичному направлению

$$\sigma(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \vartheta)^2} \quad (7.7)$$

Вероятность $P(\pi/2)$ того, что электрон движется в направлении вперед равна

$$P(\pi/2) = \frac{1}{2} (1 + \beta) \quad (7.8)$$

Формулы (7.7) и (7.8) строго справедливы когда вторичные частицы имеют нулевую массу покоя.

§ 8. β - распад ядра

До сих пор мы рассматривали только процессы с двумя свободными частицами в конечном состоянии. В случае с тремя частицами в конечном состоянии законы сохранения имеют вид

$$E = \sqrt{m_1^2 + K_1^2} + \sqrt{m_2^2 + K_2^2} + \sqrt{m_3^2 + K_3^2}$$

$$\vec{K} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2 + \vec{K}_3$$

Если мы теперь зафиксируем импульс одной из трех частиц, скажем частицы 3, мы будем иметь то же, что и в § I, если во всех уравнениях \vec{K} и E заменить на \vec{K}' и E' , причем

$$\vec{K}' = \vec{K} - \vec{K}_3; \quad E' = E - \sqrt{m_3^2 + K_3^2}$$

Эллипсоид импульсов вместе с точками A_1 и A_2 , определяемыми \vec{K}' , E' , m_1 и m_2 дает возможные импульсы частиц 1 и 2 для выбранного импульса частицы 3. Можно заметить, что система центра инерции в проводимом рассмотрении является не системой центра инерции для всей системы, а только для двух частиц 1 и 2.

Мы будем применять теперь геометрическую картину к β -распаду ядра с массой покоя M ($\vec{K} = 0$). В конечном состоянии мы имеем три частицы: электрон, нейтрино и ядро отдачи. Мы предположим, что масса покоя нейтрино равна нулю. Мы будем использовать картину для определения возможных импульсов \vec{K}_e и \vec{K}_ν электрона и нейтрино для данного импульса $\vec{K}_{от}$ ядра отдачи. Этот импульс

может изменяться между пределами $K_{от\ min} = 0$ и некоторым $\vec{K}_{от\ max}$. Обозначая через $m_{от}$ и $W_{от}$ массу и кинетическую энергию ядра отдачи, мы имеем

$$\vec{K}' = -\vec{K}_{от} \quad E' = \Delta - W_{от}, \quad (8.1)$$

где $\Delta = M - m_{от}$

разность масс начального и конечного ядра. Энергия N' системы, состоящей из электрона и нейтрино в системе покоя этих двух частиц равна теперь

$$N' = \sqrt{E'^2 - K'^2} = \sqrt{\Delta^2 - 2M W_{от}}$$

Малая полуось эллипсоида импульсов равна тогда, согласно (I.7)

$$b = \frac{\Delta^2 - m_e^2 - 2M W_{от}}{2\sqrt{\Delta^2 - 2M W_{от}}} \quad (8.2)$$

Так как b не может быть отрицательным, мы видим, что максимальная величина $W_{от}$ дается

$$W_{от\ max} = \frac{\Delta^2 - m_e^2}{2M}$$

и, следовательно, Δ может быть определена из измерения максимума энергии отдачи⁽¹⁰⁾. Для этого максимального значения $W_{от}$ мы имеем

$b = 0$ и, тем самым $\alpha_\nu = f = 0$ (α_ν относится к нейтрино), так что энергия нейтрино обращается в нуль. Так как кинетическая энергия ядра очень мала, мы можем подставить с большой степенью точности

$$K_{от}^2 = 2M W_{от}$$

откуда получим из (8.2)

$$b = \frac{(K_{от\ max})^2 - K_{от}^2}{2\sqrt{\Delta^2 - K_{от}^2}}$$

Для эксцентриситета эллипсоида мы получим из (I.6) и (8.I)

$$\beta = \frac{K_{от}}{\Delta} \quad (8.3)$$

и для большой оси, в том же приближении

$$a = \frac{\Delta}{2} \cdot \frac{(K_{от. max})^2 - K_{от}^2}{\Delta^2 - K_{от}^2}$$

Эллипсоид импульсов превращается при $\vec{K}_{от} = 0$ в сферу и уменьшается при $\vec{K}_{от. max}$ в точку. Большая и малая полуоси уменьшаются с ростом $K_{от}$. Начало A_e вектора импульса электрона находится на расстоянии α_e от центра эллипсоида

$$\alpha_e = \frac{K_{от}}{2} \left(1 + \frac{m_e^2}{\Delta^2 - K_{от}^2} \right) \quad (8.4)$$

в то время как α_v дается

$$\alpha_v = f = \frac{K_{от} M}{(\Delta^2 - K_{от}^2)} (W_{от. max} - W_{от}) = \frac{K_{от} (K_{от. max}^2 - K_{от}^2)}{2(\Delta^2 - K_{от}^2)} \quad (8.5)$$

Нижний и верхний пределы возможных кинетических энергий электрона, для данного импульса ядра отдачи, из (2.9) равны

$W_{e min} = \frac{\alpha_e}{\beta} - m_e - f$; $W_{e max} = \frac{\alpha_e}{\beta} - m_e + f$ соответственно. Подставляя вместо α_e , β и f величины, даваемые (8.3), (8.4) и (8.5), мы получим:

$$W_{e min} = \frac{(\Delta - m_e - K_{от})^2}{2(\Delta - K_{от})}; \quad W_{e max} = \frac{(\Delta - m_e + K_{от})^2}{2(\Delta + K_{от})}$$

При проведении интегрирования по всем возможным энергиям электрона для данной энергии ядра отдачи, можно заметить, что W_e может принимать все величины между $W_{e min}$ и $W_{e max}$ и что, так как точка

A_e лежит вне фокуса эллипсоида импульсов, угол ψ_2 является однозначной функцией W_e .

П Р И Л О Ж Е Н И Е

(Вывод основных соотношений)

I. Вывод соотношений (I.7) и (I.9)

В системе центра инерции $\vec{K} = 0$

$$N^2 = E^2 = (\sqrt{m_1^2 + \beta^2} + \sqrt{m_2^2 + \beta^2})^2; \quad N^2 - 2\beta^2 - (m_1^2 + m_2^2) = 2\sqrt{m_1^2 + \beta^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + \beta^2}$$

$$\{N^2 - 2\beta^2 - (m_1^2 + m_2^2)\}^2 = 4(m_1^2 + \beta^2)(m_2^2 + \beta^2) = 4[m_1^2 m_2^2 + \beta^2(m_1^2 + m_2^2) + \beta^4]$$

$$N^4 - 2N^2(m_1^2 + m_2^2) + m_1^4 + 2m_1^2 m_2^2 + m_2^4 + 4\beta^4 - 4N^2\beta^2 + 4\beta^2(m_1^2 + m_2^2) =$$

$$= 4m_1^2 m_2^2 + 4\beta^2(m_1^2 + m_2^2) + 4\beta^4$$

$$4N^2\beta^2 = N^4 - 2N^2(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2 = \{N^2 - (m_1 + m_2)^2\} \{N^2 - (m_1 - m_2)^2\}$$

$$\beta = \frac{1}{2N} \sqrt{\{N^2 - (m_1 + m_2)^2\} \{N^2 - (m_1 - m_2)^2\}}$$

$$e_1^* = \sqrt{m_1^2 + \beta^2} = \left\{ m_1^2 + \frac{N^2}{4} \left[1 - \frac{(m_1 + m_2)^2}{N^2} \right] \left[1 - \frac{(m_1 - m_2)^2}{N^2} \right] \right\}^{1/2} =$$

$$= \frac{N}{2} \left\{ \frac{4m_1^2}{N^2} + 1 - \frac{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 + m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 + (m_1^2 - m_2^2)^2}{N^4} \right\}^{1/2} =$$

$$= \frac{N}{2} \left\{ 1 + \frac{2(m_1^2 - m_2^2)}{N^2} + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{N^4} \right\}^{1/2} = \frac{N}{2} \left\{ 1 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{N^2} \right\}$$

Аналогично получим, что

$$e_2^* = \sqrt{m_2^2 + \beta^2} = \frac{N}{2} \left\{ 1 + \frac{m_2^2 - m_1^2}{N^2} \right\}$$

2. Вывод соотношения (I.10)

В системе центра инерции $b^2 = b_{ix}^2 + b_{iy}^2 + b_{iz}^2 = b_{2x}^2 + b_{2y}^2 + b_{2z}^2$

или
$$\frac{b_{ix}^2 + b_{iy}^2 + b_{iz}^2}{b^2} = 1$$

Преобразуем это выражение в лабораторную систему с помощью релятивистских соотношений

$$K'_\perp = K_\perp \quad K'_\parallel = \frac{K_\parallel + \frac{V}{c^2} \mathcal{E}'}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}' + P'_\parallel V}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E} - P_\parallel V}{\sqrt{1 - \beta^2}})$$

Вы брали за ось z направление полного импульса \vec{K}

Тогда

$$b_{ix} = K_{ix}, \quad b_{iy} = K_{iy}, \quad b_{iz} = \frac{K_{iz} - \beta e_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{K_{iz} - \beta \frac{e_i^* + b_{iz} \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\sqrt{1 - \beta^2} b_{iz} = K_{iz} - \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} e_i^x - \frac{\beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} b_{iz}; \quad b_{iz} \left(\frac{1 - \beta^2 + \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = K_{iz} - \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} e_i^*$$

$$b_{1z} = \sqrt{1 - \beta^2} \left(K_{1z} - \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} e_1^* \right)$$

После чего (А) переходит в

$$\frac{K_{1x}^2 + K_{1y}^2}{\beta^2} + \frac{\left(K_{1z} - \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} e_1^* \right)^2}{\beta^2 / (1 - \beta^2)} = 1$$

$$\frac{K_{1x}^2 + K_{1y}^2}{\beta^2} + \frac{(K_{1z} - \alpha_1)^2}{a^2} = 1 \quad \text{т. е.} \quad a^2 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}$$

Аналогично получим для K_2

$$\frac{K_{2x}^2 + K_{2y}^2}{\beta^2} + \frac{(K_{2z} - \alpha_2)^2}{a^2} = 1$$

где $\alpha_2 = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} e_2^*$ причем $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot (e_1^* + e_2^*) = K$

Выражение для эксцентриситета эллипса

$$\text{эксцентриситет} = \frac{f}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \beta$$

так как $f = \sqrt{a^2 - b^2}$; $b/a = \sqrt{1 - \beta^2}$

4. Выражение (I.I5)

$$\alpha_n = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} e_n^* = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \sqrt{m_n^2 + b^2} = \frac{f/a}{\sqrt{1 - \beta^2}} \sqrt{m_n^2 + b^2} = \frac{f}{b} \sqrt{\beta^2 + m_n^2} \gg f$$

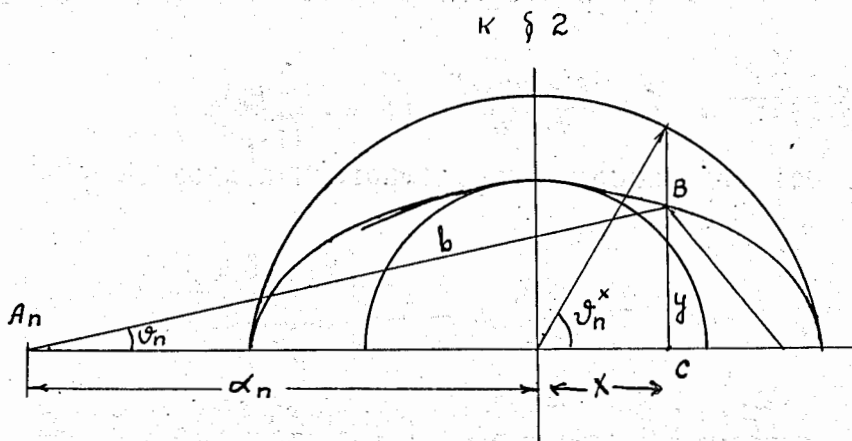


Рис. 3.

Из треугольника A_nBC

$$\operatorname{tg} \vartheta_n = \frac{y}{x_n + x} ; \quad y = b \sin \vartheta_n^* \quad x = a \cos \vartheta_n^*$$

$$\operatorname{tg} \vartheta_n = \frac{b \sin \vartheta_n^*}{x_n + a \cos \vartheta_n^*} = \frac{b/a \sin \vartheta_n^*}{\frac{x_n}{a} + \cos \vartheta_n^*} = \sqrt{1 - \beta^2} \frac{\sin \vartheta_n^*}{\gamma_n + \cos \vartheta_n^*}$$

$$\operatorname{tg}^2 \vartheta_n = (1 - \beta^2) \frac{1 - \cos^2 \vartheta_n^*}{(\gamma_n + \cos \vartheta_n^*)^2} ; \quad \gamma_n^2 + 2 \gamma_n \cos \vartheta_n^* + \cos^2 \vartheta_n^* = \frac{(1 - \beta^2)}{\operatorname{tg}^2 \vartheta_n} (1 - \cos^2 \vartheta_n^*)$$

$$\cos^2 \vartheta_n^* \{1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta_n^*\} + 2 \gamma_n \sin^2 \vartheta_n^* \cos \vartheta_n^* + [\gamma_n^2 \sin^2 \vartheta_n^* - (1 - \beta^2) \cos^2 \vartheta_n^*] = 0$$

$$\cos \vartheta_n^* = \frac{1}{(1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta_n^*)} \left\{ -\gamma_n \sin^2 \vartheta_n^* \pm \sqrt{\gamma_n^2 \sin^4 \vartheta_n^* - (1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta_n^*) [\gamma_n^2 \sin^2 \vartheta_n^* - (1 - \beta^2) \cos^2 \vartheta_n^*]} \right\}$$

Подкоренное выражение можно преобразовать

$$\gamma_n^2 \sin^4 \vartheta_n^* - (1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta_n^*) [\gamma_n^2 \sin^2 \vartheta_n^* - (1 - \beta^2) \cos^2 \vartheta_n^*] =$$

$$= \gamma_n^2 \{1 - 2 \cos^2 \vartheta_n^* + \cos^4 \vartheta_n^*\} - \gamma_n^2 \sin^2 \vartheta_n^* + \gamma_n^2 \beta^2 \sin^2 \vartheta_n^* \cos^2 \vartheta_n^* + (1 - \beta^2) \cos^2 \vartheta_n^* - \beta^2 (1 - \beta^2) \cos^4 \vartheta_n^*$$

$$= \gamma_n^2 \cos^2 \vartheta_n^* (\cos^2 \vartheta_n^* - 1) + \gamma_n^2 \beta^2 \sin^2 \vartheta_n^* \cos^2 \vartheta_n^* + (1 - \beta^2) (1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta_n^*) \cos^2 \vartheta_n^* = (1 - \beta^2) \cos^2 \vartheta_n^* \{1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta_n^* -$$

$$- \gamma_n^2 \sin^2 \vartheta_n^*\} = (1 - \beta^2) \cos^2 \vartheta_n^* \left\{ 1 - \beta^2 - (\gamma_n^2 - \beta^2) \sin^2 \vartheta_n^* \right\} = (1 - \beta^2)^2 \cos^2 \vartheta_n^* \left\{ 1 - \frac{\gamma_n^2 - \beta^2}{1 - \beta^2} \sin^2 \vartheta_n^* \right\}$$

Тогда

$$\cos \vartheta_n^* = \frac{1}{(1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta_n^*)} \left\{ -\gamma_n \sin^2 \vartheta_n^* \pm (1 - \beta^2) \cos \vartheta_n^* \sqrt{1 - \frac{\gamma_n^2 - \beta^2}{1 - \beta^2} \sin^2 \vartheta_n^*} \right\}$$

3. Вывод выражения для максимального угла отклонения.

При $\vartheta_n = \vartheta_{n \max}$ $1 - \frac{\gamma_n^2 - \beta^2}{1 - \beta^2} \sin^2 \vartheta_{n \max} = 0$

Откуда $(\gamma_n = \beta / \beta_n^* = \frac{\alpha_n}{a})$

$$\sin \vartheta_{n \max} = \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{\gamma_n^2 - \beta^2}} = \sqrt{\frac{(1 - \beta^2) a^2}{\alpha_n^2 - a^2 \beta^2}} = \frac{b}{\sqrt{\alpha_n^2 - a^2 \beta^2}} ; \quad \beta = \frac{f}{a} \quad a \beta = f$$

$$\sin \vartheta_{n \max} = \frac{b}{\sqrt{\alpha_n^2 - f^2}} = \frac{b}{f} \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha_n^2}{f^2} - 1}} ; \quad \frac{\alpha_n}{f} = \frac{\sqrt{b^2 + m_n^2}}{b}$$

$$\sin \vartheta_{n \max} = \frac{b/f}{\sqrt{\frac{b^2 + m_n^2}{\beta^2} - 1}} = \frac{\beta^2}{f m_n}$$

4. Соотношение (2.3)

$$\cos \vartheta_{n0}^* = - \frac{\gamma_n \sin^2 \vartheta_n}{1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta_n} = - \frac{\gamma_n (1 - \beta^2)}{\gamma_n^2 - \beta^2 - \beta^2 (\gamma_n^2 - \beta^2 - 1 + \beta^2)} = - \frac{\gamma_n (1 - \beta^2)}{\gamma_n^2 (1 - \beta^2)} = - \frac{1}{\gamma_n}$$

5. Соотношение (2.5)

Из чертежа

$$K_n(\vartheta_n) \cos \vartheta_n = \alpha_n + a \cos \vartheta_n^* = \alpha (\gamma_n + \cos \vartheta_n^*); \quad K_n(\vartheta_n) = \alpha \cdot \frac{\gamma_n + \cos \vartheta_n^*}{\cos \vartheta_n}$$

Откуда

$$K_n(\vartheta_n) = \alpha \frac{\gamma_n + \frac{1}{1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta_n} \left\{ -\gamma_n \sin^2 \vartheta_n \pm (1 - \beta^2) \cos \vartheta_n \sqrt{1 - \frac{\gamma_n^2 - \beta^2}{1 - \beta^2} \sin^2 \vartheta_n} \right\}}{\cos \vartheta_n}$$

$$K_n(\vartheta_n) = \frac{\alpha}{1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta_n} \left\{ \gamma_n \left[\frac{1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta_n - \sin^2 \vartheta_n}{\cos \vartheta_n} \right] \pm (1 - \beta^2) \sqrt{1 - \frac{\gamma_n^2 - \beta^2}{1 - \beta^2} \sin^2 \vartheta_n} \right\} =$$

$$= \frac{\alpha (1 - \beta^2)}{1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta_n} \left\{ \gamma_n \cos \vartheta_n \pm \sqrt{1 - \frac{\gamma_n^2 - \beta^2}{1 - \beta^2} \sin^2 \vartheta_n} \right\}$$

$$\left(\alpha = \frac{b}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \alpha (1 - \beta^2) = b \sqrt{1 - \beta^2} = p \right)$$

Откуда видно, что для $\gamma_n \leq 1$ надо оставить лишь + .

6. Соотношение (2.7)

$$f = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{b^2}{1 - \beta^2} - \beta^2} = \frac{b}{\sqrt{1 - \beta^2}} \sqrt{1 - 1 + \beta^2} = \frac{b\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$e_n = \frac{e_n^* + \beta b \cos \vartheta_n^*}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{e_n^*}{\sqrt{1 - \beta^2}} + f \cos \vartheta_n^*$$

7. Соотношение (2.10)

$$\frac{K_n(\vartheta_n) \cos \vartheta_n}{\alpha} - \gamma_n = \cos \vartheta_n^*; \quad e_n = \frac{e_n^*}{\sqrt{1 - \beta^2}} + f \left(\frac{K_n \cos \vartheta_n}{\alpha} - \gamma_n \right);$$

$$f = \alpha \beta; \quad \gamma_n = \beta / \beta_n^*; \quad b = e_n^* \beta_n^*$$

$$f \gamma_n = \frac{b\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\beta}{\beta_n^*} = \frac{e_n^*}{\sqrt{1-\beta^2}} \beta^2 \beta^2$$

$$e_n = \frac{e_n^*}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{f}{\alpha} \cdot K_n \cos \vartheta_n - \gamma_n f = \beta K_n \cos \vartheta_n + \frac{e_n^*}{\sqrt{1-\beta^2}} (1-\beta^2) = \sqrt{1-\beta^2} e_n^* + \beta K_n \cos \vartheta_n =$$

$$= \frac{P}{f} \alpha_n + \beta \cdot K_n \cos \vartheta_n$$

так как $\sqrt{1-\beta^2} e_n^* = \frac{\alpha_n (1-\beta^2)}{\beta} = \frac{\alpha_n}{f} \alpha (1-\beta^2) = \frac{P}{f} \alpha_n$

8. Выражение (2.12) для случая $\gamma_n = I$

$$\sigma_n = \sigma_n^* (\vartheta_n^*) \left(\frac{K_n}{b}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 \vartheta_n}} = \frac{\sigma_n^* (\vartheta_n^*)}{\cos \vartheta_n} \cdot \left(\frac{K_n}{b}\right)^2$$

$$\frac{K_n (\vartheta_n)}{b} = \frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{(1-\beta^2 \cos^2 \vartheta_n)} \left\{ \cos \vartheta_n + \sqrt{1-\sin^2 \vartheta_n} \right\} = \frac{2 \cos \vartheta_n (1-\beta^2)^{1/2}}{(1-\beta^2 \cos^2 \vartheta_n)}$$

$$\sigma_n (\vartheta_n) = \sigma_n^* (\vartheta_n^*) \frac{4(1-\beta^2) \cos \vartheta_n}{(1-\beta^2 \cos^2 \vartheta_n)^2}$$

К § 3.

Соотношения (3.2) и (3.8)

$$\vec{K}' = \vec{K}_I; \quad E = \sqrt{m_I^2 + K^2} + m_{II}$$

$$N = \sqrt{E^2 - K^2} = \sqrt{m_I^2 + K^2 + 2m_{II} \sqrt{m_I^2 + K^2} + m_{II}^2 - K^2} = \sqrt{m_I^2 + m_{II}^2 + 2m_I m_{II} + 2m_{II} (\sqrt{m_I^2 + K^2} - m_I)}$$

$$= \sqrt{M_I^2 + 2m_{II} W}$$

$$\beta = \frac{1}{N} \sqrt{\frac{\{N^2 - (m_I + m_2)^2\}}{2} \cdot \frac{\{N^2 - (m_I - m_2)^2\}}{2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{M_I^2 + 2m_{II} W_i}} \sqrt{\frac{M_i^2 + 2m_{II} W_i - (m_i + m_2)^2}{2} \cdot \frac{M_i^2 + 2m_{II} W_i - (m_i - m_2)^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{M_i^2 + 2m_{II} W_i}} \sqrt{\left\{ \frac{(M_i + M_f)(M_i - M_f) + 2m_{II} W_i}{2} \right\} \left\{ \frac{(M_i + M_f)(M_i - M_f) + 4m_i m_2 + 2m_{II} W_i}{2} \right\}}$$

$$= \sqrt{\frac{(QM + m_{II} W_i)(QM + m_{II} W_i + 2m_i m_2)}{M_i^2 + 2m_{II} W_i}}$$

к § 4.

Соотношение (4.1)

$$\beta = \frac{K}{E}; \quad E = M + W_i$$

Из закона сохранения энергии

$$(W_i + m_I)^2 = m_I^2 + K^2; \quad K^2 = W_i^2 + 2m_I W_i \quad K = \sqrt{W_i(2m_I + W_i)}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{W_i(2m_I + W_i)}}{M + W_i}$$

2. Соотношение (4.2)

$$P = b\sqrt{1-\beta^2}; \quad b = \sqrt{\frac{(QM + m_2 W_i)(QM + m_2 W_i + 2m_1 m_2)}{M^2 + 2m_2 W_i}}$$

$$1 - \beta^2 = \frac{(M + W_i)^2 - W_i(2m_I + W_i)}{(M + W_i)^2} = \frac{M^2 + 2M W_i + W_i^2 - 2m_I W_i - W_i^2}{(M + W_i)^2} = \frac{M^2 + 2(M - m_I)W_i}{(M + W_i)^2} =$$

$$= \frac{M^2 + 2m_2 W_i}{(M + W_i)^2}$$

$$P = \sqrt{\frac{m_2^2 W_i (W_i + 2m_1)(M^2 + 2m_2 W_i)}{(M^2 + 2m_2 W_i)(M + W_i)^2}} = m_2 \beta$$

3. Соотношение (4.3)

$$b = \frac{P}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_2 \beta}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad a = \frac{b}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_2 \beta}{1-\beta^2}$$

4. Соотношение (4.4)

$$\alpha_1 = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} e_1^* = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{m_2} e_1^* a; \quad \alpha_2 = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} e_2^* = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{m_2} e_2^* a; \quad \sqrt{1-\beta^2} = \frac{\sqrt{M^2 + 2m_2 W_i}}{(M + W_i)}$$

$$e_1^* = \frac{\sqrt{M^2 + 2m_2 W_i}}{2} \left\{ 1 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{M^2 + 2m_2 W_i} \right\} = \frac{\sqrt{M^2 + 2m_2 W_i}}{(M^2 + 2m_2 W_i)} \{ m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 + 2m_2 W_i + m_1^2 - m_2^2 \}$$

$$e_2^* = \frac{\sqrt{M^2 + 2m_2 W_i}}{2} \left\{ 1 + \frac{m_2^2 - m_1^2}{M^2 + 2m_2 W_i} \right\} = \frac{\sqrt{M^2 + 2m_2 W_i}}{2} - \frac{\{ m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 + 2m_2 W_i + m_2^2 - m_1^2 \}}{(M^2 + 2m_2 W_i)}$$

$$e_1^* = \frac{(m_1^2 + m_1 m_2 + m_2 W_i)}{\sqrt{M^2 + 2m_2 W_i}}; \quad e_2^* = \frac{m_2 (M + W_i)}{\sqrt{M^2 + 2m_2 W_i}}$$

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{M^2 + 2m_2 W_i}}{\sqrt{M^2 + 2m_2 W_i}} \cdot \frac{m_2}{m_2} \cdot \frac{(m_1^2 + m_1 m_2 + m_2 W_i)}{(M + W_i)} = \frac{W_i + \frac{m_1}{m_2} M}{M + W_i} a; \quad \gamma_1 = \frac{\alpha_1}{a} = \frac{W_i + \frac{m_1}{m_2} M}{M + W_i}$$

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{M^2 + 2m_2 W_i}}{\sqrt{M^2 + 2m_2 W_i}} \cdot \frac{m_2}{m_2} \cdot \frac{(M + W_i)}{(M + W_i)} a = a; \quad \gamma_2 = 1$$

$$(1) K_2(\vartheta_2) = \frac{P}{1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta_2} \cdot \{2 \cos \vartheta_2\} = \frac{2P \cos \vartheta_2}{1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta_2} = \frac{2m_2 \beta \cos \vartheta_2}{1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta_2};$$

$$(2) K_2^{\max} = \left. \frac{2m_2 \beta \cos \vartheta_2}{1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta_2} \right|_{\vartheta_2=0} = \frac{2m_2 \beta}{1 - \beta^2} = 2a$$

$$(3) e_2 = \frac{P}{f} \alpha_2 + \beta K_2 \cos \vartheta_2 \quad w_2 = \beta K_2 \cos \vartheta_2$$

$$(4) w_2^{\max} = \beta K_2 \cos \vartheta_2 \Big|_{\vartheta_2=0} = \beta K_2 = \frac{f}{a} \cdot 2a = 2f = 2m_2 \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}$$

$$(5) \cos \vartheta_2 = \frac{w_2}{\beta K_2} = \frac{w_2}{\beta} \cdot \frac{(1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta_2)}{2m_2 \beta \cos \vartheta_2}; \quad \cos^2 \vartheta_2 = \frac{w_2}{2m_2 \beta^2} (1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta_2)$$

$$\cos^2 \vartheta_2 = \frac{2m_2 w_2}{2\beta^2 m_2 (w_2 + 2m_2)}; \quad \cos \vartheta_2 = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{w_2}{w_2 + 2m_2}}$$

$$(6) \cos \vartheta_2 = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{w_2}{w_2 + 2m_2}}; \quad \sin \vartheta_2 = \sqrt{1 - \frac{w_2}{\beta^2 (w_2 + 2m_2)}} = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{\beta^2 (w_2 + 2m_2) - w_2}{w_2 + 2m_2}}$$

$$\operatorname{ctg} \vartheta_2 = \sqrt{\frac{w_2}{2m_2 \beta^2 - w_2 (1 - \beta^2)}} > \sqrt{\frac{w_2}{2m_2}} \quad \frac{w_2}{m_2} < 2 \operatorname{ctg}^2 \vartheta_2$$

$$(7) E = \frac{K}{\beta} = K \frac{K_2 \cos \vartheta_2}{w_2}; \quad E = \sqrt{m_1^2 + K^2} + m_2 \quad m_1^2 = (E - m_2)^2 - K^2$$

$$m_1^2 = \left(\frac{K K_2 \cos \vartheta_2}{w_2} - m_2 \right)^2 - K^2$$

$$(8) \operatorname{tg} \frac{\Psi_{\min}}{2} = \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \beta^2}; \quad \cos \frac{\Psi_{\min}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2 - \beta^2}}; \quad \sin \frac{\Psi_{\min}}{2} = \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{2 - \beta^2}}$$

$$\cos \Psi_{\min} = \cos^2 \frac{\Psi_{\min}}{2} - \sin^2 \frac{\Psi_{\min}}{2} = \frac{\beta^2}{2 - \beta^2}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{W_i (2m_1 + W_i)}}{M + W_i} = \sqrt{\frac{W_i}{2m_1 + W_i}}; \quad \cos \Psi_{\min} = \frac{W_i / (2m_1 + W_i)}{2 - \frac{W_i}{2m_1 + W_i}} = \frac{W_i}{W_i + 4m_1};$$

$$(9) \quad \omega_2 = \beta K_2 \cos \vartheta_2 \quad \beta = \frac{\omega_2}{K_2 \cos \vartheta_2}$$

$$\beta = \frac{K}{m_2 + K}; \quad (K + m_2)\beta = K; \quad K(1 - \beta) = m_2\beta; \quad K = \frac{m_2\beta}{1 - \beta}$$

$$K = \frac{m_2 \frac{\omega_2}{K_2 \cos \vartheta_2} \cdot 1}{1 - \frac{\omega_2^2}{K_2^2 \cos^2 \vartheta_2}} = \frac{m_2}{\frac{K_2}{\omega_2} \cos \vartheta_2 - 1}$$

$$(10) \quad \sin \vartheta_{1, \max} = \frac{b^2}{f m_1}; \quad b = \frac{m_2 \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad a = \frac{m_2 \beta}{1 - \beta^2}$$

$$f = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{m_2 \beta}{(1 - \beta^2)} \sqrt{1 - 1 + \beta^2} = \frac{m_2 \beta^2}{(1 - \beta^2)}$$

$$\sin \vartheta_{1, \max} = \frac{m_2^2 \beta^2}{m_1 (1 - \beta^2)} \Big/ \frac{m_2 \beta^2}{(1 - \beta^2)} = \frac{m_2}{m_1}$$

к § 6.

I. Энергия порога

$$\delta = \frac{M}{m_{II}} |Q|; \quad Q = M_i - M_f = m - m_1 - m_2; \quad \delta = \frac{1}{2} \frac{(m + m_1 + m_2)}{m} |Q| \frac{(2m - m + m_1 + m_2)}{2m} = |Q| \left(1 + \frac{|Q|}{2m}\right)$$

2. Выражение для радиуса сферы

$$a = b = \sqrt{\frac{2m_1 m_2 (m_{II} \omega_i + M Q)}{M^2}}; \quad \delta = \frac{M}{m_{II}} |Q|; \quad |Q| = \frac{m_{II}}{M} \delta = \frac{m}{m + m_1 + m_2} \delta$$

$$a = b = \sqrt{\frac{2m_1 m_2 (-m\delta + mK)}{M^2}} = \sqrt{\frac{(K - \delta) 2m_1 m_2}{m}}$$

3. Выражение для α_n

$$\alpha_n = \beta e_n^* \quad e_n^* \cong m_n \quad \beta = \frac{K}{m}; \quad \alpha_n = \frac{m_n}{m} K$$

$$\gamma_i = \frac{\alpha_i}{a} = \frac{m_i}{m} K \sqrt{\frac{m}{2m_1 m_2 (K - \delta)}} = \sqrt{\frac{m_i}{2m_2 m \delta x}} \delta (1 + x) = \sqrt{\frac{m_i \delta}{2m m_2}} \cdot \frac{x + 1}{\sqrt{x}}$$

1. Выражение (7, 4)

к § 7

$$L_n^* = \frac{b}{m_n} = \frac{\beta_n^*}{\sqrt{1 - \beta_n^{*2}}}; \quad e_n^* = m_n + \omega_n^* = \frac{m_n^*}{\sqrt{1 - \beta_n^{*2}}}; \quad \beta_n^* = \sqrt{\frac{\omega_n^{*2} + 2m_n \omega_n^*}{(m_n + \omega_n^*)^2}}$$

1. Выражение (7.4)

$$L_n^* = \frac{\beta_n^*}{\sqrt{1-\beta_n^{*2}}} = \sqrt{\frac{\omega_n^*}{m_n} \left(2 + \frac{\omega_n^*}{m_n}\right)}$$

2.

$$e_i^* = m_i + \omega_i^* = \frac{N}{2} \left(1 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{N^2}\right) = \frac{M}{2} \left(1 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{M^2}\right);$$

$$\frac{m_2^2}{m_1^2} = 1 + \frac{M^2}{m_1^2} - 2 \frac{\omega_1^*}{M} \frac{M^2}{m_1^2} - \frac{2m_1}{M} \cdot \frac{M^2}{m_1^2}; \quad \frac{m_2}{m_1} = \sqrt{\left(1 + \frac{M^2}{m_1^2} - 2 \frac{M}{m_1} \frac{\omega_1^*}{m_1}\right)}$$

3. Выражение (7.5)

$$\sin \vartheta_n \max = \sqrt{\frac{1-\beta^2}{\gamma_n^2 - \beta^2}}; \quad L^2 = \frac{\beta^2}{1-\beta^2}; \quad \beta^2 = \frac{L^2}{1+L^2}$$

$$L_n^{*2} = \frac{\beta_n^{*2}}{1-\beta_n^{*2}}; \quad \beta_n^{*2} = \frac{L_n^{*2}}{1+L_n^{*2}}; \quad 1-\beta^2 = \frac{1}{1+L^2}; \quad \gamma_n^2 - \beta^2 = \frac{\beta_n^{*2}}{L_n^{*2}} - \beta^2 = \frac{L^2}{L_n^{*2}(1+L^2)}$$

$$\sin \vartheta_n \max = \sqrt{\frac{L_n^{*2}(1+L^2)}{(1+L^2)L^2}} = \frac{L_n^*}{L}$$

4. Соотношение (7.6)

$$K_n(\vartheta_n) = \frac{b(1-\beta^2)}{1-\beta^2 \cos^2 \vartheta_n} \left\{ \gamma_n \cos \vartheta_n \pm \sqrt{1 - \frac{\gamma_n^2 - \beta^2}{1-\beta^2} \sin^2 \vartheta_n} \right\}$$

$$1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta_n = 1 - \frac{L^2}{1+L^2} \cos^2 \vartheta_n = \frac{1+L^2 - L^2 \cos^2 \vartheta_n}{1+L^2} = \frac{1+L^2 \sin^2 \vartheta_n}{1+L^2}; \quad b = L_n^* m_n$$

$$\gamma_n = \frac{\beta}{\beta_n^*} = \sqrt{\frac{L^2(1+L_n^{*2})}{L_n^{*2}(1+L^2)}} = \frac{L}{L_n^*} \sqrt{\frac{1+L_n^{*2}}{1+L^2}}; \quad \sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{\sqrt{1+L^2}}$$

$$\sqrt{1 - \frac{\gamma_n^2 - \beta^2}{1-\beta^2} \sin^2 \vartheta_n} = \sqrt{1 - \frac{L^2}{L_n^{*2}(1+L^2)} \sin^2 \vartheta_n} = \frac{1}{\sqrt{1+L^2}} \sqrt{1+L^2 - \frac{L^2}{L_n^{*2}} \sin^2 \vartheta_n}$$

$$K_n(\vartheta_n) = \frac{m_n}{1+L^2 \sin^2 \vartheta_n} \left\{ L \sqrt{1+L_n^{*2}} \cos \vartheta_n \pm L_n^* \sqrt{1+L^2 - \frac{L^2}{L_n^{*2}} \sin^2 \vartheta_n} \right\}$$

5. Угловое распределение при $\gamma_0 = \beta$ ($m_1 = 0$)

$$\sigma_n(\vartheta_n) = \sigma^*(\vartheta_n^*) \left(\frac{K_n}{b}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\gamma_n^2 - \beta^2}{1-\beta^2} \sin^2 \vartheta_n}} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{K_n}{b}\right)^2 = \frac{1}{4\pi} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \cos^2 \vartheta)^2} (1+\beta \cos \vartheta)^2$$

$$\sigma(\vartheta) = \frac{1}{4\pi} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta \cos \vartheta)^2}$$

$$I. N' = \sqrt{E'^2 - K'^2} = \sqrt{(\Delta - \omega_{от})^2 - K_{от}^2} = \sqrt{\Delta^2 + 2\Delta\omega_{от} + \omega_{от}^2 - K_{от}^2} = \sqrt{\Delta^2 - 2M\omega_{от}}$$

так как $\Delta = M - m_{от}$

2. Выражение (8.1)

$$b = \frac{1}{2N'} \sqrt{\left\{ N'^2 - (m_1 + m_2)^2 \right\} \left\{ N'^2 - (m_1 - m_2)^2 \right\}} = \frac{\Delta^2 - 2m\omega_{от} - m_c^2}{2\sqrt{\Delta^2 - 2M\omega_{от}}}$$

$$\omega_2^{max} = \frac{\Delta^2 - m_c^2}{2M}; \quad K_{от}^2 = 2M\omega_{от} \quad b = \frac{K_{от}^2_{max} - K_{от}^2}{2\sqrt{\Delta^2 - K_{от}^2}}$$

3. Выражение (8.3) и большая полуось

$$\beta = \frac{K}{E} = \frac{K_{от}}{\Delta - \omega_{от}} \cong \frac{K_{от}}{\Delta}$$

$$\alpha = \frac{b}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{b}{\sqrt{1 - \frac{K_{от}^2}{\Delta^2}}} = \frac{b\Delta}{\sqrt{\Delta^2 - K_{от}^2}} = \frac{\Delta}{2} \cdot \frac{K_{от}^2_{max} - K_{от}^2}{(\Delta^2 - K_{от}^2)}$$

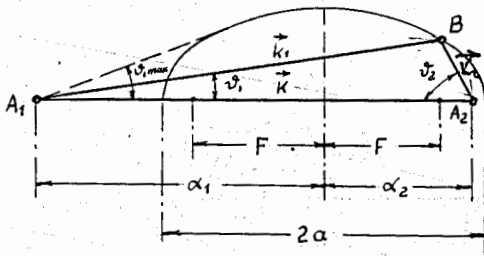


Рис. 1

Геометрическое изображение сохранения энергии-импульса. (1.7) представляет половину меньшей оси эллипса. Эксцентричность равна скорости центра масс системы. \vec{k}_1, \vec{k}_2 являются импульсами частиц в конечном состоянии.

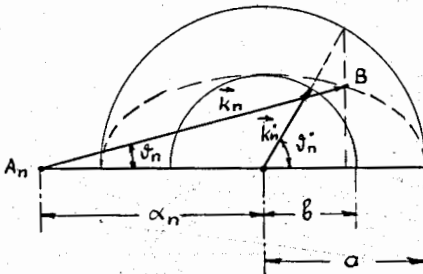


Рис. 3.

Переход из с.ц.и. в лабораторную систему. Величины, относящиеся к с.ц.и. обозначены звездочками. Вектор \vec{k}_n^* с началом в центре эллипсоида имеет длину b и его компонента, перпендикулярная \vec{K} , равна компоненте вектора \vec{k}_n в том же направлении, так как \vec{k}_n^* и \vec{k}_n связаны преобразованием Лоренца с относительной скоростью в направлении \vec{K} .

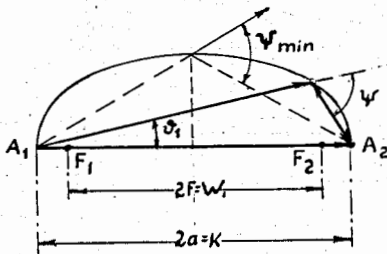


Рис. 4.

Упругое столкновение двух частиц с равными массами. После столкновения скорости всегда образуют острый угол, $\varphi = \vartheta_1 + \vartheta_2$

который больше или равен $\cos \varphi_{\min} = \frac{W_i}{W_i + 4m}$

Расстояние $2f$ между F_1 и F_2 = кинетической энергии W_i падающей частицы и большая ось $2a = K$.

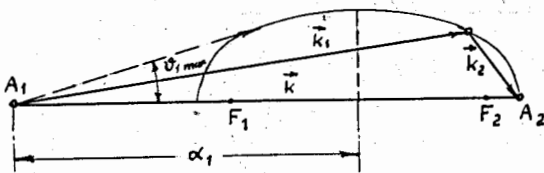


Рис. 5.

Упругое столкновение, в котором падающая частица имеет большую массу, чем частица мишени ($m_1 > m_2$). Максимальный угол отклонения падающей частицы дается $\sin \vartheta_{1, \max} = \frac{m_2}{m_1}$

Например, столкновение мезона с электроном.

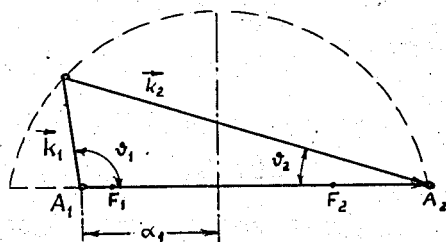


Рис. 6.

Упругое столкновение, в котором падающая частица имеет меньшую массу покоя, чем частица мишени. Например, рассеяние фотонов свободными электронами (в этом случае A_1 совпадает с F_1).

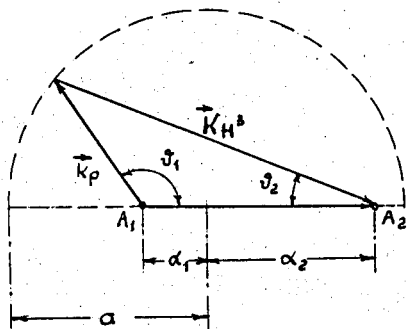


Рис. 7.

Геометрическое изображение экзотермической реакции ${}^2\text{D}(d, p){}^3\text{H}$, ($Q \sim 4 \text{ Mev}$)

для энергии $W_i = 2 \text{ Mev}$ падающего дейтрона $\alpha = 83,5 \text{ Mev}$, $\alpha_1 = 21,75 \text{ Mev}$,
 $\alpha_2 = 3\alpha_1$

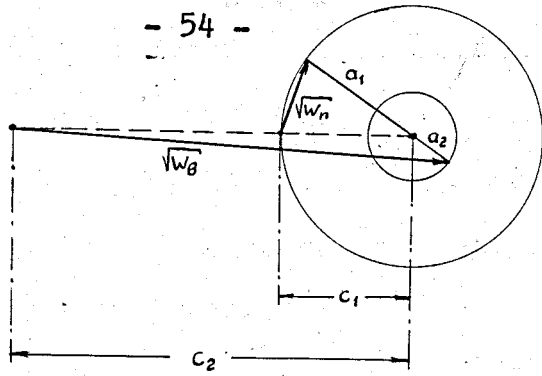


Рис. 8.

Рисунок представляет энергии выходящих частиц в эндотермической реакции

$${}^9\text{Be}(\rho, n){}^9\text{B} (Q = -1,83 \text{ Mev}, \delta = 2,03 \text{ Mev}, a_1 = \frac{9}{10} \sqrt{W_i - 2,03}, \\ a_2 = \frac{1}{3} a_1, c_1 = \frac{1}{10} \sqrt{W_i}, c_2 = 3c_1,$$

для энергии W_i , которая составляет 25 keV выше пороговой, где $a_1 = c_1 = 4,5 \sqrt{\text{keV}}$. W_n и W_B представляют энергии выходящего нейтрона и ядра бора.

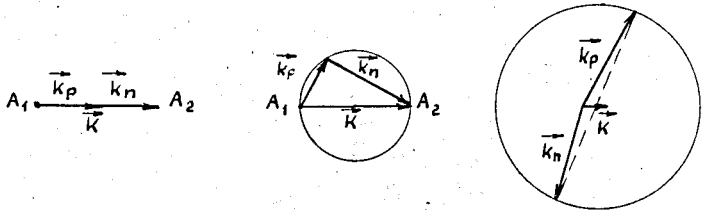


Рис. 9.

Фоторасщепление дейтрона $A, \kappa = \delta, \alpha = 0$

Точно у порога ($I = 3 \text{ keV}$ над энергией связи дейтрона); протон и нейтрон двигаются в первоначальном направлении и каждый имеет энергию $0,65 \text{ keV}$.
 $\delta, \kappa = \delta (1 + \frac{\delta}{2\alpha})$. При энергии $1,3 \text{ keV}$ выше пороговой; направления вылета протонов и нейтронов образуют прямой угол, независимо от их угла с первоначальным направлением S . $\kappa = 2\delta, \gamma = 0,04$ протон и нейтрон движутся в почти противоположных направлениях.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л.Ландау и Е.Лифшиц. Теоретическая физика т. IV, Москва, 1941.
2. G.Watagin Acad.Bras. Ciencias, (1941)
3. C.M.Lattes, G.P.S.Occhialini, F.C.Powell Nature, 160, 453, 486 (1947)
4. C.E.Mandeville Journal of the Franclin Institute 244, 385 (1947)
5. A.Rogozinski Phys.Rev. 65, 300, (1944)
6. L.Leprince Ringuet, S.Gorodetzky, E.Nageotte and R.Richard.Foy
Phys.Rev. 59, 460, (1941)
7. F.C.Champion Proc.Roy.Soc. A 136, 630 (1932)
8. N.N.Das Gupta and S.K.Ghost. Rev.Mod.Phys. 18, 225, (1946)
9. M.L.Wiedenbeck and C.I.Marhoffer Phys.Rev. 67, 54, (1951)
10. I.C.Jacobsen and O.Kofoed-Hansen Det.Kgl.Danske.Vidensk.
Selscab, Mat.fys Medd. 23, N2, 12, (1945)