ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 1928

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р. Вит

О ДОПУСТИМОЙ СКОРОСТИ УБЫВАНИЯ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ ВПЕРЕД ПРИ БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЯХ

1965

P - 1928

Р. Вит x/

О ДОПУСТИМОЙ СКОРОСТИ УБЫВАНИЯ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ ВПЕРЕД ПРИ БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЯХ

Направлено в ЖЭТФ

---

x/ Постоянный адрес: Ягеллонский университет, Краков, Польша.

В последнее время в физике все больше внимания уделяется тому обстоятельству, что в силу унитарности для

$$0 \leq t \leq 4M^2 \tag{1}$$

мнимая часть амплитуды рассеяния является положительной для физических значений энергий [1]. Вместе с аналитичностью это обстоятельство приводит к интересным заключениям относительно поведения амплитуд рассеяния в области высоких энергий [2].

С другой стороны, успешно развивается иное направление, основанное на некоторых теоремах общей теории аналитических функций, связанных с понятием гармонической меры [3], среди которых особую роль играет теорема Фрагмена-Линделефа. Как оказалось, в этом подходе положительность мнимой части амплитуды рассеяния приводит к важным выводам [4]. Наша работа еще раз указывает на содержащиеся здесь возможности.

Недавно Джином и Мартэном [5] был выдвинут вопрос об ограничениях, налагаемых на скорость убывания амплитуды рассеяния вперед вследствие унитарности, аналитичности и перекрестной симметрии. Авторы пришли к заключению, что

$$\overline{\lim_{s \to \infty}}\, s^2 |T(s,0)| (\ln s)^{1/2} = \infty \tag{2}$$

или

$$\overline{\lim_{s \to \infty}}\, |T(s,0)| (\ln s)^{1/2} = \infty , \tag{3}$$

если $T(s,0)$ имеет добавочный нуль.

В настоящей работе будет показано, что результаты (2) и (3), полученные как необходимые условия сходимости некоторых интегралов (о которых из общей теории H -функций Герглоца заранее известно, что они ограничены [6]), не являются наилучшими из возможных.

С этой целью рассмотрим хорошо известную амплитуду рассеяния мезонов $\pi^{\pm}$ на протонах

$$T(z) = \tfrac{1}{2}[T^{+}(z) + T^{-}(z)], \tag{4}$$

для которой формула Коши принимает следующий вид[x/]:

$$T(z) = T(1) + \frac{f^2}{M}\frac{z^2-1}{z^2-\omega_B^2}\frac{1}{1-\omega_B^2} + \frac{2}{\pi}(z^2-1)\int_1^{\infty}\frac{dx\, x\, \operatorname{Im} T(x)}{(x^2-1)(x^2-z^2)}, \tag{5}$$

где $z = \omega + iy$; ω является энергией падающего мезона в ЛСК и пропорциональна инварианту s.

Для $\operatorname{Im} u > 0$, $u = z^2$, как можно убедиться из уравнения (5), $\operatorname{Im} T(u) > 0$, и поэтому $T(u)$ является H -функцией Герглоца. Поведение этих функций таково[6], что при $\delta < \arg u < \pi - \delta$

$$\frac{c}{|u|} \le |T(u)| \le c'|u|. \tag{6}$$

Возможно ли такое поведение $T(\omega)$, при котором

$$\lim_{\omega \to +\infty} \omega^2 T(\omega + i0) = 0. \tag{7}$$

Как мы уже отметили, микропричинность накладывает на рост $T(u)$ следующее ограничение:

$$|T(u)| < A e^{\epsilon |u|^{1/2}}, \quad \operatorname{Im} u > 0. \tag{8}$$

В силу теоремы Фрагмена-Линделефа[3] (дальше ТФЛ) в верхней полуплоскости выполняется тогда (7), т.е.

$$\lim_{|u| \to \infty} u\, T(u) = 0 \quad \text{для} \quad \operatorname{Im} u > 0. \tag{9}$$

---

x/ При выводе этой формулы, кроме перекрестной симметрии и леммы Шварца-Римана, предполагается, что а) $T(\omega + i0)/\omega^2 \underset{\omega \to \infty}{\to} 0$ таким образом, чтобы обеспечить сходимость соответствующих интегралов;

б) для $\operatorname{Im} z > 0$ $|T(z)| < A \exp(\epsilon |z|)$,

что вытекает из условия причинности[7].

Предельное равенство (9) находится в явном противоречии с (8); таким образом, не может выполняться (7)[x/].

По аналогии с предыдущим можно легко доказать ограниченность числа нулей у амплитуды $T(\omega)$, если она полиномиально ограничена при больших энергиях[xx/] /5/.

Некоторые замечания, связанные с существованием нулей у $T(z)$, приведены в Приложении.

III.

Покажем теперь, как можно наши рассуждения применить к доказательству несовместимости условия унитарности и аналитичности в модели Ли (другие доказательства были даны несколько лет тому назад Тер-Мартиросяном /12/).

Напомним, что в этой модели для амплитуды рассеяния имеем следующее уравнение:

$$T(z) = \frac{g^2}{\epsilon_0 - z} + \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{dx\sqrt{x^2-1}}{x-z}\,|T(x)|^2 . \tag{10}$$

В этом уравнении учтено условие унитарности

$$\operatorname{Im} T(\omega + i0) = \sqrt{\omega^2 - 1}\;|T(\omega)|^2 , \quad \omega > 1 , \tag{11}$$

откуда поведение $T(\omega)$ на бесконечности должно иметь вид $\phi(\omega)/\omega$, где $|\phi(\omega)| \le \text{const}$. Из (10) видно, что $T(z)$

а) является H - функцией Герглоца;

б) имеет только один разрез на вещественной оси для $\omega \in (1,\infty)$;

в) удовлетворяет условию вещественности

$$T(z) = T^*(z^*).$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = (z - \epsilon_0)\,T(z),$$

которая обладает всеми перечисленными свойствами и для которой условие унитарности принимает вид

$$\operatorname{Im} \Phi(\omega) = |\Phi(\phi)|^2 \sqrt{\omega^2 - 1}/\omega - \epsilon_0 , \quad \omega \ge 1. \tag{12}$$

---

x/ При предположении о полиномиальном поведении $T(\omega)$ на бесконечности это было доказано в работе /5/.

xx/ По этому поводу см. также работы /8,9,10/.

Если $\Phi(\omega)$ имеет предел на бесконечности[x/], то этот предел должен быть вещественным, поскольку знак $\operatorname{Im}\Phi(\omega+i0)$ противоположен $\operatorname{Im}\Phi(\omega-i0)$ при $\omega>1$.

Поэтому из (12) получаем

$$\lim_{\omega\to\infty}\Phi(\omega+i0)=0. \tag{13}$$

Но даже если $\Phi(\omega)$ не имеет предела на бесконечности, мы можем доказать (13). Для H -функции Герглоца, у которой $\operatorname{Im}H(\omega)=0$ при $\omega\le\omega_0$, должен сходится один из следующих интегралов[/12/]:

$$\int^{\infty}\frac{\operatorname{Im}H(\omega)}{\omega}\,d\omega\ ,\quad \int^{\infty}\frac{\operatorname{Im}H(\omega)}{|H(\omega)|^2}\,\frac{d\omega}{\omega}\ .$$

В случае $\Phi(\omega)$ второй интеграл расходится вследствие (12). Поэтому мы должны потребовать, чтобы

$$\lim_{\omega\to\infty}\Phi(\omega)(\ln\omega)^{1/2}=0. \tag{14}$$

Равенства (13) и (14) сводятся к следующему:

$$\lim_{\omega\to\infty}\omega\,T(\omega+i0)=0,$$

что, как было показано раньше, не может иметь места; это является доказательством несовместимости условия унитарности и аналитичности в модели Ли (без формфакторов).

IV.

Так как полиномиальная ограниченность снизу играет существенную роль при доказательстве[/13/]

$$\sigma_{e\ell}(\ln\omega)^2>\mathrm{const}(\sigma_{tot})^2\ , \tag{15}$$

неравенство (15) можем считать еще одним результатом, полученным из теории гармонической меры.

[x/] Для этого достаточно в силу двухчастичной унитарности существования предела только у мнимой или вещественной части $T(\omega)$.

Как видно из наших рассуждений, в некоторых случаях ТФЛ, кроме упрощений в ходе доказательств, вносит еще существенные улучшения в полученные результаты.

Благодарю И.Т. Тодорова и Нгуен Ван Хьеу за полезную дискуссию, а также Б. Словинского, внимательно прочитавшего рукопись этой работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Наша функция Герглоца $T(u)$ при $u \in (-\infty, \omega_B^2)$ является вещественной и имеет положительную производную, поэтому нуль у $T(u)$ на указанной полуоси появится только тогда, когда

$$\lim_{u \to -\infty} T(u) = M < 0$$

или

$$\lim_{u \to -\infty} T(u) = -\infty ,$$

поскольку вблизи полюса для рассматриваемых u она положительна. Если

$$\lim_{u \to \infty} T(u) = 0 ,$$

то из ТФЛ получаем

$$\lim_{u \to -\infty} T(u) = 0 ,$$

вследствие чего на вещественной оси $T(u)$ не имеет нулей. Следовательно, можно и в другом, проанализированном Джином и Мартэном случае наложить более сильные ограничения на скорость убывания $T(\omega)$.

Литература

1. A.Martin. Lecture on the Scotisch Summer School of Theoretical Physics, Edinburgh, Scotland, 1963.
2. T.Kinoshita. Restriction Imposed by Unitarity and Analyticity on the Behaviour of Scattering Amplitude at High Energy, LNS- Cornell University, Ithaca, New York, 1964.
3. Н.Н. Мейман. ЖЭТФ, 43, 2277 (1962).
4. A.A.Logunov, Nguyen van Hieu, I.T.Todorov. Preprint, E-1520, Dubna, 1964 (to be published in Annals of Phys.).
5. Y.S.Jin and A.Martin. Phys. Rev., 135, B1369 (1964).

6. J.A.Shoat and J.D.Tamarkin. The Problem of Moments (American Mathmatical Society). New York, 1943.
7. Н.Н. Мейман. Препринт ИТЭФ № 252, Москва, 1964; ЖЭТФ, 46 , 1502 (1964).
8. А.А. Ансельм, В.Н. Грибов, Т.С. Данилов, И.Т. Дятлов, В.Н. Шехтер. ЖЭТФ, 41, 619 (1961).
9. S.Aramaki. Prog. Theor. Phys., 28, 479 (1962).
10. J.Namysłowski, R.Wit. Acta Phys. Pol., 23, 197 (1963).
11. К.А. Тер-Мартиросян. ЖЭТФ, 37 , 1005 (1959).
12. S.Weinberg. Phys. Rev., 124, 2049 (1961).
13. A.Martin. Nuovo Cim., 29, 993 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел
28 декабря 1964 г.