

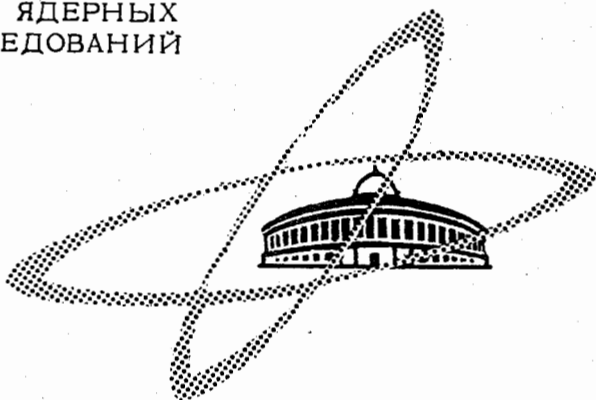
1971/46.2a
CP-223

7.8V

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P-1911



ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р.Н. Фаустов

СТРУКТУРА ПРОТОНА
И СВЕРХТОНОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ
УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ ВОДОРОДА

*Исл. Phys., 1966, v 45,
#3, p 669-681.*

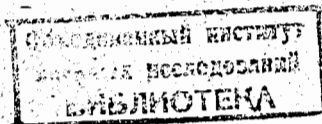
1964

P-1911

Р.Н. Фаустов

СТРУКТУРА ПРОТОНА
И СВЕРХТОНКОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ
УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ ВОДОРОДА

Направлено в Nuclear Physics



2876/2 48

1. Введение

В настоящее время величина сверхтонкого расщепления основного уровня энергии водорода измерена с очень высокой точностью^{/1/}. Много работ^{/3-7/} было посвящено теоретическому вычислению поправок к хорошо известной формуле Ферми^{/2/}. Однако до сих пор остается существенная неопределенность в той части поправок, которая связана с конечностью массы и структурой протона. Основные трудности возникают здесь из-за того, что протон в отличие от электрона не является точечной дираковской частицей, так как вследствие сильных взаимодействий обладает большим аномальным магнитным моментом. Учет аномального магнитного момента обычно производится феноменологически с помощью добавления к обычной дираковской вершине $e\gamma_{\mu\nu}$ взаимодействия Паули $i(g/2M)\sigma_{\mu\nu}k^{\nu}$. При этом, однако, уже вторая итерация этого взаимодействия (двухфотонный обмен между электроном и протоном) дает логарифмически расходящийся результат. Чтобы избежать этого, в работах^{/3,5/} вводилось обрезание, что, конечно, не является последовательным. Впервые на возможность использования форм-факторов при вычислении поправок, связанных со структурой протона, указал Земех^{/5/}. В его работе, в частности, было проведено нерелятивистское вычисление вклада электромагнитных форм-факторов протона в сверхтонкое расщепление.

В работе^{/6/} при вычислении вклада двухфотонного обмена были использованы модельные форм-факторы, убывающие как $1/k^4$. При этом, однако, не был учтен вклад форм-факторов в однофотонный обмен.

Имеющиеся в настоящее время экспериментальные данные^{/8/} вплоть до $k^2 = 175 \text{ f}^{-2}$ показывают, что форм-факторы убывают примерно как $1/k^2$.

Простейшей функцией такого вида, нормированной в нуле на 1, является

$$f(k_{\lambda}^2) = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 - k_{\lambda}^2}, \quad k_{\lambda}^2 = k_0^2 - k^2. \quad (1.1)$$

В настоящей работе мы примем, что взаимодействие электромагнитного поля с протоном описывается эффективной вершиной вида

$$-\Gamma_{\mu}(k_{\lambda}^2) = e\gamma_{\mu} + ig \frac{e}{2M} \sigma_{\mu\nu} k^{\nu} f(k_{\lambda}^2), \quad (1.2)$$

где $g = 1,79$ - аномальный магнитный момент протона, M - масса протона.

Для вычисления поправок к формуле Ферми, связанных со структурой и конечностью массы протона, мы используем квазипотенциальное уравнение, полученное в

работе А.А. Логунова и А.Н. Тавхелидзе /8/. Это уравнение имеет ряд преимуществ по сравнению с уравнением Бете-Солпитера, которое обычно использовалось для такого рода вычислений. Квазипотенциальное уравнение является трехмерным, оно максимально близко к обычному уравнению Шредингера, что сильно облегчает построение волновых функций. Кроме того, ядро этого уравнения - квазипотенциал - удается определить в терминах элементов S-матрицы на массовой поверхности /9,10/. Этот метод был использован для вычисления уровней энергии позитрония /11/. Перенормировка квазипотенциального уравнения рассмотрена в работе /12/.

2. Построение квазипотенциального уравнения для системы двух фермионов

Рассмотрим процесс рассеяния двух частиц в с.ц.м. вне массовой поверхности

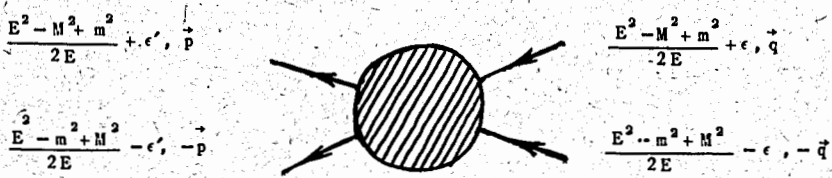


Рис. 1.

Здесь E^2 - квадрат полной энергии в с.ц.м., m и M массы частиц.

Обозначим через $G(\vec{p}, \vec{q}, \epsilon, \epsilon', E)$ четырехвременную функцию Грина двух частиц. Тогда двухвременная функция Грина \overline{G} определяется с помощью соотношения /8/

$$\overline{G}(\vec{p}, \vec{q}, E) = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon d\epsilon' G(\vec{p}, \vec{q}, \epsilon, \epsilon', E) \quad (2.1)$$

(знак \overline{G} будет в дальнейшем означать интеграцию по относительным энергиям).

Вместо функции Грина G удобно формально ввести амплитуду рассеяния двух частиц вне массовой поверхности

$$-i G_0 T G_0 = G - G_0, \quad (2.2)$$

где

$$G_0(\vec{p}, \vec{q}, \epsilon, \epsilon', E) = S_1(\vec{p}, \epsilon, E) S_2(\vec{q}, \epsilon', E) \delta(\vec{p} - \vec{q}) \delta(\epsilon - \epsilon'), \quad (2.2a)$$

а $S_{1,2}$ - полные одночастичные функции Грина. В результате \bar{T} уже не содержит соответствующих одночастичных особенностей.

Аналогичную величину можно определить на основе двухвременной функции Грина \bar{G}_0 :

$$-i \bar{G}_0 \bar{T} \bar{G}_0 = \bar{G} - \bar{G}_0 \quad (2.3)$$

Амплитуды \bar{T} и \bar{T} на основании (2.2) и (2.3) связаны соотношением

$$\bar{T} = \bar{G}_0^{-1} \bar{G}_0 \bar{T} \bar{G}_0 \bar{G}_0^{-1} \quad (2.4)$$

Из равенства (2.4) следует, что на энергетической поверхности ($p^2 = q^2$, $E^2 = (\sqrt{p^2 + m^2} + \sqrt{p^2 + M^2})^2$) функция \bar{T} совпадает с функцией \bar{T} на массовой поверхности ($p^2 = q^2$, $\epsilon = \epsilon' = 0$, $E^2 = (\sqrt{p^2 + m^2} + \sqrt{p^2 + M^2})^2$) и дает, таким образом, физическую амплитуду рассеяния.

В работе А.А. Логунова и А.Н. Тавхелидзе^{/9/} было выведено квазипотенциальное уравнение для амплитуды рассеяния \bar{T}

$$\bar{T}(p, q, E) = V(p, q, E) + \frac{1}{(2\pi)^3} \int V(p, k, E) F(k) \bar{T}(k, q, E) dk \quad (2.5)$$

или символически $\bar{T} = V + V F \bar{T}$,

где $F = -2\pi i \bar{G}_0$,

$$i V = \bar{G}_0^{-1} - \bar{G}_0^{-1} \quad (2.5a)$$

С другой стороны, из уравнения (2.5) можно получить формальное выражение для квазипотенциала V , полностью эквивалентное (2.5a),

$$V = \bar{T} (1 + F \bar{T})^{-1} \quad (2.6)$$

или в более симметричном виде

$$F V = F \bar{T} (1 + F \bar{T})^{-1}$$

Из равенства (2.5a) и (2.6) видно, что квазипотенциал V выражается через F^{-1} , т.е. необходимо, чтобы $\det F \neq 0$. При использовании полных одночастичных функций Грина это условие соблюдается. Однако в нижнем приближении, когда в качестве $S_{1,2}$ используются "голые" пропагаторы фермионов, для F получается выражение

$$F_0(k) = \left[\frac{\Lambda_+^{(1)} \Lambda_+^{(2)}}{E - \epsilon_m - \epsilon_M} - \frac{\Lambda_-^{(1)} \Lambda_-^{(2)}}{E + \epsilon_m + \epsilon_M} \right] \gamma_0^{(1)} \gamma_0^{(2)} \quad (2.7)$$

где

$$\Lambda_{\pm}^{(1)} = \frac{\epsilon_m \pm (\alpha^{(1)2} k^2 + \gamma_0^{(1)2} M)}{2 \epsilon_m}; \quad \Lambda_{\pm}^{(2)} = \frac{\epsilon_M \pm (\alpha^{(2)2} k^2 + \gamma_0^{(2)2} M)}{2 \epsilon_M}$$

$$\epsilon_m = \sqrt{k^2 + m^2}, \quad \epsilon_M = \sqrt{k^2 + M^2}$$

и, как нетрудно убедиться, $\det F_0 = 0$.

Это является, вообще говоря, следствием того, что мы перешли к трехмерному евклидову пространству импульсов, сохранив четырехкомпонентные величины четырехмерного пространства Лоренца. Поэтому естественно перейти также и к двухкомпонентным величинам трехмерного евклидова пространства.

Волновая функция системы двух фермионов связана с амплитудой рассеяния \bar{T} соотношением:

$$\psi(\vec{p}) = \delta(\vec{p} - \vec{q}) u_1(\vec{q}) u_2(-\vec{q}) + \frac{1}{(2\pi)^3} F(p) \bar{T}(\vec{p}, \vec{q}) u_1(\vec{q}) u_2(-\vec{q}), \quad (2.8)$$

где $E^2 = (\sqrt{q^2 + m^2} + \sqrt{q^2 + M^2})^2$, $u_i u_i = 1$,

а $u_{1,2}$ — здесь и в дальнейшем — четырехкомпонентные спиноры для состояний с положительной энергией (поляризационные и спинорные индексы опущены).

Используя определение (2.8) и уравнение (2.5) для \bar{T} , получим для ψ следующее уравнение

$$\psi(\vec{p}) = \delta(\vec{p} - \vec{q}) u_1(\vec{q}) u_2(-\vec{q}) + \frac{1}{(2\pi)^3} F(p) \int V(\vec{p}, \vec{k}) \psi(\vec{k}) d\vec{k}. \quad (2.9)$$

Двухкомпонентную величину, которая нас интересует, можно получить, спроектировав ψ на состояния с положительной энергией (поляризационные индексы спиноров $u_{1,2}$ принимают два значения)

$$\psi_+(\vec{p}) = u_1(\vec{p}) u_2(-\vec{p}) \psi(\vec{p}) = \delta(\vec{p} - \vec{q}) + \frac{1}{(2\pi)^3} t(\vec{p}, \vec{q}). \quad (2.10)$$

Здесь для краткости мы ввели обозначение

$$t(\vec{p}, \vec{q}) = u_1(\vec{p}) u_2(-\vec{p}) F(p) \bar{T}(\vec{p}, \vec{q}) u_1(\vec{q}) u_2(-\vec{q}). \quad (2.11)$$

Построим теперь величину типа квазипотенциала V с помощью равенства аналогичного (2.8а)

$$v = t(1+t)^{-1}. \quad (2.12)$$

При этом функция t удовлетворяет уравнению

$$t = v + vt.$$

Тогда, используя определение (2.10), получим отсюда уравнение для ψ_+

$$\psi_+(\vec{p}) = \delta(\vec{p} - \vec{q}) + \frac{1}{(2\pi)^3} \int v(\vec{p}, \vec{q}) \psi_+(\vec{q}) d\vec{q}. \quad (2.13)$$

Теперь в качестве функции $F(p)$ уже можно использовать в нижнем приближении функцию $F_0(p)$, определенную в (2.7). Подставляя (2.7) в (2.11) и учитывая уравнения для спиноров, получим

$$t(\vec{p}, \vec{q}) = F_+(\vec{p}) T_+(\vec{p}, \vec{q}), \quad (2.14)$$

где

$$T_+(\vec{p}, \vec{q}) = \bar{u}_1(\vec{p}) \bar{u}_2(-\vec{p}) T(\vec{p}, \vec{q}) u_1(\vec{q}) u_2(-\vec{q}) \quad (2.14a)$$

$$F_+(p) = \frac{1}{E - \sqrt{p^2 + m^2} - \sqrt{p^2 + M^2}} \quad (2.14b)$$

Кроме того, удобно ввести величину

$$\hat{V} = F_+^{-1} v, \quad (2.15)$$

которая на основании (2.12) и (2.14) имеет представление:

$$\hat{V} = T_+(1 + F_+ T_+)^{-1}. \quad (2.16)$$

Уравнение (2.13) для ψ_+ тогда принимает вид:

$$\psi_+(\vec{p}) = \delta(\vec{p} - \vec{q}) + \frac{1}{(2\pi)^3} F_+(p) \int V(\vec{p}, \vec{k}) \psi_+(\vec{k}) d\vec{k}. \quad (2.17)$$

В случае задачи о связанном состоянии член с δ -функцией отсутствует и, подставляя выражение (2.14a) для F_+ , мы получаем уравнение

$$(E - \sqrt{p^2 + m^2} - \sqrt{p^2 + M^2}) \psi_+(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{V}(\vec{p}, \vec{k}) \psi_+(\vec{k}) d\vec{k}, \quad (2.18)$$

где \hat{V} определено с помощью равенства (2.16). Величины ψ_+ и \hat{V} имеют спинорные индексы, каждый из которых может принимать два значения.

В нерелятивистском пределе $p^2 \ll m^2, M^2$ уравнение (2.13) переходит в обычное уравнение Шредингера

$$(W - \frac{p^2}{2\mu}) \psi(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int V(\vec{p}, \vec{k}) \psi(\vec{k}) d\vec{k}, \quad (2.19)$$

где $W = E - M - m$,

а $\mu = \frac{mM}{m+M}$ - приведенная масс.

В работах А.А.Логунова и А.Н.Тавхелидзе /8,10/ был также предложен другой метод построения квазипотенциала. Если ограничиться задачей получения правильной физической амплитуды рассеяния, то квазипотенциал можно определить по теории возмущений на основе элементов S -матрицы на массовой поверхности. Хорошо известно, что амплитуда рассеяния на массовой поверхности описывает не только процесс рассеяния, но и связанные состояния системы - полюса в нефизической области энергии. Поэтому, как показано в /13/, оба метода построения квазипотенциала дают одинаковые результаты при вычислении энергетических уровней системы. Однако второй метод в этом случае обладает некоторыми преимуществами, так как оперирует с величинами на массовой поверхности и, следовательно, допускает использование свойств аналитичности и унитарности.

Ввиду вышесказанного мы в дальнейшем будем строить квазипотенциал с помощью элементов S -матрицы на массовой поверхности. Элементы S -матрицы и T -матрицы связаны обычным соотношением

$$\langle f | S | i \rangle = -1 - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \langle f | T | i \rangle.$$

Мы будем считать, что квазипотенциал по-прежнему задан с помощью равенства (2.16). Однако теперь мы определим:

$$T_+(\vec{p}, \vec{q}) = \langle \vec{p} | T | \vec{q} \rangle. \quad (2.20)$$

Выход за энергетическую поверхность мы зададим тем, что положим $p^2 \neq q^2$. Представим T_+ и \hat{V} в виде разложений по теории возмущений (в дальнейшем мы будем опускать дополнительные значки у T , V и F)

$$\begin{aligned} T &= T^{(2)} + T^{(4)} + \dots \\ V &= V^{(2)} + V^{(4)} + \dots \end{aligned} \quad (2.21)$$

Тогда на основании (2.16) мы получим:

$$\begin{aligned} V^{(2)} &= T^{(2)} \\ V^{(4)} &= T^{(4)} - T^{(2)} F T^{(2)} \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.22)$$

В равенстве (2.21) разложение произведено по постоянной тонкой структуре. Нас будут интересовать поправки к формуле Ферми относительного порядка $\sim a(m/M)$. В этом приближении достаточно ограничиться диаграммами до четвертого порядка (по заряду электрона) включительно:

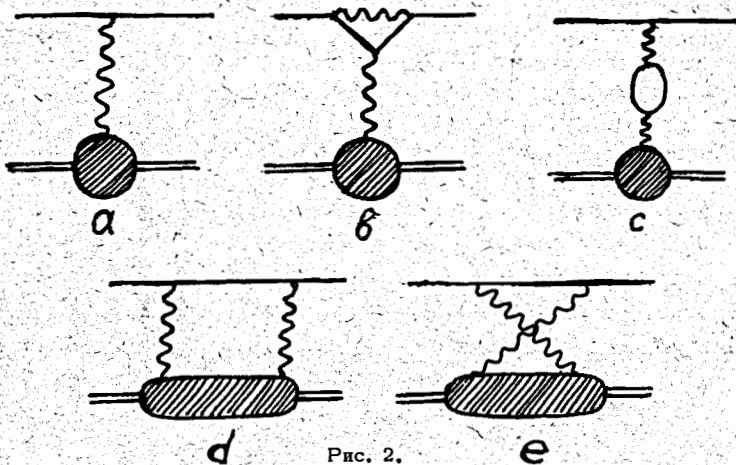


Рис. 2.

Сильные взаимодействия при этом приходится учитывать феноменологически с помощью введения форм-фактора протона в диаграммы однофотонного обмена а, б и с (рис.2) и амплитуды виртуального комптон-эффекта на протоне в диаграммы двухфотонного обмена d и e (рис. 2). Если для форм-фактора протона имеются экспериментальные данные /8/ и некоторые модельные представления /14/ (см. введение), то об амплитуде виртуального комптон-эффекта на протоне известно очень мало. Мы примем поэтому, что диаграммы двухфотонного обмена сводятся к итерации двух диаграмм однофотонного обмена.

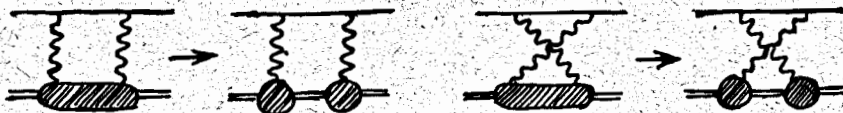


Рис. 3.

В пользу этого предположения можно привести некоторые нестрогие соображения. Энергия связанного состояния электрона и протона мало отличается от суммы их масс ($m+M$), поэтому в диаграмме d наибольший вклад должно давать двухчастичное промежуточное состояние — электрон+протон, что и соответствует диаграммам рис. 3. Следующее промежуточное состояние включает по крайней мере один π -мезон, и соответствующий разрез начинается дальше. Необходимо также отметить, что хотя мы свели диаграмму двухфотонного обмена к итерации однофотонных диаграмм, заштрихованные протонные вершины в диаграммах рис. 3, вообще говоря, не сводятся к обычным форм-факторам протона, так как одна из протонных линий является при этом виртуальной. Мы однако в дальнейшем будем пренебрегать этим обстоятельством и считать, что электромагнитная вершина протона задана равенством (1.2). Вычисление сверхтонкой структуры основного уровня энергии водорода мы будем производить по теории возмущений на основе уравнения (2.18) для волновой функции системы электрон+протон. Квазипотенциал V определен равенствами (2.21), (2.22). При этом за исходное приближение естественно взять кулоновский потенциал. Представляя часть квазипотенциала, соответствующую диаграмме a (рис. 2) в виде

$$V^{(2)} = V_a = U + \Delta V^{(2)}, \quad (2.23)$$

где U — кулоновский потенциал, получим для квазипотенциала выражение

$$V = U + \Delta V^{(2)} + V^{(4)}.$$

Поскольку величина $\Delta V^{(2)}$ имеет первый порядок малости ($\approx a$), а $V^{(4)}$ — второй порядок малости ($\approx a^2$), то необходимо учитывать член второго порядка теории возмущений. Таким образом с нужной точностью поправку к кулоновским уровням энергии можно символически записать в виде:

$$\Delta E = \langle\langle \Delta V^{(2)} \rangle\rangle + \langle\langle V^{(4)} \rangle\rangle + \langle\langle \Delta V^{(2)} F \Delta V^{(2)} \rangle\rangle, \quad (2.24)$$

где величина F определена в (2.146), а символ $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ означает матричный элемент по волновым функциям уравнения (2.18) с кулоновским потенциалом U .

3. Сверхтонкая структура основного уровня энергии водорода

Потенциал $V^{(2)}$ согласно (2.21) дается диаграммой а рис. 2 на массовой поверхности. Используя обычные фейнмановские правила, получим:

$$V(\vec{p}, \vec{q}) = -e^2 \frac{[\bar{u}_1^+(\vec{p}) \gamma_1^\mu u_1^-(\vec{q})] [\bar{u}_2^+(-\vec{p}) \Gamma_\mu u_2^-(\vec{q})]}{(\vec{p} - \vec{q})^2 + (\sqrt{p^2 + m^2} - \sqrt{q^2 + m^2})(\sqrt{p^2 + M^2} - \sqrt{q^2 + M^2})}. \quad (3.1)$$

Обозначения соответствуют принятым в книге Н.Н.Боголюбова и Д.В.Ширкова^{15/}. Скалярное произведение определено как

$$a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Подставляя в (3.1) выражение (1.2) для Γ_μ и представляя четырехкомпонентные спиноры u в двухкомпонентной форме, получим для $V^{(2)}$ выражение:

$$V(\vec{p}, \vec{q}) = -\frac{e^2}{k^2} + e^2 \left\{ \frac{1}{8\mu^2} - \frac{p^2 + q^2}{2mMk^2} + \frac{(p^2 - q^2)^2}{4mMk^4} - \right. \\ \left. - i \frac{(\vec{p} \times \vec{q})}{k^2} \left[\vec{\sigma}_1 \left(\frac{1}{4\mu^2} - \frac{1}{4M^2} \right) + \vec{\sigma}_2 \left(\frac{1}{2mM} + \frac{1}{4M^2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{(1 + g f(k^2))}{4mM} \left[(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) - \frac{(\vec{k} \vec{\sigma}_1)(\vec{k} \vec{\sigma}_2)}{k^2} \right] + \frac{g}{2M} f(k^2) \left[\frac{1}{2M} - i \frac{(\vec{p} \times \vec{q})}{\mu k^2} \cdot \vec{\sigma}_2 \right] \right\}, \quad (3.2)$$

где $\mu = \frac{mM}{m+M}$ — приведенная масса, $\vec{k} = \vec{p} - \vec{q}$.

При получении выражения (3.2), мы, кроме того, произвели нерелятивистское разложение по (p^2/m^2) и (p^2/M^2) , поскольку в случае кулоновских уровней энергии, очевидно,

$$p^2 = |m W_n| = m^2 \alpha^2.$$

Оставляя в (3.2) члены нулевого и первого порядка по (m/M) , перепишем выражение для $V^{(2)}$ в виде:

$$V^{(2)} = U + \Delta V_{fs} + \Delta V_M + \Delta V_{hfs}^{(2)}, \quad (3.3)$$

где $U(\vec{p}, \vec{q}) = -\frac{e^2}{(\vec{p} - \vec{q})^2}$ — кулоновский потенциал

$$\Delta V_{fs}(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{e^2}{8\mu^2} \left[-1 - 2i \frac{(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{\sigma}_1}{k^2} \right],$$

$$\Delta V_M(\vec{p}, \vec{q}) = -\frac{e^2}{4mMk^2} \left[\frac{(p^2 - q^2)^2}{k^2} - 2(p^2 + q^2) \right],$$

$$\Delta V_{hfs}^{(2)}(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{e^2(1 + g f(k^2))}{4mM} \left\{ \left[(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) - \frac{(\vec{k} \vec{\sigma}_1)(\vec{k} \vec{\sigma}_2)}{k^2} \right] - 2i \frac{(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{\sigma}_2}{k^2} \right\}.$$

Член ΔV_{fs} вместе с релятивистской поправкой к кинетической энергии дает тонкую структуру уровней энергии водорода. Часть потенциала ΔV_M вместе с поправкой на движение протона к кинетической энергии приводит к сдвигу уровней энергии, зависящему лишь от главного квантового числа n [2].

$$\Delta E_M = \langle \langle \Delta V_M + \frac{3p}{8m^2 M} \delta(\vec{p} - \vec{q}) \rangle \rangle = -\frac{m^2}{4M} \frac{\alpha^4}{n^4}.$$

Слагаемое ΔV_{hfs} дает интересующее нас сверхтонкое расщепление уровней энергии.

Для S-состояний сдвиг уровней, приводящий к сверхтонкому расщеплению, равен:

$$\begin{aligned} \Delta E_{hfs} &= \langle \langle \Delta V_{hfs} \rangle \rangle = \\ &= \frac{e^2}{4mM} \frac{2}{3} \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi_0^*(\vec{p}) [1 + g f(k^2)] \psi_0(\vec{q}) d\vec{p} d\vec{q} = \\ &= \frac{2\pi\alpha}{3mM} [1 + g(1 + \frac{2\alpha m}{\kappa})] |\psi_0^r(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle = \\ &= \frac{2\pi\alpha(1+g)}{3mM} [1 - \frac{4\alpha m g}{\kappa(1+g)}] |\psi_0^r(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\psi_0^r(\vec{p})$ — кулоновские волновые функции в импульсном пространстве,

$$|\psi_0^r(0)|^2 = \frac{\mu^3 \alpha^3}{\pi n^3}$$

— квадрат модуля волновой функции в r -пространстве при $r=0$, символ $\langle \dots \rangle$ означает матричный элемент по собственным функциям оператора квадрата полного спина, а для $f(k^2)$ использовано выражение (1.1) при $k_0=0$. При этом мы полагаем, что $\kappa = M$ (см. раздел 4). Вклад диаграммы в рис. 2 сводится, как нетрудно видеть, к учету аномального магнитного момента электрона. Таким образом, используя (3.4), получим для суммарного вклада от диаграмм а и б рис. 2 выражение

$$\Delta E_{hfs}^{(2)} + \Delta E_{hfs}^{(b)} = -\frac{2\pi\alpha}{3mM} (1+g) (1 + \frac{\alpha}{2\pi}) [1 - \frac{4\alpha m g}{\kappa(1+g)}] |\psi_0^r(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle. \quad (3.5)$$

Диаграмма с рис. 2 в нашем приближении не дает вклада в сверхтонкое расщепление уровней, поскольку в соответствии с замечанием после формулы (3.2) нам достаточно использовать $V^{(c)}(\vec{p}, \vec{q})$ при $p=q=0$.

Перейдем теперь к диаграммам двухфотонного обмена (см. рис. 3), где протонная вершина по-прежнему определена равенством (1.2). Согласно (1.24) соответствующая поправка к уровням энергии имеет вид:

$$\Delta E^{(4)} = \langle\langle V^{(4)} \rangle\rangle + \langle\langle \Delta V^{(2)} \cdot F \Delta V^{(2)} \rangle\rangle.$$

Подставляя сюда выражение (2.22) для $V^{(4)}$ и (2.23) для $V^{(2)}$, получим

$$\Delta E^{(4)} = \langle\langle T^{(4)} \rangle\rangle - \langle\langle \bar{C} F \Delta V^{(2)} \rangle\rangle - \langle\langle \Delta V^{(2)} F \bar{C} \rangle\rangle - \langle\langle \bar{C} F \bar{C} \rangle\rangle = \langle\langle R \rangle\rangle. \quad (3.6)$$

Аналогично предыдущему при вычислении (3.6) можно пренебречь зависимостью $R(\vec{p}, \vec{q})$ от \vec{p} и \vec{q} и считать, что спиноры $u_{1,2}$ имеют лишь верхние "большие" компоненты.

Таким образом,

$$\Delta E^{(4)} = \langle R(0,0) \rangle |\psi_0^r(0)|^2. \quad (3.7)$$

Рассмотрим сначала часть R , которая получается, если в протонной вершине (1.2) взять только первое слагаемое $e\gamma_\mu$. Это соответствует случаю точечной дираковской частицы. В частности, приведенный ниже результат справедлив для связанного состояния систем электрон плюс μ -мезон (мюоний) и электрон плюс позитрон (позитроний).

Применяя обычные фейнмановские правила для диаграмм рис. 3 и выделяя часть, пропорциональную $(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)$, получим на основании (3.6) и (3.7)

$$\Delta E_D^{(4)} = \frac{8\alpha^2}{\pi} |\psi_0^r(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle [I_D(m, M) + I_D(m, -M) - \frac{\pi}{3mM} \int_0^\infty \frac{dk}{[k^2/2\mu - W_n]}], \quad (3.8)$$

где

$$I_D(m, M) = i \int_0^\infty k^2 dk \int_{-\infty}^\infty dk_0 \frac{k_0^2 - \frac{2}{3}k^2}{(k_0^2 - k^2)^2 [(m+k_0)^2 - k^2 - m^2] [(M-k_0)^2 - k^2 - M^2]}$$

W_n - кулоновские уровни энергии.

Производя несложные вычисления, имеем окончательно для дираковской поправки, $\Delta E_D^{(4)}$ выражение:

$$\Delta E_D^{(4)} = -\frac{2\alpha^2}{M^2 - m^2} |\psi_0^r(0)|^2 \ln \frac{M}{m} \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle. \quad (3.10)$$

Инфракрасные расходимости при этом компенсируются $/3,4/$.

Перейдем теперь в R к слагаемым, содержащим аномальный магнитный момент g протона (второй член в выражении (1.2) для протонной вершины). При этом оказывается, что слагаемые линейные по g взаимно уничтожаются в сумме двух диаграмм рис. 3. Поправка к уровням энергии, пропорциональная g^2 , имеет вид:

$$\Delta E_P^{(4)} = \frac{8\alpha^2}{\pi} \left(\frac{g}{2M}\right)^2 |\psi_0^r(0)|^2 [I_P(m, M) + I_P(m, -M)] \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle, \quad (3.11)$$

где

$$I_P(m, M) = i \int_0^\infty k^2 dk \int_{-\infty}^\infty dk_0 \frac{[(k_0^2 - k^2)^2 + \frac{1}{2}k^2(k_0^2 - k^2) - \frac{2}{3}Mk_0 k^2] (k_0^2 - k^2) dk_0}{(k_0^2 - k^2)^2 [(m+k_0)^2 - k^2 - m^2] [(M-k_0)^2 - k^2 - M^2]}.$$

Вычисляя интеграл в (3.11) и оставляя лишь члены первого порядка по (m/κ) и (m/M) , получим для поправки, связанной со взаимодействием Паули, следующее выражение:

$$\Delta E_P^{(4)} = \frac{a^2 g^2}{2M^2} |\psi_0^r(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{\kappa}{m} - \frac{4\kappa}{\sqrt{4M^2 - \kappa^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{4M^2 - \kappa^2}}{\kappa} \right] \quad (3.12)$$

$\kappa < 2M$

При $(\kappa/M) \rightarrow \infty$, что соответствует $f(k^2) \rightarrow 1$, мы имеем для $\Delta E_P^{(4)}$ вместо выражения (3.12) выражение

$$\Delta E_P^{(4)} = \frac{3a^2 g^2}{2M^2} |\psi_0^r(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \ln \frac{\kappa}{M},$$

близкое к результатам работ^{/3,4/}. Однако, вообще говоря, это приближение неверно, так как из эксперимента следует, что $(\kappa/M) = 1$.

Собирая вместе равенства (3.5), (3.10) и (3.12), получим окончательную поправку к S -уровням энергии, приводящую к сверхтонкому расщеплению, включая члены порядка $a^5 (m/M)^2$.

$$\Delta E_{hfs} = \Delta E_{hfs}^{(2)} + \Delta E_{hfs}^{(b)} + \Delta E_D^{(4)} + \Delta E_P^{(4)} = \Delta E_F (1 - \delta), \quad (3.13)$$

где

$$\Delta E_F = \frac{2a\pi}{3mM} (1+g) \left(1 + \frac{a}{2\pi}\right) |\psi_0^r(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle,$$

$$\delta = \frac{4amg}{\kappa(1+g)} + \frac{3am}{4\pi M(1+g)} \left[(4-g^2) \ln \frac{M}{m} - \frac{g^2}{4} - g^2 \ln \frac{\kappa}{M} + \frac{4g^2\kappa}{\sqrt{4M^2 - \kappa^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{4M^2 - \kappa^2}}{\kappa} \right], \quad \kappa < 2M.$$

Если $\kappa > 2M$, то необходимо произвести замену

$$\frac{1}{\sqrt{4M^2 - \kappa^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{4M^2 - \kappa^2}}{\kappa} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 - 4M^2}} \ln \frac{\sqrt{\kappa^2 - 4M^2} + \kappa}{2M}.$$

Вычислены также поправки к ΔE относительного порядка a^2 и a^3 /2,16/. С учетом этих поправок равенство (3.13) принимает вид:

$$\Delta E_{hfs} = \Delta E_F (1 - \delta) (1 - \epsilon_1 - \epsilon_2), \quad (3.14)$$

где

$$\epsilon_1 = a^2 (1 - \ln 2)$$

$$\epsilon_2 = \frac{8a^3}{3\pi} \ln a (\ln a - \ln 4 + \frac{281}{480}).$$

Аномальный магнитный момент электрона входит в ΔE_F . Величина сверхтонкого расщепления основного уровня энергии ($n=1$) при этом равна

$$\Delta E_{th} = \frac{8 \alpha^4 m^2}{3 M} (1+g)(1+g_0) \left(1 + \frac{m}{M}\right)^{-3} (1-\delta)(1-\epsilon_1-\epsilon_2), \quad (3.15)$$

где

$$g_0 = \frac{\alpha}{2\pi} - 0,328 \frac{\alpha^2}{\pi^2}.$$

4. Обсуждение результатов и заключение

В выражении (3.15) для величины сверхтонкого расщепления основного уровня содержится неизвестный параметр κ , характеризующий структуру протона. Нужно отметить, что существующие в настоящее время экспериментальные данные о форм-факторах протона нельзя описать простой формулой (1.1). Обычно при этом используется сумма нескольких членов вида (1.1)^{/14/}. Соответствующие параметры κ_i характеризуют массы различных резонансных состояний. Однако, ввиду того, что интеграл в (3.11) логарифмически расходится при $f(k^2) \rightarrow 1$, для нас наиболее существенно асимптотическое поведение $f(k^2)$ при $k^2 \rightarrow \infty$. Имеющиеся экспериментальные данные указывают, что $f(k^2)$ убывают не медленнее, чем $1/k^2$. Параметр κ при этом имеет порядок массы протона, и поскольку точная величина его неизвестна, мы рассмотрим выражение (3.15) при нескольких значениях отношения (M^2/κ^2)

Экспериментальное значение величины сверхтонкого расщепления основного уровня равно

$$\Delta E_{exp} = 1420\ 405\ 751,800 \pm 0,028 \text{ гц}. \quad (4.1)$$

Для сравнения теоретического и экспериментального значения удобно ввести величину

$$\Delta = \frac{\Delta E_{exp} - \Delta E_{th}}{\Delta E_{exp}}. \quad (4.2)$$

Используя для всех прочих параметров значения, приведенные в ^{/16/}, мы на основании (3.15), (3.13), (4.1) и (4.2) получим следующие результаты:

M^2/κ^2	δ	ΔE_{th} (Mc/sec)	Δ (ppm)
1,5	16,7	1420,368±0,024	27±17
1	14,6	1420,371±0,024	25±17
0,5	12	1420,375±0,024	22±17
0,25	10,2	1420,377±0,024	20±17

Из этой таблицы видно, что имеется некоторое расхождение между теоретическим и экспериментальным значением $\Delta E_{\text{н.т.}}$, которое, однако, меньше приведенного в /18, 6/. Ошибка в величине $\Delta E_{\text{н.т.}}$ связана в основном с неопределенностью в значении α , поэтому расхождение между $\Delta E_{\text{э.р.}}$ и $\Delta E_{\text{н.т.}}$ вызвано, по-видимому, неточным учетом сильных взаимодействий особенно в диаграммах двухфотонного обмена (см. обсуждение во введении).

В заключение автор выражает глубокую благодарность Н.Н. Боголюбову, А.А. Логунову, А.Н. Тавхелидзе за плодотворные дискуссии и внимание к работе и Б.А. Арбузову, Л.Д. Соловьеву, А.Т. Филиппову и О.А. Хрусталеву за полезные обсуждения.

Л и т е р а т у р а

1. S.B.Crampton, D.Kleppner, N.F.Ramsey. Phys. Rev. Lett., 11, 338 (1963).
2. Г. Бете и Э. Солпитер. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. Физматгиз, Москва, 1960.
3. R.Arnowitt. Phys. Rev., 92, 1002 (1953).
4. W.A.Newcomb and E.E.Salpeter. Phys. Rev., 97, 1146 (1955).
5. A.C.Zemach. Phys. Rev., 104, 1771 (1956).
6. C.K.Iddings, P.M.Platzman. Phys. Rev., 113, 192 (1958). Phys.Rev., 115, 919 (1959)
7. D.A.Hokensmith, L.L.Foldy, Phys. Rev., 133A, 1514 (1964).
8. N.Ramsey Доклад на Международной конференции по физике высоких энергий. Препринт ОИЯИ Е-1786, Дубна, 1964.
9. A.A.Logunov and A.N.Tavkhelidze. Nuovo Cim., 29, 380 (1963).
10. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze, I.T.Todorov, O.A.Khrustalev. Nuovo Cim., 30, 134 (1963).
11. Р.Н. Фаустов. Препринт ОИЯИ Р-1572 Дубна, 1964. Труды Международной зимней школы теоретической физики, ОИЯИ, 1964. т.2, стр.108.
12. Р.Н. Фаустов. Препринт ОИЯИ Р-1586, Дубна, 1964. ДАН СССР 156, 1320 (1964).
13. Nguyen van Hieu and R.N.Faustov. Nucl. Phys., 353, 337 (1964).
14. А.М. Балдин. Доклад на Международной конференции по физике высоких энергий. Препринт ОИЯИ Р-1781, Дубна, 1964.
15. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей, Москва, Гостехиздат, 1957.
16. W.E.Cleland et al. Phys. Rev. Lett., 13, 202 (1964).

Рукопись поступила в издательский отдел
3 декабря 1964 г.