1910

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-1910

Б.А. Арбузов, А.Т. Филиппов

ВЕРШИННАЯ ФУНКЦИЯ В НЕПЕРЕНОРМИРУЕМОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1964

P-1910

Б.А. Арбузов, А.Т. Филиппов

ВЕРШИННАЯ ФУНКЦИЯ В НЕПЕРЕНОРМИРУЕМОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

§ 1. Введение

Успех теории перенормировок в квантовой электродинамике и других перенормируемых теориях одновременно породил скептическое отношение к неперенормируемым теориям. Это объясняется тем, что в последних невозможно сформулировать процедуру последовательного устранения бесконечностей в каждом порядке теории возмущений (см., например, книгу Боголюбова и Ширкова [/1/]), и поэтому мы не можем вычислять радиационные поправки, не вводя вспомогательной регуляризации, нарушающей унитарность матрицы рассеяния и зависящей от неизвестных параметров. Такое положение в высшей степени неудовлетворительно хотя бы потому, что неперенормируема, например, теория слабых взаимодействий (см., например [/2/]). С другой стороны, неперенормируемые взаимодействия векторных частиц, по-видимому, играют фундаментальную роль в теории сильных взаимодействий [/3/]. В связи с этим в последнее время были предприняты попытки вычисления радиационных поправок в неперенормируемых теориях без использования теории возмущений. Не претендуя на полноту, мы кратко рассмотрим наиболее характерные направления подобных исследований.

В работах Т.Д. Ли [/4/] рассматриваются радиационные поправки в неперенормируемых теориях взаимодействий массивных векторных частиц с фотонами и спинорными частицами. Поясним метод Т.Д. Ли на примере вычисления квадрупольного момента Q заряженной векторной частицы, взаимодействующей с электромагнитным полем. Вспомогательная регуляризация (ξ -процесс Ли и Янга [/5/x/]) делает электродинамику векторных частиц перенормируемой и позволяет устранить все бесконечности с помощью обычной процедуры перенормировок. При снятии регуляризации ($\xi \to 0$) в каждом порядке теории возмущений возникают бесконечные величины. Предполагая ad hoc, что при $\xi \to 0$ основной вклад в Q дают наиболее сингулярные члены и что сумма этих членов стремится к конечному пределу, Ли нашел, что радиационные поправки к квадрупольному моменту неаналитически зависят от заряда e, а именно, содержат члены вида $e^2 \log e^2$. Это обстоятельство делает понятной полную несостоятельность теории возмущений в неперенормируемых теориях поля и показывает, что радиационные поправки к Q могут быть конечными, но неразложимыми даже в асимптотический ряд по e^2.

Следующий шаг в направлении, подсказанном результатами Т.Д. Ли, сделали Пайс

x/ Аналогичный метод был независимо от авторов [/5/] развит В.С.Ваняшиным [/6/].

и Файнберг[7], разработавшие итерационную процедуру (получившую название "ператизации") для вычисления радиационных поправок к рассеянию в неперенормируемых теориях. Эти авторы, как и Ли, вводят вспомогательную регуляризацию и сначала рассматривают наиболее сингулярные при снятии регуляризации члены, для которых составляется приближенное интегральное уравнение[x]. Это уравнение решается точно, и с помощью найденного первого приближения можно последовательно вычислять следующие приближения, решая соответствующие интегральные уравнения. Найденные Пайсом и Файнбергом радиационные поправки к рассеянию также содержат логарифмические члены вида $g^4 \log g^2$.

Основная трудность метода ператизации - выполнение предельного перехода при снятии регуляризации ($\xi \to 0$). Поэтому Т.Т. Ву, Пайс и Хури подробно исследовали такой предельный переход на примере нерелятивисткого рассеяния на потенциале $\frac{g^2}{r^m}$, где $m > 3$. Эта модель удачно передает основные черты амплитуды рассеяния в неперенормируемой теории, что совершенно естественно, поскольку, действия методом работы[9], можно получить в неперенормируемых теориях поля квазипотенциал вида g^2/r^{2n}, где $n \geq 2$. Ву, Пайс и Хури показали, что в этой модели процедура ператизации ведет к конечному результату и что амплитуда рассеяния вне энергетической поверхности имеет логарифмическую точку ветвления по g^2 при $g^2 = 0$ (особенность вида $g^4 \log g^2$). Выяснилось также, что точка $\xi = 0$ является существенно особой точкой для регуляризованной амплитуды и поэтому конечный результат может зависеть от пути, по которому ξ устремляется к нулю. Другой метод, не связанный с ператизацией, был предложен в работе[10]. В частности, для амплитуды рассеяния на потенциале вне энергетической поверхности при $k^2 = 0$, $\ell = 0$ было найдено точное решение, содержащее особенности вида $g^4 \log g^2$. В работе[10] исследовалось непосредственно уравнение Липпмана-Швингера без всякой вспомогательной регуляризации. Результаты работ[8,10] убедительно свидетельствуют о том, что наличие степенных расходимостей в итерационном решении уравнения для амплитуды рассеяния в принципе может быть связано с неаналитичностью зависимости точного решения от константы связи g^2.

Настоящая работа посвящена исследованию уравнения для вершинной функции в неперенормируемой теории взаимодействия массивных векторных частиц со скалярными частицами. Мы изучим приближенное уравнение, впервые предложенное Эдвардсом[11]. Будет показано, что это уравнение имеет конечное убывающее решение, если произвести

[x] Пайс и Файнберг ограничиваются исследованием суммы "лестничных" диаграмм.

перенормировку вершины, допускаемую формальной структурой теории. Разумеется, для того, чтобы показать перенормируемость всей теории, необходимо было бы исследовать также уравнения для функций Грина векторной и скалярной частиц. Однако первым шагом должно быть исследование уравнения для вершины. Действительно, в силу теоремы Челлена-Лемана полные функции Грина не могут убывать быстрее, чем свободные функции Грина. Поэтому, заменяя в уравнениях Дайсона полную вершину на свободную, мы получили бы для функций Грина нелинейные уравнения, не имеющие решения.

§ 2. Уравнение для вершинной функции

Рассмотрим взаимодействие векторных частиц A_k^{μ} с массой m и скалярных частиц ϕ_k с массой M. Лагранжиан взаимодействия возьмем в виде:

$$L_{int} = \lambda C_{ij\ell}\, \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial x^{\mu}} A_{\ell}^{\mu} . \tag{2.1}$$

Здесь $C_{ij\ell}$ - структурные константы группы симметрии рассматриваемой теории, а эрмитовы поля ϕ_k и A_k^{μ} преобразуются по регулярному представлению этой группы. Так, например, для SU_2 - группы $C_{ij\ell} = \epsilon_{ij\ell}$, где $\epsilon_{ij\ell}$ -совершенно антисимметричный тензор, а для SU_3 -группы $C_{ij\ell} = f_{ij\ell}$. (значения $f_{ij\ell}$ можно найти в статье Гелл-Манна /12/), причем поля преобразуются соответственно по трехмерному и восьмимерному представлениям.

Как известно, точную вершинную функцию можно выразить через функции Грина и амплитуду рассеяния вне массовой поверхности. Мы, однако, ограничимся изучением приближенного линейного уравнения Эдвардса, которое графически изображено на рисунке. Очевидно, что приближение, использованное при выводе этого уравнения, эквивалентно "лестничному" приближению для амплитуды рассеяния, определяемой уравнением Бете и Солпитера. Вводя для диаграмм в левой части графического уравнения (см. рис.) обозначение

$$(2\pi)^4 \lambda \Gamma_{ij\ell}^{\mu}(p,k) = (2\pi)^4 \lambda C_{ij\ell}\, \Gamma^{\mu}(p,k),$$

найдем для Γ_{μ} уравнение

$$\Gamma_{\mu}(p,k) = 2p_{\mu} +$$

$$+ a\lambda^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4 i} \frac{(p+q)^2 - k^2 + m^{-2}[(p^2-q^2)^2 - (k,p-q)^2]}{[(q-\frac{k}{2})^2+M^2][(q+\frac{k}{2})^2+M^2][(p-q)^2+m^2]}\, \Gamma_{\mu}(q,k), \tag{2.2}$$

где $a = 1$ для SU_2 – группы и $a = 3/2$ для SU_3 – группы.

Эдвардс исследовал уравнение такого типа в перенормируемых теориях. Он показал, что перенормировка теории приводит к появлению при неоднородном члене множителя Z, который, в частности, может быть равен 0 или ∞. Решение модифицированного таким образом уравнения совместно с дополнительным условием нормировки вершины на массовой поверхности дает перенормированную вершинную функцию. Рассматриваемая нами теория также инвариантна относительно группы перенормировки /1/

$$A \to Z_3^{1/2} A\ ,\ \phi \to Z_2^{1/2}\phi\ ,\quad \lambda \to Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2}\lambda\ ,$$

$$m \to m - \delta m\ ,\qquad M \to M - \delta M\ . \tag{2.3}$$

В перенормируемых теориях наличие подобной группы позволяет однозначно устранить бесконечности во всех порядках теории возмущений. В нашем случае это, как известно, невозможно. Мы можем тем не менее попытаться воспользоваться произволом, допускаемым группой перенормировки, для того, чтобы устранить бесконечности, которые могут возникнуть при решении интегральных уравнений для функций Грина и вершины Γ_μ. В данной работе ввиду трудностей, связанных с исследованием даже приближенного уравнения (2.2), мы ограничимся исследованием этого уравнения при $k_\mu = 0$ x/. Мы покажем, что в этом случае можно найти перенормированную вершину с помощью метода, совершенно аналогичного методу Эдвардса. Невозможность устранения бесконечностей в итерационном решении уравнения (2.2) связано с тем, что точка $\lambda = 0$ является логарифмической точкой ветвления точного решения.

При $k_\mu = 0$ вершина Γ_μ имеет простую структуру

$$\Gamma_\mu(p,0) = 2p_\mu F(p^2)\ . \tag{2.4}$$

Выполним теперь в уравнении (2.2) поворот контура интегрирования по q_0 на $\frac{\pi}{2}$ /13/. (Впоследствии мы покажем, что решение уравнения (2.2) обладает такими свойствами, которые позволяют выполнить этот поворот). Выделив отдельно постоянный интеграл I и наиболее сингулярную часть ядра K_0, запишем уравнение для $F(p^2)$ символически в виде:

$$F = Z + I + KF = Z + I + K_0 F + K' F\ , \tag{2.5}$$

где

$$I = \frac{a\lambda^2}{m^2 p^2}\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,\frac{2(p\cdot q)^2}{(q^2+M^2)^2}\,F(q^2)\ ,$$

x/ Ясно, что знания $\Gamma_\mu(p,0)$ недостаточно для суждения о существовании решений приближенных уравнений для функций Грина.

$$K_0 F = \frac{a\lambda^2}{m^2 p^2} \int \frac{d\,q}{(2\pi)^4} \left[\frac{(p^2-q^2)^2}{(p-q)^2}(p\cdot q) - 2(p\cdot q)^2 \right] \frac{F(q^2)}{(q^2+M^2)^2}\ , \tag{2.7}$$

$$K' F = \frac{4q\lambda^2}{p^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{p^2 q^2 - (p\cdot q)^2}{(p-q)^2 [(p-q)^2 + m^2]} (p\cdot q) \frac{F(q^2)}{(q^2+M^2)^2}\ . \tag{2.8}$$

Будем искать F в виде $F = F^{(0)} + F'$, где главная часть вершинной функции $F^{(0)}$ определяется из уравнения

$$F^{(0)} = Z + I + K_0 F^{(0)}\ , \tag{2.9}$$

а F' подчиняется уравнению

$$F' = K' F^{(0)} + K_0 F' + K' F'\ . \tag{2.10}$$

Мы сначала изучим решение уравнения (2.9), а затем покажем, что уравнение (2.10) можно решать совершенно аналогично, т.е. выделить сначала сингулярную часть ядра K_0, решить полученное уравнение и т.д. (ср. /7/). Вообще, положим

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}\ , \tag{2.11}$$

причем $F^{(0)}$ удовлетворяет уравнению (2.9), а $F^{(n)}$ уравнению

$$F^{(n)} = K_1 F^{(n-1)} + K_0 F^{(n)}\ . \tag{2.12}$$

Мы докажем, что каждое из уравнений (2.9), (2.12) имеет единственное решение. Разумеется, вопрос о сходимости получаемого ряда (2.11) остается открытым.

§ 3. Дифференциальное уравнение для $F^{(0)}$

Займемся решением уравнения (2.9). Перейдем к сферическим координатам в четырехмерном эвклидовом пространстве

$$q_0 = q\cos\theta\ ;\quad q_1 = q\sin\theta\cos\phi\ ;$$

$$q_2 = q\sin\theta\cdot\sin\phi\cdot\cos\psi\ ;\quad q_3 = q\sin\theta\sin\phi\cdot\sin\psi\ ; \tag{3.1}$$

$$d^4q = \tfrac{1}{2} q^2 dq^2 \sin^2\theta\, d\theta \sin\phi\, d\phi\, d\psi\ . \tag{3.2}$$

Полагая $\cos\theta = (p\cdot q)/pq$, перепишем уравнение (2.9) в виде[x/]

$$F(x) = Z + I + \frac{a\lambda^2}{(2\pi)^3 m^2 x} \int_0^\infty \frac{y\,dy\,(x-y)^2\sqrt{xy}}{(y+M^2)^2}\, F(y)\,\cdot$$

$$\cdot \int_0^\pi d\theta \frac{\sin^2\theta\cos\theta}{x+y-2\sqrt{xy}\cos\theta} - 2\frac{a\lambda^2}{(2\pi)^2 m^2 x}\int_0^\infty \frac{y\,dy\,xy}{(y+M^2)^2}\, F(y)\int_0^\pi d\theta \cos^2\theta\sin^2\theta\ , \tag{3.3}$$

где $x = p^2$, $y = q^2$. Пользуясь простой, но весьма полезной формулой

$$\int_0^\pi d\theta \frac{\sin^2\theta}{x+y-2\sqrt{xy}\cos\theta} = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{x}\theta(x-y) + \frac{1}{y}\theta(y-x)\right], \tag{3.4}$$

где $\theta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\theta(x) = 0$ при $x < 0$, получим уравнение для $F^{(0)}(x)$:

$$F^{(0)}(x) = Z + I + \frac{g^2}{12}\left\{\frac{1}{x^2}\int_0^x dy \frac{y^4 F^{(0)}(y)}{(y+M^2)^2} - \frac{2}{x}\int_0^x dy \frac{y^3 F^{(0)}(y)}{(y+M^2)^2} - \right.$$

$$\left. - 2x\int_x^\infty dy \frac{y F^{(0)}(y)}{(y+M^2)^2} + x^2\int_x^\infty dy \frac{F^{(0)}(y)}{(y+M^2)^2}\right\}, \tag{3.5}$$

$$I = \frac{g^2}{12}\int_0^\infty y^2 dy \frac{F(y)}{(y+M^2)^2}\ .$$

(Здесь положено $g^2 = 3a\lambda^2/8m^2\pi^2$). Это интегральное уравнение аналогично тому, которое было получено в нерелятивистской теории рассеяния на сингулярном потенциале [/10/]. Введем обозначение

$$A = Z + \frac{g^2}{12}\int_0^\infty y^2 dy \frac{F(y)}{(y+M^2)^2} \tag{3.6}$$

---

x/ Здесь и в дальнейшем мы опускаем значок $^{(0)}$ в тех случаях, когда это не ведет к недоразумениям.

и будем считать, что константа перенормировки Z выбрана так, что величина A конечна[x/]. Последняя определяется из условия нормировки

$$\Gamma_\mu(p,k) = 2p_\mu \quad \text{при} \quad \left(p \pm \frac{k}{2}\right)^2 = -M^2,\ k^2 = -m^2. \qquad (3.7)$$

Перейдем к исследованию уравнения (3.5). Если попытаться решать это уравнение итерациями, взяв в качестве нулевого приближения $F = A$, то в первом приближении появятся логарифмически расходящиеся интегралы, а в последующих возникнут степенные расходимости возрастающих степеней. Несмотря на это, существует (и притом единственное) решение перенормированного уравнения (3.5):

$$F(x) = A + \frac{g^2}{12}\left\{ \frac{1}{x^2}\int_0^x dy\, \frac{y^4 F(y)}{(y+M^2)^2} - \right. \qquad (3.5,a)$$

$$\left. -\frac{2}{x}\int_0^x dy\, \frac{y^3 F(y)}{(y+M^2)^2} - 2x\int_x^\infty dy\, \frac{y F(y)}{(y+M^2)^2} + x^2\int_x^\infty dy\, \frac{F(y)}{(y+M^2)^2} \right\}.$$

Для того, чтобы доказать это, воспользуемся тем обстоятельством, что уравнение (3.5а) является уравнением Вольтерра с вырожденным ядром и поэтому, как легко видеть, сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[x^{-1}\frac{d^2}{dx^2}(x^2 F)\right] + g^2\frac{F}{(x+M^2)^2} = \frac{4A}{x^3} \qquad (3.8)$$

или же

$$x^4\frac{d^4F}{dx^4} + 6x^3\frac{d^3F}{dx^3} + 2x^2\frac{d^2F}{dx^2} - 4x\frac{dF}{dx} + 4F + \frac{g^2x^3F}{(x+M^2)^2} = 4A. \qquad (3.9)$$

Разумеется, не всякое решение дифференциального уравнения (3.8) удовлетворяет исходному интегральному уравнению (3.5а). Решение уравнения (3.8) должно подчиняться определенным граничным условиям при $x \to 0$ и $x \to \infty$. Мы сможем сфор-

x/ В дальнейшем выяснится, что интеграл I расходится логарифмически. Чтобы не иметь дела с математически бессмысленными выражениями, можно ввести вспомогательную регуляризацию, снимаемую в конце вычислений. Эти вычисления не отличаются от соответствующих операций в перенормируемых теориях, и мы предоставляем их читателю.

мулировать эти условия и показать, что они могут быть выполнены, лишь после того, как изучим асимптотическое поведение решений уравнения (3.8) на концах интервала $(0, \infty)$.

§ 4. Исследование решений дифференциального уравнения. Существование и единственность решения интегрального уравнения

Общее решение дифференциального уравнения (3.9) имеет вид:

$$F(x) = F_0(x) + \sum_{i=1}^{4} c_i F_i(x), \tag{4.1}$$

где F_0 –частное решение уравнения (3.9), а F_i –линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения. Нетрудно убедиться, что решения однородного уравнения имеют следующую асимптотику при $x \to \infty$.

$$\begin{aligned}
F_1(x) &\approx x^{-3/8} \exp[-4e^{i\frac{\pi}{4}}(g^2x)^{1/4}], \\
F_2(x) &\approx x^{-3/8} \exp[-4e^{-i\frac{\pi}{4}}(g^2x)^{1/4}], \\
F_3(x) &\approx x^{-3/8} \exp[4e^{i\frac{\pi}{4}}(g^2x)^{1/4}], \\
F_4(x) &\approx x^{-3/8} \exp[4e^{-i\frac{\pi}{4}}(g^2x)^{1/4}].
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Решения F_1 и F_2 экспоненциально убывают, а F_3 и F_4 экспоненциально возрастают. Решение неоднородного уравнения, очевидно, имеет асимптотику

$$F_0(x) \underset{x\to\infty}{\approx} \frac{4A}{g^2x}. \tag{4.3}$$

Требование сходимости интегралов в уравнении (3.5а) приводит к тому, что мы должны искать решение в виде

$$F(x) = F_0(x) + c_1F_1(x) + c_2F_2(x). \tag{4.4}$$

Рассмотрим теперь поведение $F(x)$ при $x \to 0$. Характеристические корни уравнения (3.9) равны

$$s_1 = 2, \quad s_2 = 1, \quad s_3 = -1, \quad s_4 = -2. \tag{4.5}$$

Поэтому разложения решений однородного уравнения в окрестности нуля могут начинаться с x^2, x, x^{-1}, x^{-2}. Решения F_0, F_1 и F_2 имеют асимптотику (см. Приложение)

$$F_0(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_1}{x} + O(1),$$

$$F_1(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{d_{21}}{x^2} + \frac{d_{11}}{x} + O(1), \qquad (4.6)$$

$$F_2(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{d_{22}}{x^2} + \frac{d_{12}}{x} + O(1),$$

где в силу линейной независимости решений F_1 и F_2

$$d_{11} d_{22} - d_{12} d_{21} \neq 0 . \qquad (4.6,a)$$

Таким образом, разложение $F(x)$ имеет вид:

$$F(x) = \frac{b_2 + d_{21} c_1 + d_{22} c_2}{x^2} + \frac{b_1 + d_{11} c_1 + d_{12} c_2}{x} + O(1) = \frac{d_2}{x^2} + \frac{d_1}{x} + O(1).$$

Найдем теперь условия, при которых решение дифференциального уравнения удовлетворяет интегральному уравнению. Для этого вычислим значения интегралов в уравнении (3.5а), пользуясь уравнением (3.8) и асимптотикой (4.7). Умножая уравнение (3.8) на соответствующие степени x и выполняя очевидные интегрирования по частям, получим

$$\frac{g^2}{12x^2}\int_0^x dy \frac{y^4 F(y)}{(y+M^2)^2} = -\frac{d_2}{x^2} + \frac{A}{6} - \frac{F}{6} + \frac{x}{6}\frac{dF}{dx} - \frac{x^2}{12}\frac{d^2F}{dx^2} - \frac{x^3}{12}\frac{d^3F}{dx^3};$$

$$-\frac{g^2}{6x}\int_0^x dy \frac{y^3 F(y)}{(y+M^2)^2} = -\frac{d_1}{x} - \frac{2A}{3} + \frac{2F}{3} - \frac{2x}{3}\frac{dF}{dx} + \frac{x^2}{3}\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{x^3}{6}\frac{d^3F}{dx^3};$$

$$-\frac{g^2 x}{6}\int_x^\infty dy \frac{y F(y)}{(y+M^2)^2} = -\frac{2A}{3} + \frac{2F}{3} + \frac{x}{3}\frac{dF}{dx} - \frac{2x^2}{3}\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{x^3}{6}\frac{d^3F}{dx^3}; \qquad (4.8)$$

$$\frac{g^2 x^2}{12}\int_x^\infty dy \frac{F(y)}{(y+M^2)^2} = \frac{A}{6} - \frac{F}{6} + \frac{x}{6}\frac{dF}{dx} + \frac{5x^2}{12}\frac{dF}{dx} + \frac{x^3}{12}\frac{d^3F}{dx^3}.$$

Складывая найденные выражения, мы видим, что правая часть уравнения (3.5а) равна

$$F(x) - \frac{d_1}{x} - \frac{d_2}{x^2} .$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения (4.4) является решением интегрального уравнения в том и только в том случае, если

$$d_1 = d_2 = 0 . \tag{4.9}$$

Полученное граничное условие можно удовлетворить, и притом единственным образом, поскольку уравнения для коэффициентов c_1 и c_2

$$d_1 = d_{11}c_1 + d_{12}c_2 + b_1 = 0, \tag{4.10}$$

$$d_2 = d_{21}c_1 + d_{22}c_2 + b_2 = 0$$

имеют единственное решение (в силу условий (4.6а)). Вспоминая, что постоянная A фиксируется условием нормировки (3.7), мы приходим к заключению, что <u>уравнение (3.5а) имеет одно и только одно решение.</u>

Это решение ведет себя на бесконечности следующим образом:

$$F(x) \underset{x\to\infty}{\approx} \frac{4A}{g^2 x} + c x^{-3/8} \exp[-4e^{i\frac{\pi}{4}}(g^{-2}x)^{1/4}] + \tag{4.11}$$

$$+ c^* x^{-3/8} \exp[-4e^{-i\frac{\pi}{4}}(g^{2}x)^{1/4}] .$$

(ввиду вещественности F при $x > 0$ можно положить $c_1 = c_2^* = c$, где c комплексно). Теперь нетрудно обосновать поворот контура интегрирования в уравнении (2.2). Действительно, поскольку дифференциальное уравнение имеет особые точки $x = \infty$, $x = -M^2$, $x = 0$, то его решение $F(x)$ – аналитическая функция в комплексной плоскости x с разрезом по отрицательной вещественной полуоси. В силу (4.11) функция $F(x)$ убывает по любому направлению, так что можно написать для $F(x)$ дисперсионное соотношение без вычитаний. Возможность поворота контура интегрирования становится тем самым очевидной.

До сих пор мы изучали решение уравнения (2.9) для главной части вершинной функции $F^{(0)}$. Рассмотрим теперь уравнение для поправок $F^{(n)}$. Нетрудно убедиться, что $K'F^{(0)} \underset{p^2\to\infty}{\approx} p^{-2}$ и $K'F^{(0)} \underset{p^2\to 0}{\approx} p^{6}$. Поэтому, применяя изложенный выше метод, можно проверить, что уравнение для $F^{(1)}$, и вообще каждое уравнение (2.12), имеет единственное решение. При этом решения $F^{(n)}$ ($n \geq 1$) при $p^2 \to \infty$ убывают быстрее, чем $F^{(n-1)}$, а при $p^2 \to 0$ ведут себя не хуже, чем $F^{(n-1)}$. Этим завершается доказательство существования и единственности решения уравнения для перенормированной вершины.

§ 5. Приближение $M^2 = 0$

Если в уравнении (3.8) положить $M^2 = 0$, то решение можно выразить через хорошо изученные специальные функции. В этом случае легко найти частное решение неоднородного уравнения

$$F_0 = \frac{4A}{g^2 x}. \qquad (5.1)$$

Однородное уравнение при этом превращается в обобщенное гипергеометрическое уравнение /14/

$$\left(x\frac{d}{dx}-2\right)\left(x\frac{d}{dx}-1\right)\left(x\frac{d}{dx}+1\right)\left(x\frac{d}{dx}+2\right)F + g^2 x F = 0. \qquad (5.2)$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям, нужно найти решение уравнения (5.2), которое убывает при $x \to \infty$ и ведет себя, как x^{-1} при $x \to 0$. Этим условиям удовлетворяет G – функция Мейера /14/

$$F(x) = G^{30}_{04}(g^2 x\,|\,2, 1, -1, -2). \qquad (5.3)$$

Асимптотика этой функции при $x \to \infty$ может быть определена из интегрального представления для $G^{30}_{04}(g^2 x\,|\,2,1,-1,-2)$. Нетрудно показать, что

$$G^{30}_{04}(g^2 x\,|\,2, 1, -1, -2) \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{(g^2 x)^{3/8}} e^{-2\sqrt{2}(g^2 x)^{1/4}} \cos\left[2\sqrt{2}(g^2 x)^{1/4} - \frac{\pi}{8}\right]. \qquad (5.4)$$

При малых x имеем (см. Приложение)

$$G^{30}_{04}(g^2 x\,|\,2, 1, -1, -2) = \frac{2}{g^2 x} - \tfrac{1}{2} - \frac{g^2 x}{12}\log(g^2 x) + \frac{g^2 x}{3}\left(\frac{5}{6} - \gamma\right) + 0(g^2 x). \qquad (5.5)$$

Условие (4.9) приводит к окончательному ответу:

$$F(x) = \frac{4A}{g^2 x} - 2A\,G^{30}_{04}(g^2 x\,|\,2, 1, -1, -2). \qquad (5.6)$$

Разложение решения при малых g^2 непосредственно следует из (5.5) и имеет вид:

$$F = A\left[1 + \frac{g^2 \log g^2}{6} x + \frac{g^2}{6} x \left(\log x + 4\gamma - \frac{10}{3}\right) + O(g^2)\right]. \tag{5.7}$$

Мы получили, таким образом, логарифмическую точку ветвления при $g^2 = 0$ (члены вида $(g^2 \log g^2)$).

Подчеркнем, что член, пропорциональный $g^2 \log g^2$, найден здесь точно. Ни учет $M \neq 0$, ни учет высших приближений, не влияют на его величину.

В заключение рассмотрим соотношение (3.6). В приближении $M^2 = 0$ мы можем нормировать вершинную функцию условием $F(0) = 1$, т.е. $A = 1$. Тогда, подставляя в (3.6) решение (5.6), получим (обрывая расходящийся интеграл на верхнем пределе)

$$Z(\Lambda, g^2) = 1 - \frac{g^2}{12}\int_0^{\Lambda} dy\left[\frac{4}{g^2 y} - 2G^{30}_{04}(g^2 y \mid 2, 1, -1, -2)\right] = \tag{5.8}$$

$$= -\frac{1}{3}\log(\Lambda g^2) + \frac{13}{6} - \frac{4\gamma}{3}.$$

Таким образом, константа перенормировки $Z \to -\infty$ при $\Lambda \to \infty$ и неаналитически зависит от g^2.

§ 6. Заключение

Выше мы показали, что в неперенормируемых теориях взаимодействия скалярных частиц с массивными векторными частицами существует единственное решение уравнения для перенормированной вершинной функции в лестничном приближении. Вершинная функция убывает по закону (4.11) во всей комплексной плоскости p^2 x/. Точка $g^2 = 0$ является логарифмической точкой ветвления перенормированной вершины $F(p^2)$, чем и объясняется полная несостоятельность теории возмущений в неперенормируемых теориях. Выход за рамки теории возмущений в рассмотренном нами случае приводит к ситуации, совершенно идентичной положению в перенормируемой теории. Единственное отличие – возникновение логарифмической точки ветвления по константе связи. Мы, разумеется, не доказали перенормируемость рассмотренной теории, поскольку мы изучили лишь приближенное уравнение для вершины при частном значении одной из пере-

---

x/ В работах А. Салама и Р. Дельбурго /15/ рассматривается асимптотика вершинной функции в электродинамике векторных частиц. Авторы получают убывающую асимптотику вершины, предполагая, что между зарядом и массой векторной частицы имеется соотношение $Z(e^2, m^2) = 0$.

менных. Однако рассмотренный пример свидетельствует о несостоятельности обычных, основанных на теории возмущений, аргументов о неперенормируемости рассмотренного класса теорий и указывает метод и направление дальнейшей работы. Кроме того, полученные результаты позволяют вычислять некоторые другие радиационные поправки. Например, пользуясь найденным выражением для вершины $\Gamma_\mu(p,0)$, можно вычислить поправки к поляризационному оператору векторной частицы $\Pi_{\mu\nu}(k)$ при $k=0$. Интересно также отметить, что первые два члена разложения (5.7) можно получить, пользуясь методом Т.Д. Ли[4], что вполне естественно, так как предположение Ли о существовании конечного предела в рассмотренной модели справедливо.

Авторам приятно выразить благодарность Н.Н. Боголюбову, А.А. Логунову, А.Н. Тавхелидзе и О.А. Хрусталеву за плодотворные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

В этом Приложении изложен метод исследования асимптотики решений уравнения (3.9) при $x\to\infty$ и $x\to 0$ и приведены основные результаты такого исследования.

Сначала рассмотрим поведение в бесконечности. Точка $x=0$ есть нерегулярная особая точка однородного уравнения, соответствующего уравнению (3.8). Пользуясь общим методом исследования поведения решений в окрестности нерегулярной особой точки (см., например, книгу Айнса[16]), нетрудно показать, что решения этого уравнения имеют асимптотические разложения вида:

$$F_i(x) = x^{-3/8}\, e^{-a_i x^{1/4}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(i)} x^{-n/4}\;; \tag{A.1}$$

где

$$\begin{gathered} a_1 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{g}\;; \qquad a_2 = 4e^{-\frac{\pi}{4}}\sqrt{g}\;; \\ a_3 = -4e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{g}\;; \qquad a_4 = -4e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{g}\;. \end{gathered} \tag{A.2}$$

Таким образом, при бесконечно больших значениях x имеется существенная особенность и ветвление.

В окрестности точки $x=0$ уравнение (3.8) удобно представить в форме

$$\left(x\frac{d}{dx}-2\right)\left(x\frac{d}{dx}-1\right)\left(x\frac{d}{dx}+1\right)\left(x\frac{d}{dx}+2\right)F+\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{3+n} F = 4A\,, \tag{A.3}$$

где

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{s+n} = \frac{g^2 x^3}{(x+M^2)^2}; \quad b_0 = \frac{g^2}{M^4}, \quad b_1 = -\frac{2g^2}{M^6}, \qquad (A.4)$$

$$b_2 = \frac{3g^2}{M^8}, \ldots$$

Поскольку $x = 0$ –регулярная особая точка уравнения (A.3), мы попытаемся искать решение однородного уравнения в виде

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{s+n}, \qquad (A.5)$$

где s определяется из характеристического уравнения

$$f(s) = (s-2)(s-1)(s+1)(s+2) = 0. \qquad (A.6)$$

Однако, оказывается, что корни этого уравнения отличаются друг от друга на целые числа. Поэтому для построения четырех линейно независимых решений воспользуемся методом Фробениуса (см. /16/). Введем вспомогательную функцию

$$\bar{F}_s = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(s) x^{s+n}, \qquad (A.7)$$

где в соответствии с общим рецептом положим

$$c_0(s) = (s+2)^3 (s+1)^2 (s-1), \qquad (A.8)$$

$$c_1(s) = c_2(s) = 0,$$

$$c_n(s) = -\frac{\sum_{m=0}^{n-3} c_m(s) d_{n-m-3}}{f(s+n)}, \quad n \geq 3. \qquad (A.9)$$

Линейно независимые решения получим, дифференцируя $\bar{F}_s$ и полагая

$$F_{s_1} = \bar{F}_{s_1}; \quad F_{s_2} = \frac{\partial \bar{F}_s}{\partial s}\bigg|_{s=s_2}; \quad F_{s_3} = \frac{\partial^2 \bar{F}_s}{\partial s}\bigg|_{s=s_3}; \quad F_{s_4} = \frac{\partial^3 \bar{F}_s}{\partial s^3}\bigg|_{s=s_4}. \qquad (A.10)$$

Выпишем первые члены разложений полученных решений:

$$F_{s_1} = x^2 - \frac{g^2 x^5}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3} + O(x^6), \qquad (A.11)$$

$$F_{s_2} = x - \frac{g^2 x^4}{6\cdot 5\cdot 12} + O(x^5), \qquad (А.12)$$

$$F_{s_3} = x^{-1} + \frac{g^2}{24} x^2 \log x + O(x^2), \qquad (А.13)$$

$$F_{s_4} = x^{-2} + \frac{g^2}{18} x \log x + O(x). \qquad (А.14)$$

Таким образом, решения F_{s_1} и F_{s_2} могут быть найдены в виде сходящихся степенных рядов, а в решениях F_{s_3} и F_{s_4} добавляется произведение $\log x$ на сходящийся степенной ряд.

Частное решение неоднородного уравнения можно найти в виде степенного ряда (А.5), если положить $s = 0$, $c_0 = A$ и остальные c_n определить из формулы (А.9) при $s = 0$. Для того, чтобы найти частное решение, убывающее при $x \to \infty$, нужно добавить к найденному частному решению некоторую линейную комбинацию решений однородного уравнения. Поэтому убывающее на бесконечности решение F_0 неоднородного уравнения имеет при $x \to \infty$ поведение, описываемое формулой (4.6).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

В этом Приложении приведено разложение функции Мейера при малых y. Воспользуемся предствлением

$$G^{30}_{04}(y|2,1,-1,-2) = \lim_{\delta\to 0} G^{30}_{04}(y|2+\delta\cdot a, 1+\delta\cdot b, -1, -2+\delta\cdot c) =$$

$$= y^{2+\delta a}\frac{\Gamma[-1+\delta(b-a)]\,\Gamma(-3-\delta a)}{\Gamma[5+\delta(a-c)]}\,{}_0F_3(2+\delta(a-b), 4+\delta a, 5+\delta(a-b)|-y) + \qquad (Б.1)$$

$$+ y^{1+\delta b}\frac{\Gamma[1+\delta(a-b)]\,\Gamma(-2-\delta b)}{\Gamma[4+\delta(b-c)]}\,{}_0F_3(\delta(b-a), 3+\delta\cdot b, 4+\delta(b-c)|-y) +$$

$$+ y^{-1}\frac{\Gamma(3+\delta a)\Gamma(2+\delta b)}{\Gamma(2-\delta c)}\,{}_0F_3(-2-\delta a, -1-\delta b, 2-\delta c|-y),$$

где
$${}_0F_3(a,b,c|y) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-y)^n}{n!}\frac{1}{(a)_n(b)_n(c)_n}, \quad (a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}. \qquad (Б.2)$$

Для того, чтобы найти указанный предел при $\delta \to 0$, достаточно разложить все функции по δ с точностью до δ^2 (В выражении (Б.1) члены, пропорциональные

δ^{-1} и δ^{-2}, конечно, сокращаются). Удобно использовать следующие разложения:

$$y^{\delta} = 1 + \delta \log y + \frac{\delta^2}{2} \log^2 y + \dots \qquad (Б.3)$$

$$\Gamma(N+\delta) = \Gamma(N)\{1+\delta\Psi_{N-1} + \frac{\delta^2}{2}[\Psi'_{N-1} - \Psi^2_{N-1}] + \dots\}, \qquad (Б.4)$$

где

$$\Psi_{z-1} = \Gamma'(z)/\Gamma(z), \quad \Psi'_z = \frac{d\Psi_z}{dz};$$

$$\frac{1}{\Gamma(N+\delta)} = \frac{1}{\Gamma(N)}\{1-\delta\Psi_{N-1} + \frac{\delta^2}{2}[\Psi^2_{N-1} - \Psi'_{N-1}] + \dots\}, \qquad (Б.5)$$

$$\frac{1}{(N+\delta)_n} = \frac{1}{(N)_n}\{1-\delta(\Psi_{N+n-1} - \Psi_{N-1}) + \frac{\delta^2}{2}[(\Psi_{N+n-1} - \Psi_{N-1})^2 - (\Psi'_{N+n-1} - \Psi'_{N-1})]. \qquad (Б.6)$$

Для преобразования функций $\Gamma(-3-\delta)$, $\Gamma[-1+\delta(b-a)]$, $\Gamma(-2-\delta b)$ удобно применить известное соотношение

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Выпишем окончательный результат

$$G^{30}_{04}(y\,|\,2,1,-1,-2) = \frac{2}{y} - ½ - \frac{y}{12}\log y + \frac{y}{3}\left(\frac{5}{6} - \gamma\right) + \frac{y^2}{2}\log^2 y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-y)^n}{(n!)^4} - , \qquad (Б.7)$$

$$- y^2 \log y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-y)^n}{(n!)^n}(\Psi_n + \Psi_{n+1} + \Psi_{n+3} + \Psi_{n+4}) + y^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n,$$

где $\gamma = -\Psi_0 = 0{,}577\dots$, а ряд $\Sigma c_n y^n$ всюду сходится.

В заключение приведем одно интегральное представление функции Мейера /14/, которое полезно при исследовании ее асимптотики при $y \to \infty$

$$G^{30}_{04}(y\,|\,2,1,-1,-2) = 4\int_0^{\infty} \frac{dz}{z} J_4(z^{-1}) K_2(4\sqrt{y}\cdot z). \qquad (Б.8)$$

Литература

1. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей, ГИТТЛ, 1957.
2. Л.Б. Окунь. Слабое взаимодействие элементарных частиц. Физматгиз, 1963.
3. C.N.Yang, R.L.Mills. Phys. Rev., 96, 191 (1954); J.J.Sakurai. Ann. of Phys., 11, 1 (1960).
4. T.D.Lee. Phys. Rev., 128, 899 (1962); T.D.Lee. Phys. Rev. Lett., 12, 569 (1964).
5. T.D.Lee, C.N.Yang. Phys. Rev., 128, 885 (1962).

6. В.С. Ваняшин. ЖЭТФ, 43, 689 (1962).

7. G.Feinberg, A.Pais. Phys. Rev., 131, 2724 (1963); 133, B477 (1964).

8. N.N.Khuri, A.Pais. Rev. Mod. Phys., 36, 590 (1964); A.Pais. T.T.Wu. Phys. Rev., 134, 1303 (1964).

9. А.Т. Филиппов. Препринт ОИЯИ, Р-1493, Дубна, 1963.

10. B.A.Arbuzov, A.T.Filippov. Phys.Lett., 13, 95 (1964).

11. S.Edwards. Phys. Rev., 90, 284 (1953).

12. M.Gell-Mann. The Eighfold Way. A Theory of Strong Interaction Symmetry. CTSL - 20 (1961).

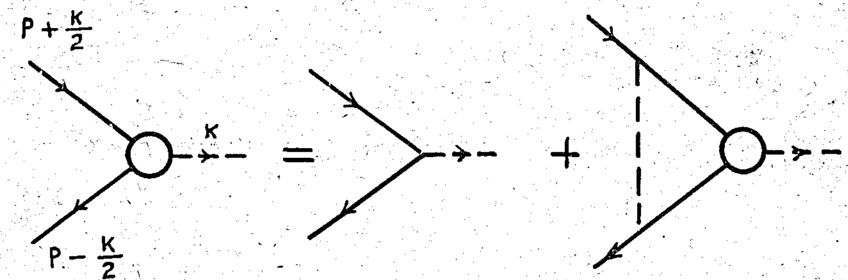
13. G.C.Wick. Phys. Rev., 96, 1124 (1954).

14. A.Erdely, W.Magnus, F.Oberhettinger, F.G.Tricomi. Higher Transcendental Functions, V.I.New York, Toronto, London (1953).

15. A.Salam. Phys. Rev., 130, 1287 (1963); A.Salam, R.Delbourgho. Phys. Rev., 135, B1398 (1964).

16. Э. Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. ОНТИ. Харьков, 1939.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 декабря 1964 г.



P + K/2
K
P - K/2

Арбузов Б.А., Филиппов А.Т.

Р-1910

Вершинная функция в неперенормируемой теории поля

В работе исследуется приближенное уравнение для вершинной функции в неперенормируемой теории скалярных и массивных векторных частиц. Показано, что для устранения расходимостей можно сформулировать процедуру перенормировки, аналогичную той, которая используется в неперенормируемых теориях. Построен итерационный процесс, который сводится к последовательному решению достаточно простых интегральных уравнений. Изучены решения этих уравнений и установлено существование и единственность решения для перенормированной вершины. Это решение не содержит расходимостей, убывает на бесконечности во всей комплексной плоскости p^2 и имеет логарифмическую точку ветвления при $g^2=0$ (члены вида $g^2 \log g^2$).

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна. 1964.

P-1910

Arbuzov B.A., Filippov A.T.

Vertex Function in Nonrenormalizable Field Theory

An approximate equation is considered for the vertex function Γ_μ in the nonrenormalizable field theory of interaction between the scalar particles and the massive vector ones. The possibility of formulating some renormalization procedure for the removal of divergences is shown. An iteration method for solving the equation for Γ_μ is developed. It consists in a successive solution of some simple integral equations. The solutions of these equations are studied and the existence of the unique solution for the renormalized vertex function is proved. This solution is free from divergences, decreases at infinity in the complex p^2 plane and has the logarithmic branch point at $g^2=0$ /the terms of the form $g^2 \log g^2$/.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research. Dubna. 1964.