ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-1908

В.К. Лукьянов, И.Ж. Петков

НЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ ТЯЖЕЛЫХ ЧАСТИЦ С ВОЗБУЖДЕНИЕМ КОЛЛЕКТИВНЫХ СОСТОЯНИЙ ЯДЕР

Phys. Lett, 1965, v 15, n 2, p 149-151
Изв. АН СССР. Сер. физ., 1965, т 29, н 5, стр 823-829.

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1964

Р-1908

В.К. Лукьянов, И.Ж. Петков

НЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ ТЯЖЕЛЫХ ЧАСТИЦ С ВОЗБУЖДЕНИЕМ КОЛЛЕКТИВНЫХ СОСТОЯНИЙ ЯДЕР

Введение

В последнее время процессам неупругого рассеяния тяжелых частиц уделяется большое внимание, и это связано в основном с тем, что их можно использовать для получения информации о структуре низколежащих уровней ядер. Особое место здесь принадлежит кулоновскому возбуждению ядер[1]. В этом случае (обычно $E \ll U_B$) на основании известных законов электромагнитного взаимодействия удается выделить в первом порядке теории возмущений ту часть сечения, которая зависит лишь от структуры ядра. Например, для E2 – переходов сечение пропорционально вероятности B(E2)-перехода.

Однако в ряде случаев, особенно при рассеянии тяжелых ионов, такая простая связь отсутствует, поскольку взаимодействие уже нельзя считать малым и, следовательно, первое приближение теории возмущений дает неправильный результат. На эксперименте это приводит к тому, что при некоторых условиях (увеличение энергии, заряда и др.) наблюдается с большой вероятностью ряд переходов, запрещенных в первом порядке (обычно $E < U_B$). Вычисления тогда проводятся в адиабатическом приближении по формуле[2]:

$$d\sigma = d\sigma_R \frac{1}{2I_i+1} \sum_{M_i M_f} \left| \langle \Phi_f | e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} U^{\text{кул.}}_{\text{вз.}} dt} | \Phi_i \rangle \right|^2 , \tag{1}$$

где $d\sigma_R$ – сечение резерфордовского рассеяния, $\Phi_{i,f}$ – волновые функции начального (i) и конечного (f) состояний ядра.

Иногда для измерения слабых переходов приходится увеличивать энергию падающих частиц вплоть до кулоновского барьера ($E \approx U_B$). В этом случае необходимо наряду с кулоновским учитывать еще и ядерное взаимодействие, т.е. выбирать

$$U_{\text{вз}} = U^{\text{кул}}_{\text{вз}} + U^{\text{яд}}_{\text{вз}} = \sum_{\lambda\nu} [q^{\text{кул}}_{\lambda}(r)\mathfrak{M}^{\text{кул}}_{\lambda\nu}(\xi) + q^{\text{яд}}_{\lambda}(r)\mathfrak{M}^{\text{яд}}_{\lambda\nu}(\xi)] \cdot \tag{2}$$

$$\cdot Y_{\lambda\nu}(\theta 0) e^{i\nu\phi} ,$$

где $r\theta\phi$ – координаты относительного движения, а $\{\xi\}$ – координаты возбуждаемого ядра. При $E \approx U_B$ все еще можно считать, что движение частиц происходит по кулоновским траекториям, тогда, подставляя (2) в (1), можно оценить вклад ядерных взаимодействий в сечение возбуждения. Соответствующие вычисления в первом порядке по $U_{\text{вз}}$ были выполнены в работе[3]; при этом оказалось, что для

$0^+ - 0^+$ – переходов получается ответ в аналитическом виде; был также сделан ряд выводов об энергетической зависимости сечения возбуждения в районе барьера и чувствительности его к выбору параметров ядерного потенциала взаимодействия $U^{яд}_{вз}$.

Вывод формулы сечения

Будем рассматривать надбарьерное неупругое рассеяние тяжелых частиц ($E > U_B$). При этом область классических углов отклонения имеет предел $\theta_0 \approx \frac{U_B}{E} < 1$, поэтому рассмотрение можно проводить в приближении большой энергии, когда амплитуда упругого рассеяния для наблюдаемых углов θ задается в виде[4]:

$$f(\theta) = -\frac{ik}{2\pi}\int_0^\infty \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\phi\, e^{-i2k\rho \sin\frac{\theta}{2}\cos\phi - \frac{i}{\hbar v}\int_{-\infty}^{\infty} U\, dz} \tag{3}$$

Подставляя сюда $U = \tilde{U}_0(\vec{r}) + U_{вз}(\vec{r}\xi)$, где

$$\tilde{U}_0(\vec{r}) = U_0(\vec{r}) + iV_0(r) = U_0^{кул}(\vec{r}) + U_0^{яд}(\vec{r}) + iV_0(\vec{r})$$ –

центрально-симметричная часть потенциала взаимодействия падающего иона с ядром, V_0 – его мнимая часть, а $U_{вз}$ имеет вид (2), можем записать амплитуду неупругого рассеяния в адиабатическом приближении ($kR\frac{\Delta E}{E} \ll 1$, ΔE – энергия возбуждения)[5]:

$$f_{неупр} = \langle \Phi_f | f(\theta\xi) | \Phi_i \rangle . \tag{5}$$

В случае деформированного ядра $f(\theta\xi)$ означает амплитуду рассеяния на неподвижном ядре, ориентация которого в пространстве не изменяется в процессе рассеяния.

Обычный метод вычисления $f(\theta\xi)$ соответствует нахождению первого порядка теории возмущений по $U_{вз}$ (см., например,[5], а также другие работы Дроздова, Инопина, Блэйра). Такое ограничение лишь первым линейным по $U_{вз}$ членом в разложении $\exp\left(-\frac{i}{\hbar v}\int_{-\infty}^{\infty} U_{вз}\, dz\right)$ справедливо только в области углов $\theta < (a_n k R)^{-1}$, где a_n – параметр деформации ядра. Однако этот интервал углов не всегда оказывается интересным. Например, для падающих тяжелых ионов с $k \approx 10$ при $R \approx 10$ и $a_n \approx 0{,}3$ имеем $\theta < \theta_1 \approx 5^0$, что соответствует углам, трудно достижимым в эксперименте. Поэтому в дальнейшем мы не будем пользоваться предположением о малости $U_{вз}$.

Итак, запишем исходное выражение:

$$f(\theta\xi) = -\frac{ik}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} d\rho\, d\phi\, F(\rho)\, e^{-i2k\sin\frac{\theta}{2}\cos\phi - \frac{i}{\hbar v}\int_{-\infty}^{\infty} U(r)\, dz}\; e^{-i\sum_{\lambda\nu} L_{\lambda\nu}(\rho\xi) e^{i\nu\phi}} , \tag{6}$$

где

$$\sum_{\lambda\nu} L_{\lambda\nu}(\rho\xi) e^{i\nu\phi} = \frac{1}{\hbar v}\int_{-\infty}^{\infty} U(\vec{r}\xi)\, dz , \tag{7}$$

$$F(\rho) = \rho \exp\left[-\frac{i}{\hbar v}\int_{-\infty}^{\infty} V_0(\vec{r})\, dz\right] . \tag{8}$$

Представим последнюю экспоненту в (6) в виде ряда

$$\exp\left[-i\sum_{\lambda\nu} L_{\lambda\nu}(\rho\xi) e^{i\nu\phi}\right] = \sum_m \frac{1}{m!}\left[-i\sum_{\lambda\nu} L_{\lambda\nu}(\rho\xi) e^{i\nu\phi}\right]^m . \tag{9}$$

Подставляя теперь (9) в (6), произведем там почленное интегрирование по $d\phi$, используя определение функции Бесселя

$$J_m(z) = \frac{i^m}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp i\left[-z\cos\phi + m\phi\right] d\phi . \tag{10}$$

В рассматриваемом случае при $\theta > \theta_1$ будем иметь $z = 2k\rho\sin\frac{\theta}{2} \approx 2kR\sin\frac{\theta}{2} \gg 1$. Поэтому для каждого члена ряда (вплоть до $m_0 < z$) можно использовать ассимптотическое представление:

$$J_m(z) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi z}}\, i^{-m}\left\{(1-i)e^{iz} + (-1)^m (1+i) e^{-iz}\right\} , \tag{11}$$

при этом m_0 оказывается обычно настолько большим, что вклад остальных членов ряда (9) с $m > m_0$ пренебрежимо мал. Теперь можно снова свернуть проинтегрированный по $d\phi$ ряд в exp и получить[x)]

$$f(\theta\xi) = -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{k}{2\pi\sin\frac{\theta}{2}}}\left\{(1-i)\int_0^\infty d\rho\, \rho^{-1/2} F(\rho)\, e^{iA_{(+)}(\rho)}\, e^{-i\sum_{\lambda\nu} L_{\lambda\nu}(\rho\xi)(-1)^\nu} + (1+i)\int_0^\infty d\rho\, \rho^{-1/2} F(\rho)\, e^{iA_{(-)}(\rho)}\, e^{-i\sum_{\lambda\nu} L_{\lambda\nu}(\rho\xi)}\right\} , \tag{12}$$

где

$$A_{(\pm)}(\rho) = \pm 2k\rho\sin\frac{\theta}{2} - \frac{1}{\hbar v}\int_{-\infty}^{\infty} U_0(\vec{r})\, dz . \tag{13}$$

Обратим внимание на то, что подынтегральная функция в (12) сильно осциллирует, поэтому интегрирование можно провести медом перевала. Следует учесть при этом, что обычно, как показывают оценки, число осцилляций $\exp(iA_{(\pm)})$ примерно на порядок превышает число осцилляций $\rho^{-1/2} F(\rho) \exp\left(-i\sum_{\lambda\nu} L_{\lambda\nu}(\rho\xi)\right)$, а значит, при отыскании точек перевала этот последний сомножитель можно не учитывать.

---

x) Фактически тот же результат (12) можно получить, интегрируя исходное выражение (6) по ϕ методом стационарной фазы.

Таким образом, получаем окончательный результат:

$$f(\theta\xi) = f_{(+)} e^{-i\sum\limits_{\lambda\nu} L_{\lambda\nu}(\rho_\epsilon \xi)(-1)^\nu} + f_{(-)} e^{-i\sum\limits_{\lambda\nu} L_{\lambda\nu}(\rho_\epsilon, \xi)}, \tag{14}$$

где

$$f_{(\pm)} = -\frac{i(1\mp i)}{2}\sqrt{\frac{k}{\sin\frac{\theta}{2}}}\, e^{iA_{(\pm)}(\rho_\epsilon)} \sqrt{\frac{1}{\rho_\epsilon |A''_{(\pm)}|}}\, F(\rho_\epsilon). \tag{15}$$

Точки перевала $\rho_\epsilon(\theta)$ (где $\epsilon = \pm$) находим из уравнения

$$\frac{d}{d\rho} A_{(\pm)} = 0. \tag{16}$$

Заметим, что в области классических углов $\theta < \theta_0$ в каждую из амплитуд $f_{(\pm)}$ дают вклад две действительные точки перевала ρ_ϵ, однако практически всегда главный вклад дает лишь одна из них. При $\theta = \theta_0$ обе точки перевала совпадают, но здесь $A''_\rho = 0$, и поэтому пользоваться формулой (15) уже нельзя – нужно учитывать третью производную в разложении показателя экспоненты A'''_ρ. При $\theta > \theta_0$ ρ_ϵ становится комплексной, что приводит к экспоненциальному спаду сечений с ростом угла наблюдения/4/.

Подставляя (14) в формулу (5), получнм амплитуду неупругого рассеяния в виде

$$f_{\text{неупр}}(\theta) = f_{(+)} \langle\Phi_f| e^{-i\sum\limits_{\lambda\nu} L_{\lambda\nu}(\rho_\epsilon\xi)(-1)^\nu} |\Phi_i\rangle + f_{(-)} \langle\Phi_f| e^{-i\sum\limits_{\lambda\nu} L_{\lambda\nu}(\rho_\epsilon\xi)} |\Phi_i\rangle. \tag{17}$$

Через нее выражается дифференциальное сечение (1):

$$d\sigma = \frac{1}{2I_i + 1}\sum_{M_i M_f} |f_{\text{неупр}}(\theta)|^2. \tag{18}$$

Из полученного выражения (17) можно сделать некоторые выводы. Во-первых, в частном случае $i = f$ получаем амплитуду упругого рассеяния, и если $U_{\text{вз}}$ возникает из-за деформации ядра, то эта амплитуда соответствует упругому рассеянию в поле деформированного потенциала. Положив в формуле (17) $U_{\text{вз}} = 0$, получим амплитуду упругого рассеяния в поле центрально-симметричного потенциала (в приближении малых углов $\theta < 1$):

$$f = f_{(+)} + f_{(-)}. \tag{19}$$

В общем случае $i \neq f$ полученное выражение (18) дает сечение возбуждения любого n – фононного перехода (кратность возбуждения), в то время как учет лишь первого члена в разложении экспоненты (17) дает только однофононные переходы/5/. Полученный результат (17), (18) напоминает по форме выражение (1), которое лежит в основе теории кратного кулоновского возбуждения/2/; более того, прн вычислении

структурного сомножителя $\langle\Phi_f| \exp(-i\sum\limits_{\lambda\nu} L_{\lambda\nu})|\Phi_i\rangle$ можно использовать методы расчета, развитые в этой теории.

Метод расчета

При конкретном вычислении сечения неупругого рассеяния центральное место занимает нахождение точки перевала из уравнения (16). В общем случае получить аналитическое выражение для $\rho_\epsilon = \rho_\epsilon(\theta)$ невозможно. Поэтому можно воспользоваться приближенным методом/6/, который заключается в том, что численно найденная из (16) зависимость $\rho_\epsilon(\theta)$ в области классических углов $\theta < \theta_0$ апроксимируется логарифмической параболой

$$\frac{dA_{(\pm)}}{d\rho} = 2k\{(\pm)\sin\frac{\theta}{2} + [\sin\frac{\theta_0}{2} - c(\ln\frac{\rho-\rho_1}{d})^2]\} = 0, \tag{20}$$

где константы c, d, ρ_1 подбираются эмпирически; знаки $(\pm)$ перед $\sin\frac{\theta}{2}$ соответствуют индексам амплитуд $f_{(\pm)}$. Отсюда получаем выражение для точек перевала

$$\rho_\epsilon = \rho_1 + d e^{\epsilon\sqrt{\frac{(\pm)\sin\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta_0}{2}}{d}}}, \tag{21}$$

которые для углов $\theta > \theta_0$ (в амплитуде $f_{(-)}$) являются уже комплексными. Подставляя это выражение в формулу (15), можно получить амплитуду упругого рассеяния (19):

$$f \approx f_{(-)} = -\frac{i(1+i)}{4}\sqrt{\frac{d}{c\gamma\sin\frac{\theta}{2}}}\, F(\rho_-) e^{4kcd(\gamma\cos\gamma - \sin\gamma)} e^{-iX_1} \tag{22}$$

при условии, что $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$, где $\gamma = \sqrt{\frac{\sin\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta_0}{2}}{c}}$, X_1 – действительная фаза, которую приводить не будем.

Заметим, что принятая апроксимация (20) неудовлетворительна для описания кулоновской фазы, поэтому амплитуда в области углов $\theta < \theta_0$ получается неправильной. Однако это не столь важно, поскольку область $\theta < \theta_0$ соответствует в основном большим прицельным параметрам (большое ρ) и сечение должно совпадать с резерфордовским сечением. Другим ограничением апроксимации (20) является то, что логарифмическая парабола в точке $\rho = \rho_1$ стремится к $-\infty$ и не совпадает с истинным ходом расчетной кривой. Эту трудность пытаются обойти физическим предположением о черноте ядра для $\rho < \rho_1$; но тогда при некоторых углах $\theta > \theta_0$ ($\gamma \gg \frac{\pi}{2}$), где $\mathrm{Re}\rho_- < \rho_1$, контур интегрирования уже нельзя провести через точку перевала (поскольку $\rho_\epsilon(\theta)$ не имеет смысла при $\mathrm{Re}\rho_\epsilon < \rho_1$). Поэтому ограничиваются лишь оценкой амплитуды упругого рассеяния в предположении, что основной вклад в нее дает контур интегрирования по мнимой оси/6/.

Отмеченные недостатки можно устранить, если на участках $\rho < \rho_1$ и $\rho \to \infty$ ввести другую, более точную апроксимацию истинной расчетной кривой (16). Тогда можно описать упругое рассеяние во всем интервале углов. Проиллюстрируем это на следующем примере.

Выберем потенциал

$$U_0 = U_0^{кул} + U_0^{яд} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} + \beta e^{-\delta r^2}. \tag{23}$$

Для значений параметров

$$\delta = \frac{\ln 0{,}1 |v_0|}{a(2R + a\ln 0{,}2 |v_0|) \ln 0{,}2 |v_0|},$$

$$\beta = -0{,}5 |v_0| \exp(\delta R^2), \tag{24}$$

$$R = r_0 A^{1/3},$$

где a, v_0, r_0 – параметры потенциала Вудса-Саксона, $U_0^{яд}$ достаточно хорошо описывает область диффузного слоя при $r \gtrsim R$. Область $r < R$ оказывается вообще несущественной из-за сильного ядерного поглощения $V_0 = i\beta\xi e^{-\delta r^2}$ (ξ – параметр поглощения) и не будет давать вклада в сечение. Это означает, что не нужно учитывать вклад точек перевала с $\mathrm{Re}\rho_\ell \ll R$. В этом случае уравнение (16) имеет вид:

$$\frac{dA_{(\pm)}}{d\rho} = 2k\left((\pm)\sin\frac{\theta}{2} + \frac{\eta}{k}\frac{1}{\rho} + \frac{\alpha\beta}{k}\sqrt{\pi\delta}\,\rho e^{-\delta\rho^2}\right) = 0, \tag{25}$$

где $\eta = \frac{z_1 z_2 e^2}{\hbar v}$, $\alpha = \frac{1}{\hbar v}$, v – скорость относительного движения. Решая это уравнение, получаем приближенно:

$$\rho_- = \frac{\eta}{k}\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}, \quad \theta < \theta_0,$$

$$\rho_- = g e^{-i\psi}, \quad \theta > \theta_0, \tag{26}$$

где

$$g = \delta^{-1/2}(|\ln Y|^2); \quad \Psi = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\pi}{|\ln Y|};$$

$$Y = \left(\mathrm{Sin}\frac{\theta}{2} - \frac{\eta}{k}\frac{1}{\rho_0}\right)\Big/\left(\frac{\alpha\beta}{k}\sqrt{\pi\delta}\,\rho_0\right); \quad \rho_0 = R + a\ln 0{,}2|v_0|. \tag{26}$$

Соответствующее выражение для амплитуды упругого рассеяния получается подстановкой (26) в уравнение (15) и имеет вид:

$$f \approx f_{(-)} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\eta}{k}\right)\frac{1}{(\sin\frac{\theta}{2})^2}\cdot e^{iX_2}, \quad \theta < \theta_0,$$

$$f \approx f_{(-)} = -\frac{i(1+i)}{2}\frac{F(\rho_-)}{\sqrt{2\rho_-\sin\frac{\theta}{2}}}\exp\left[-2k g\sin\frac{\theta}{2}\sin\Psi + 2\eta\Psi\right]\cdot \tag{27}$$

$$\cdot\left\{\left(\frac{\eta}{k}\right)^2 g^{-4} + \left(\frac{\alpha\beta}{k}\sqrt{\pi\delta}\right)^2 Y^2(1 + 2\pi + 2|\ln Y|) + \frac{2\alpha\beta\eta}{k^2}\sqrt{\frac{\pi}{\delta}}\, g^{-4}\cdot Y\,\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[2\pi^2 + 2|\ln Y|^2 - |\ln Y|\right]\right\}^{-1/4}\cdot e^{iX_3}, \quad \theta > \theta_0,$$

где X_2 и X_3 – действительные фазы.

В случае углов рассеяния $\theta \approx \theta_0$ вторая производная $A''_{(\pm)} \approx 0$, и поэтому вместо формулы (15) следует пользоваться соответствующей формулой метода перевала с учетом третьей производной:

$$f \approx f_{(-)} \approx -i(1+i)\pi\sqrt{\frac{k}{\rho_*(\theta)\sin\frac{\theta}{2}}}\,F(\rho_*)\sqrt[3]{\frac{2}{|A'''(\rho_*(\theta))|}}\,\mathrm{Ai}(0), \tag{28}$$

где $\rho_*(\theta)$ – точка перевала для углов $\theta \approx \theta_0$, а функция Эйри $\mathrm{Ai}(0) = 0{,}3550$.

При вычислении амплитуды неупругого рассеяния следует полученные точки перевала (26), (21) подставлять в выражение для $L_{\lambda\nu}(\rho\xi)$ формулы (7). В случае коллективных возбуждений потенциал взаимодействия (2) можно выбрать следующим образом. Если ограничиться квадрупольными деформациями ядра, то для кулоновского потенциала это будет квадрупольный член мультипольного разложения, а для ядерного – первый член в разложении потенциала по деформации ядра $\Delta R(\xi)$:

$$R = R_0 + \Delta R; \quad \Delta R = R_0\sum_{\nu n = 0, \pm 2} a_n\, \overset{*}{D}{}^{(2)}_{\nu n}(\Theta)\, Y_{2\nu}(\theta\phi); \tag{29}$$

$$a_0 = \beta\cos\gamma, \quad a_{\pm 2} = \beta\frac{\sin\gamma}{\sqrt{2}},$$

где β и γ - параметры деформации ядра. Тогда, учитывая (29), получим с помощью формул (2) и (7) следующие выражения:

$$L_{20} = -a\sqrt{\frac{5}{16\delta}}\cdot e^{-\delta\rho^2}\Big\{\frac{d\beta}{dR}\big[3\sqrt{\pi\delta}\cdot\rho\cdot e^{\delta\rho^2}(\mathrm{erf}(\rho\sqrt{\delta})-1)+2\big]+$$

$$\beta\frac{d\delta}{dR}(\rho^2-\delta^{-1})\Big\}_{R=R_0} R_0\sum_{n=0\pm 2} a_n D^{*(2)}_{on}(\Theta),$$

$$L_{2\pm 2} = a\Big\{\rho\sqrt{\frac{15\pi}{32}}\frac{d\beta}{dR}\big[\mathrm{erf}(\rho\sqrt{\delta})-1\big]+\beta\sqrt{\frac{15}{32\delta}}\rho^2\frac{d\delta}{dR}e^{-\delta\rho^2}-$$

$$-\sqrt{\frac{3}{10\pi}}\frac{Z_1 Z_2 e^2 R}{\rho^2}\Big\}_{R=R_0}\cdot R_0\sum_{n=0\pm 2} a_n D^{*(2)}_{\pm 2n}(\Theta). \tag{30}$$

Таким образом, для обработки конкретного эксперимента следует лишь вычислить структурный фактор в амплитуде (17), для этого надо задать ядерные волновые функции Φ_i и Φ_f /.

Заключение

Итак, предлагается метод расчета сечений неупругого рассеяния с возбуждением коллективных состояний ядра кулоновским и ядерным потенциалом взаимодействия при надбарьерных энергиях падающих частиц. Этот метод может найти применение для анализа экспериментов с тяжелыми ионами и a - частицами, когда нельзя ограничиться первым порядком теории возмущения. Для исследования механизма возбуждения ядерным полем интересно рассматривать угловое распределение упруго рассеянных частиц при углах $\theta > \theta_0$, т.е. там, где существенно включаются ядерные силы.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить С.И. Дроздова за полезное обсуждение работы.

Литература

1. К.А. Тер-Мартиросян. ЖЭТФ, 22, 284 (1952); K.Alder, A.Bohr, T.Huus, B.Mottelson, A.Winther. Rev. Mod. Phys., 28, 432 (1956).
2. K.Alder, A.Winther. Mat-Phys. Medd. Kgl. dunske Vidc, Selskab., 32 (8) (1960).
3. В.К. Лукьянов. Изв. АН СССР, серия физич., 28, 1212 (1964).
4. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Квантовая механика, Физматгиз, 1963.
5. С.И. Дроздов. ЖЭТФ, 44, 335 (1963).
6. K.W.Ford, J.A.Wheeler. Ann. of Phys., 7, 259, 287 (1959).

Рукопись поступила в издательский отдел
2 декабря 1964 г.