

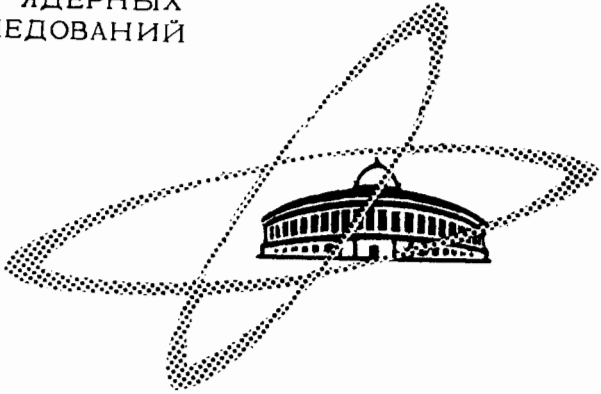
C 326 + E341.5

A-62

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P - 1906



И. Амирханов, Б.Н. Захарьев

НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ ПРОНИЦАЕМОСТИ
БАРЬЕРОВ ДЛЯ СЛОЖНЫХ ЧАСТИЦ

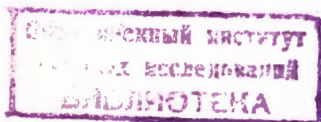
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1964

P - 1906

И. Амирханов, Б.Н. Захарьев

НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ ПРОНИЦАЕМОСТИ
БАРЬЕРОВ ДЛЯ СЛОЖНЫХ ЧАСТИЦ



Данная работа является продолжением исследований ^{/2,3/} конкретных свойств сложных частиц, двигающихся во внешнем поле. Многие свойства таких систем можно изучить на простейшем примере одномерной задачи трех тел. При конкретных расчетах мы использовали метод, изучению корректности которого посвящены работы ^{/4,5/}.

Интересен не только сам факт существования эффекта асимметрии проницаемости барьеров для сложных частиц, который, возможно, не является неожиданным для физиков, хорошо знакомых с квантовой механикой. Представляет определенный интерес количественная оценка эффекта на конкретной модели. Получить такую оценку, к сожалению, нельзя без большого объема сложных расчетов. (Расчеты проводились нами на электронной счетной машине.)

Детальное изучение задачи трех тел позволяет делать предсказания о ряде свойств более сложных систем. Мы предполагаем в будущем рассмотреть вопрос о том, чем может помочь понимание поведения сложных частиц во внешнем поле в решении более сложных задач, таких, например, как задачи четырех тел и задача о возбуждениях (типа сложных квазичастиц) систем многих тел.

Стоит отметить, что в последнее время перед физиками, занимающимися квантовой механикой, открывается широкое поле деятельности по объяснению ряда загадочных свойств живой материи, открытых биофизиками. Отыскание конкретных квантовых механизмов, играющих наиболее существенную роль в фундаментальных биологических процессах, в известной мере является обязанностью физиков. Авторы надеются, что данная работа хоть в отдаленной степени будет соответствовать и этой задаче.

Система уравнений

Движение сложной частицы во внешнем поле описывается бесконечной системой дифференциальных уравнений ^{/4/}

$$-\ddot{\phi}_n(x) - \sum_{m \neq n} (K_{nm}(x)\phi_m(x) + 2Q_{nm}(x)\phi'_m(x)) + C_n \phi_n = E\phi_n. \quad (1)$$

Здесь функции ϕ_n описывают движение центра инерции сложной частицы в состоянии n по внутреннему движению; коэффициенты K_{mn} , Q_{mn} и C_n определены так:

$$\bar{U}_n = E_n(x) - K_{nn}(x); K_{mn}(x) = \int \Phi_m \Phi_n'' dy; Q_{mn}(x) = \int \Phi_m \Phi_n' dy, \quad (2)$$

где E_1 и Φ_1 — собственные значения и собственные функции уравнения Шредингера, описывающего внутреннее движение сложной частицы при фиксированном положении ее центра инерции x . В случае, когда сложная частица состоит из двух простых,

$$-\ddot{\Phi}_n + 2(m_1 + m_2)[V_{12}(y) + \bar{U}_1(x, y) + \bar{U}_2(x, y) - E_n] \Phi_n = 0. \quad (3)$$

Здесь $V_{12}(y)$ — взаимодействие между собой простых частиц, составляющих сложную, \bar{U}_i — внешнее поле, действующее на эти простые частицы.

Асимметрия проницаемости

Покажем, что проницаемость барьера любой формы для простой частицы не зависит от того, в каком направлении на него падают частицы. Проведем это доказательство так, чтобы его легко было обобщить на случай сложных частиц.

Если на потенциальный барьер из $-\infty$ падает единичный поток простых частиц, то волновая функция будет иметь вид:

$$\Psi_-(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx} & \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ Ae^{ik'x} & \text{при } x \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{где } k = \sqrt{2m(E - V(-\infty))}, \quad k' = \sqrt{2m(E - V(\infty))}.$$

Коэффициент прохождения барьера равен $D_- = |A|^2 \frac{k'}{k}$. Если частицы падают на барьер справа (из $+\infty$), то

$$\Psi_+(x) = \begin{cases} e^{-ik'x} + re^{ik'x} & \text{при } x \rightarrow +\infty, \\ ae^{-ikx} & \text{при } x \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (5)$$

Коэффициент прохождения барьера справа налево равен $D_+ = |a|^2 \frac{k}{k'}$. В силу действительности коэффициентов в уравнении Шредингера решением будет также и Ψ_+^* :

$$\Psi_+^*(x) = \begin{cases} e^{ik'x} + r^* e^{-ik'x} & \text{при } x \rightarrow +\infty, \\ a^* e^{ikx} & \text{при } x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (6)$$

Поскольку уравнение Шредингера есть линейное дифференциальное уравнение второго порядка, то мы можем с помощью двух линейно независимых его решений - (5) и (6) - построить любое его решение, например (4). Для этого умножим (5) на $-\frac{r^*}{a^*}$, а (6) разделим на a^* и сложим их. Получаем:

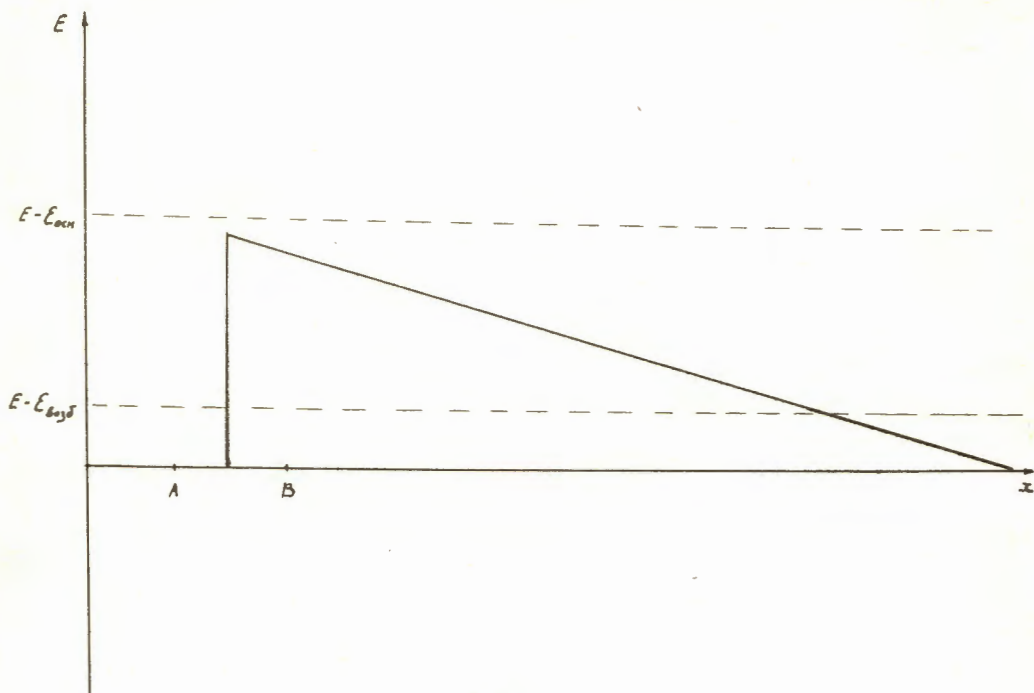
$$A = \frac{1 - |r|^2}{a^*} = \frac{k}{k'} a, \quad (7)$$

т.е. $D_+ = D_-$.

Вообще для любых двух решений уравнения Шредингера в этом случае имеется соответствующая однозначная связь.

Движение сложной частицы описывается бесконечной системой дифференциальных уравнений второго порядка (1). Пусть энергия сложной частицы такова, что частица может уходить в бесконечность ($x \rightarrow \pm \infty$) только в основном и в первом возбужденном состояниях, а остальные состояния могут возбуждаться реально или виртуально лишь вблизи барьера; т.е. функции ϕ_n ($n > 2$), описывающие движение сложной частицы в возбужденных состояниях, экспоненциально затухают вдали от барьера. Система уравнений, удовлетворяющая таким граничным условиям, имеет четыре линейно независимых решения (при энергии, достаточной для возбуждения m состояний сложной частицы на бесконечности, число линейно независимых решений системы будет $2m$). Таким образом, с помощью некоторого решения системы и его сопряженного (2 линейно независимых решения) мы не можем получить любое решение системы. Мы не получаем в этом случае однозначной связи между двумя различными процессами. И соотношение, например, между коэффициентами прохождения сложных частиц в основном состоянии в противоположных направлениях через барьер будет зависеть от конкретного вида потенциального барьера. Однако имеется другое соотношение. С помощью двух различных решений системы и их сопряженных (всего 4 решения) мы можем построить любое решение системы. Так, например, если мы знаем решение для процессов, когда из $-\infty$ падает поток частиц только в основном и только в первом возбужденном состояниях, то с помощью этих решений мы можем описать любой другой процесс, например, в случае, когда частицы падают на барьер справа.

Поясним возможность асимметрии проницаемости более наглядным, хотя и менее строгим, чем в предыдущих рассуждениях, образом. Пусть на барьер, изображенный на рис. 1, падает слева поток сложных частиц в основном состоянии. Кинетическая энергия движения центров масс этих частиц будет $E - \epsilon_{осн}$ (E - полная энергия сложной частицы, $\epsilon_{осн}$ - энергия основного состояния по внутреннему движению). Барьер на рис. 1 несимметричный: левый край его резко обрывается, и у этого края происходит сильное возбуждение частиц, что приводит к уменьшению энергии центра масс до величины $E - \epsilon_{возб}$ ($\epsilon_{возб}$ - энергия возбужденного состояния по внут-



Р и с. 1

Область $A < x < B$ характеризуется сильным смешиванием состояний внутреннего движения сложной частицы. $A - B = a$, где a — размер сложной частицы.

реннему движению). Правая сторона барьера меняется плавно, и переходов между внутренними состояниями сложной частицы в этой области практически не происходит. Таким образом, частицы, падающие в основном состоянии на барьер слева, сильно возбуждаются у самого его края, вследствие чего барьер для них становится труднопроходим, и они сильно отражаются. Если же частицы падают на барьер в основном состоянии справа, то возбуждаться они начинают лишь тогда, когда пройдут почти весь барьер, и это не должно сильно уменьшить проникаемость. Итак, в основном состоянии частицы проходят через барьер на рис. 1 легче справа. Рассуждая аналогично, получим, что в возбужденном состоянии частицы проходят барьер легче в противоположном направлении.

Сохранение потока

Для случая сложных частиц несколько изменяется формула, определяющая плотность потока.

Умножим (1) на ϕ_n^* , а уравнение, сопряженное (1), умножим на ϕ_n и вычтем из первого второе, получим:

$$\begin{aligned} (\phi_n^* \phi_n' - \phi_n \phi_n'^*) + \sum_m K_{nm} (\phi_n^* \phi_m - \phi_n \phi_m^*) + \\ + \sum_m 2Q_{nm} (\phi_n^* \phi_m' - \phi_n \phi_m'^*) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Просуммируем (8) по n и воспользуемся формулой $K_{mn} = (Q^2)_{mn} + Q_{mn}'$, а также антисимметрией Q_{mn} относительно перестановки индексов. В результате получим:

$$\frac{d}{dx} \left\{ \sum_n (\phi_n^* \phi_n' - \phi_n \phi_n'^*) + 2 \sum_{m < n} Q_{nm} (\phi_n^* \phi_m - \phi_n \phi_m^*) \right\} = 0. \quad (9)$$

Величина, стоящая в фигурных скобках, и определяет поток сложных частиц. Вдали от барьера $Q = 0$, и поток сложных частиц равен просто сумме потоков частиц в различных состояниях.

Для проверки точности численного счета на машине удобно пользоваться формулой (9), в которой решение системы (1) и его сопряженное заменяются на два произвольных линейно независимых решения системы (1).

Коэффициент прохождения

Получим формулу для коэффициента прохождения через потенциальный барьер в случае, когда энергия сложной частицы достаточна для возбуждения первого возбужденного состояния. Ограничимся тремя уравнениями в системе (1). (Случай приближения с большим числом уравнений рассматривается совершенно аналогично.) Пусть поток частиц в основном состоянии падает на барьер справа. Граничные условия в этом случае имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}_{x \rightarrow \infty} = \begin{pmatrix} e^{-ik_1 x} + R_1 e^{ik_1 x} \\ R_2 e^{ik_2 x} \\ R_3 e^{-\kappa_3 x} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}_{x \rightarrow -\infty} = \begin{pmatrix} A_1 e^{-ik_1 x} \\ A_2 e^{-ik_2 x} \\ A_3 e^{+\kappa_3 x} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где

$$k_{1,2} = \sqrt{2M(E - \epsilon_{1,2})}; \quad \kappa_3 = \sqrt{2M(\epsilon_3 - E)} \quad (11)$$

Решение, удовлетворяющее (10), может быть получено как линейная комбинация шести линейно независимых решений системы. Поскольку мы сразу можем удовлетворить требованию отсутствия слева от барьера растущей влево экспоненты в ϕ_3 , то достаточно пяти линейно независимых решений. Выберем граничные условия для них слева от барьера следующим образом:

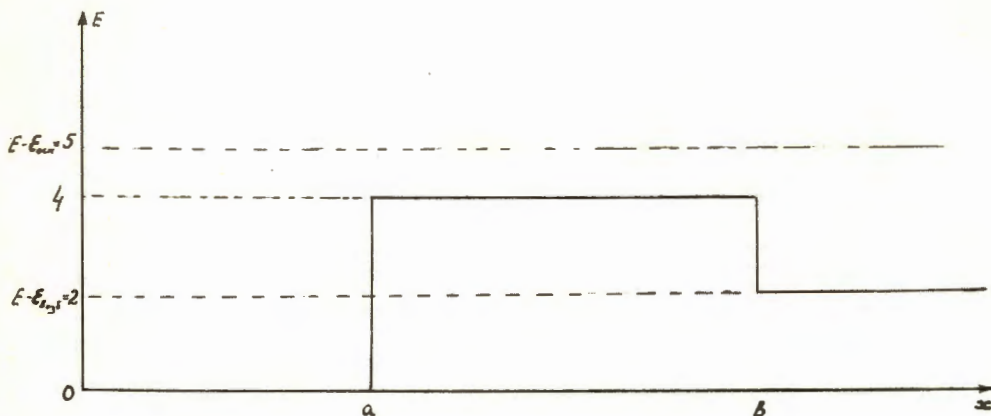
$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_1' \\ \phi_2 \\ \phi_2' \\ \phi_3 \\ \phi_3' \end{pmatrix}_{x=x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_I ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{II} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{III} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{IV} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \kappa_3 \end{pmatrix}_V \quad (12)$$

Численно решая систему с этими граничными условиями, мы получим справа от барьера в точке x_1 значения функций $\phi_n(I); \dots; \phi_n(V)$.

С помощью решения V мы можем уничтожить в четырех других решениях экспоненту в ϕ_3 , растущую направо с правой стороны от барьера. Таким образом, мы получим четыре решения I'; ...; IV'. Далее с помощью IV' уничтожим в трех других решениях волну в ϕ_2 , падающую на барьер справа. С помощью полученных трех решений построим два решения, в которых выполнено еще одно условие - отсутствие волны в ϕ_2 , падающей на барьер слева. И, наконец, составим из полученных двух решений такую линейную комбинацию, в которой не было бы в ϕ_1 волны, падающей на барьер слева. Полученное решение с точностью до постоянного множителя совпадает с искомым решением, удовлетворяющим граничным условиям (10). Остается только нормировать в нем падающий поток в ϕ_1 на единицу. Формула для коэффициента прохождения получается довольно громоздкая, поэтому мы приводим ее в Приложении 1. Численное решение уравнений в направлении, обратном тому, в котором проходят через барьер частицы, проводится с целью получения большей точности. В этом случае вспомогательные решения (12) возрастают слева направо, как и искомое физическое решение, и при его построении не происходит большого падения относительной точности, которое обязательно происходило бы при другом выборе направления численного решения.

Конкретная модель

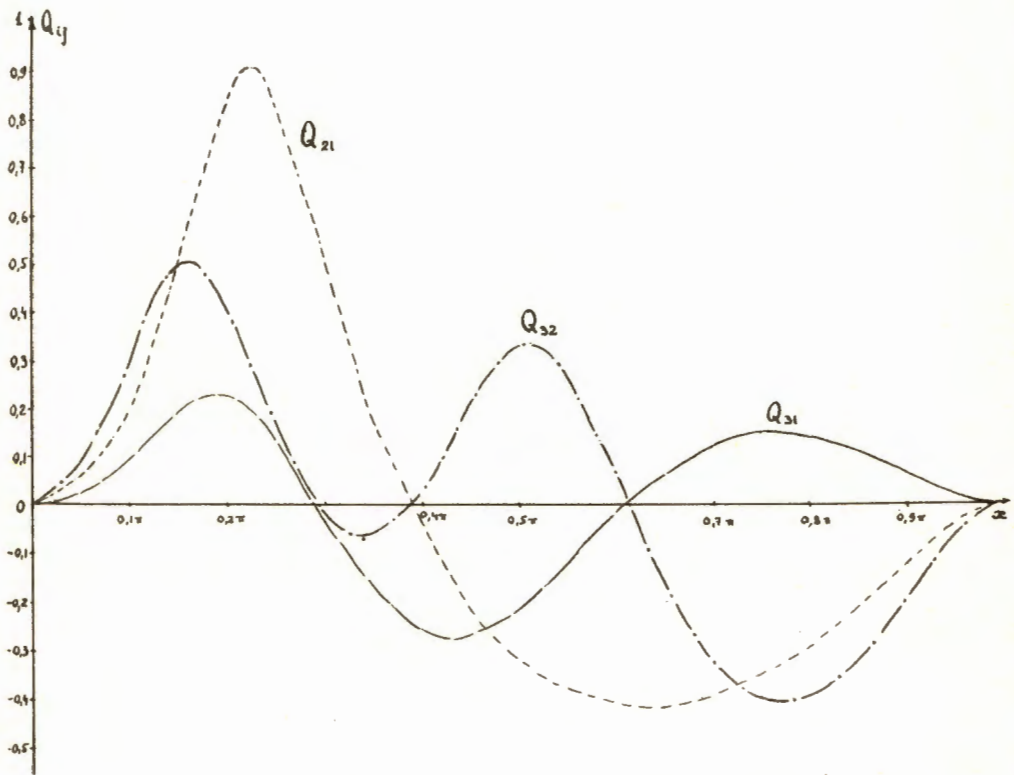
Для оценки эффекта асимметрии проницаемости был выбран потенциал, представленный на рис. 2, построенный из двух ступенек высотой $V = 4$ и $V = 2$. Для



Р и с. 2

Потенциальный барьер, для которого вычислены коэффициенты прохождения сложной частицы в разные стороны. Ширина барьера изменялась. В области $a + \frac{\pi}{2} < x < a - \frac{\pi}{2}$ коэффициенты смешивания в системе (1) равны нулю.

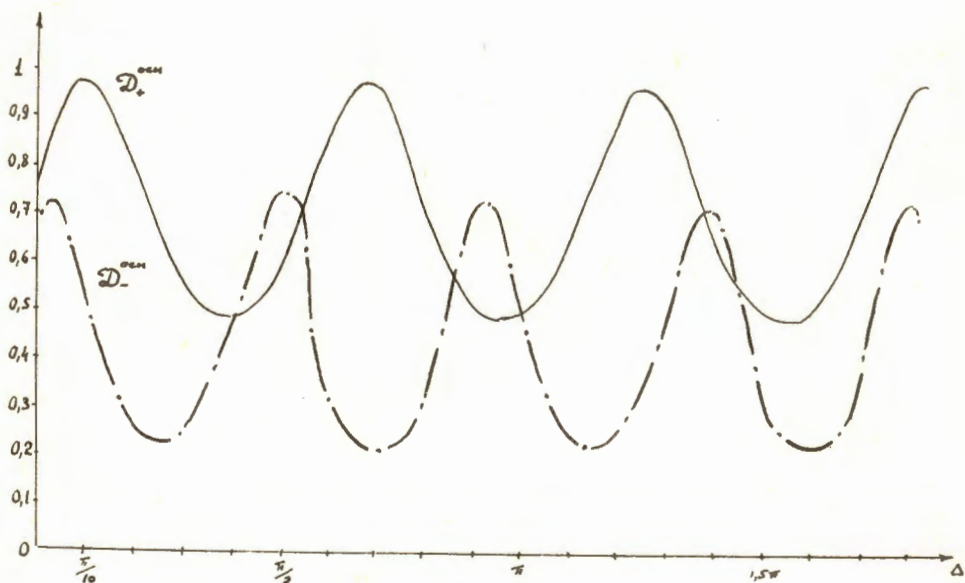
решения системы уравнений для функций ϕ_n необходимо было вычислить эффективные потенциалы U_1 и коэффициенты смешивания Q_{11} и K_{11} , входящие в эту систему. Эти функции были получены численным решением задачи на нахождение собственных функций и собственных значений для внутреннего движения сложной частицы при фиксированном положении ее центра инерции x . Решение это проводилось для 20-и значений x относительно каждой из ступенек. Потенциал V_{12} , связывающий две частицы, образующие сложную частицу, выбирался для упрощения расчетов в виде бесконечной прямоугольной ямы шириной π . На рис. 3 приведены графики коэффициентов Q_{11} для ступеньки $V = 4$, а значения U_1 и Q_{11} для обеих ступенек приведены в таблицах. Расчеты проницаемости барьера проводились для различных значений ширины барьера. При этом мы использовали тот факт, что в области $a + \frac{\pi}{2} < x < a - \frac{\pi}{2}$ коэффициенты смешивания равны нулю и можно просто получить решение уравнения для ϕ_n в аналитическом виде. Зависимость коэффициентов прохождения через барьер в противоположных направлениях при энергии $E = 6,01$ от величины $\Delta = b - a$ представлена на рис. 4,5. Из рис. 4,5 видно, что для выбранной модели коэффициенты прохождения в разные стороны при падении сложных частиц на барьер в основном состоянии могут различаться в $\approx 3,5$ раза (в возбужденном - в ≈ 600 раз).



Р и с. 3.

Кoeffициенты смешивания Q_{ij} для потенциального барьера $V(x) = \begin{cases} 0 & x < \frac{\pi}{4} \\ 1 & x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$
 для сложной частицы размера π .

Итак, частицы проходят через барьер легче справа налево, если падают на барьер в основном состоянии, и в обратном направлении, если падают на барьер в возбужденном состоянии. С ростом полной энергии E частиц разница в коэффициентах прохождения в разные стороны уменьшается.



Р и с. 4.

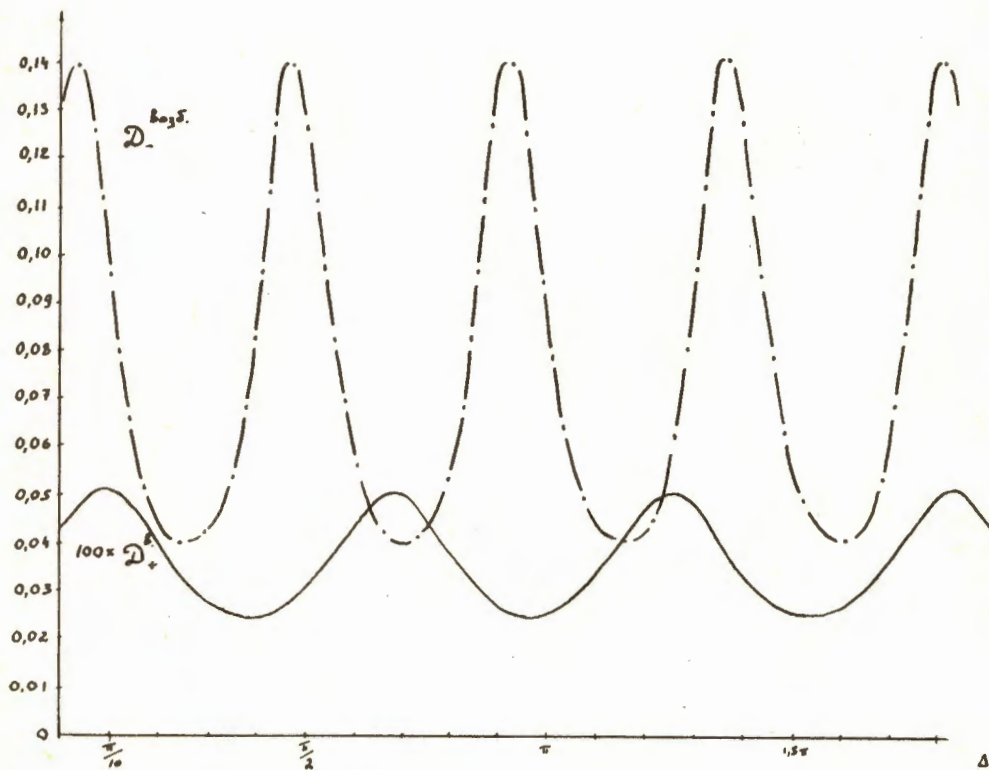
Коэффициенты прохождения через барьер, представленный на рис. 2, для случая сложных частиц, падающих на барьер в основном состоянии. Коэффициент $D_+^{\text{осн}}$ - для частиц, падающих справа, $D_-^{\text{осн}}$ - для частиц, падающих слева.

З а к л ю ч е н и е

Указанный в работе эффект имеет отношение к ядерной физике. Так, нужно учитывать разницу в вероятности проникновения α -частиц (и более сложных частиц) в ядра и выхода их из ядер. То же относится и к нуклонам, поскольку в этом случае нуклон играет роль барьера, а ядро - сложной частицы.

Возможно также, что эффект позволит понять некоторые биофизические явления. Одним из важных механизмов жизни является способность тонких пленок (толщиной в ~ 1 молекулу) пропускать молекулы некоторых веществ хорошо в одну сторону и плохо в другую. Пока объяснения этому явлению не было дано.

Если мы представим себе, что в среде сложных частиц, находящихся в хаотическом движении, внесена частица, взаимодействующая с частицами среды через несимме-



Р и с. 5.

Коэффициент прохождения барьера (рис. 2) $D_{+ \text{ воб}}$ и $D_{+ \text{ воб}}$ для случая сложных частиц, падающих на барьер в возбужденном состоянии.

тричный потенциал, то ввиду несимметричной проницаемости на эту частицу с одной стороны будет оказываться большее давление, чем с противоположной, и частица начнет двигаться. Такой "квантовый двигатель", возможно, позволит понять некоторые упорядоченные движения, возникающие в клетках и т.д.

Авторы выражают большую благодарность С.Н. Соколову, в дискуссиях с которым возникли идеи, изложенные в данной работе, а также М.А. Касымжанову за интерес к работе и полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Формула для коэффициента прохождения сложной частицы с энергией, достаточной для возбуждения первого возбужденного состояния, потенциального барьера, расположенного в интервале $0 \leq x \leq x_1$, для случая, когда частицы падают на барьер в основном состоянии

$$D = \frac{|A'_1|^2}{|A|^2} + \frac{k_2}{k_1} \frac{|A'_2|^2}{|A|^2}, \quad (1П1)$$

где

$$|A|^2 = \frac{1}{4} \frac{(A_1^I A_2^{\Pi} - B_1^I B_2^{\Pi} - A_2^I A_1^{\Pi} + B_2^I B_1^{\Pi})^2 + (B_1^I A_2^{\Pi} + A_1^I B_2^{\Pi} - A_1^I B_1^{\Pi} - A_2^I B_2^{\Pi})^2}{|A_2^{\Pi}|^2 + |B_2^{\Pi}|^2}, \quad (1П2)$$

$$|A'_1|^2 = 1, \quad (1П3)$$

$$|A'_2|^2 = \frac{|A_2^I|^2 + |B_2^I|^2}{|A_2^{\Pi}|^2 + |B_2^{\Pi}|^2}. \quad (1П4)$$

В случае, когда частица падает на барьер в возбужденном состоянии, вместо формулы (1П1) имеем:

$$D = \frac{k_1}{k_2} \frac{|A'_1|^2}{|A|^2} + \frac{|A'_2|^2}{|A|^2}, \quad (1П5)$$

где

$$|A|^2 = \frac{1}{4} \frac{(A_2^I A_1^{\Pi} - B_2^I B_1^{\Pi} - A_1^I A_2^{\Pi} + B_1^I B_2^{\Pi})^2 + (B_2^I A_1^{\Pi} + A_2^I B_1^{\Pi} - B_1^I A_2^{\Pi} - A_1^I B_2^{\Pi})^2}{|A_1^{\Pi}|^2 + |B_1^{\Pi}|^2}, \quad (1П6)$$

$$|A'_i|^2 = \frac{|A_i^I|^2 + |B_i^I|^2}{|A_i^{II}|^2 + |B_i^{II}|^2}, \quad (1П7)$$

$$|A'_2|^2 = 1.$$

Величины A_i ; B_i имеют вид:

$$\begin{aligned} A_1^I &= -(\phi_1^I + \phi_i^{\prime I}) \sin k_1 x_f + (k_1 \phi_1^{II} - \frac{1}{k_1} \phi_i^{\prime I}) \cos k_1 x_f, \\ B_1^I &= (k_1 \phi_1^{II} - \frac{1}{k_1} \phi_i^{\prime I}) \sin k_1 x_f + (\phi_1^I + \phi_i^{\prime I}) \cos k_1 x_f, \\ A_1^{II} &= -(\frac{k_2}{k_1} \phi_2^{\prime IV} + \phi_1^{\prime III}) \sin k_1 x_f + (k_2 \phi_1^{\prime III} - \phi_1^{\prime IV}) \cos k_1 x_f, \\ B_1^{II} &= (k_2 \phi_1^{\prime III} - \phi_1^{\prime IV}) \sin k_1 x_f + (\frac{k_2}{k_1} \phi_2^{\prime IV} + \phi_1^{\prime III}) \cos k_1 x_f, \\ A_2^I &= (\frac{k_1}{k_2} \phi_2^{\prime II} + \phi_2^I) \sin k_2 x_f + (k_1 \phi_2^{II} - \frac{1}{k_2} \phi_2^{\prime I}) \cos k_2 x_f, \\ B_2^I &= (k_1 \phi_2^{II} - \frac{1}{k_2} \phi_2^{\prime I}) \sin k_2 x_f + (\phi_2^I + \frac{k_1}{k_2} \phi_2^{\prime II}) \cos k_2 x_f, \\ A_2^{II} &= -(\phi_2^{\prime IV} + \phi_2^{\prime III}) \sin k_2 x_f + (k_2 \phi_2^{\prime IV} - \frac{1}{k_2} \phi_2^{\prime III}) \cos k_2 x_f, \\ B_2^{II} &= (k_2 \phi_2^{\prime IV} - \frac{1}{k_2} \phi_2^{\prime III}) \sin k_2 x_f + (\phi_2^{\prime III} + \phi_2^{\prime IV}) \cos k_2 x_f. \end{aligned} \quad (1П8)$$

Если энергия сложной частицы недостаточна для ее возбуждения, то формула для коэффициента приобретает простой вид:

$$D = \frac{4}{(k_1 b^{II} - a^I)^2 + (b^I + k_1 a^{II})^2}, \quad (1П9)$$

где

$$\begin{aligned} a^I &= \phi_1^I(x_f) \sin(k_1 x_f) + \frac{1}{k_1} \phi_i^{\prime I}(x_f) \cos k_1 x_f, \\ b^I &= \phi_1^I(x_f) \cos(k_1 x_f) - \frac{1}{k_1} \phi_i^{\prime I}(x_f) \sin k_1 x_f, \\ a^{II} &= \phi_1^{II}(x_f) \sin(k_1 x_f) + \frac{1}{k_1} \phi_i^{\prime II}(x_f) \cos k_1 x_f, \\ b^{II} &= \phi_1^{II}(x_f) \cos(k_1 x_f) - \frac{1}{k_1} \phi_i^{\prime II}(x_f) \sin k_1 x_f. \end{aligned} \quad (1П10)$$

Л и т е р а т у р а

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Квантовая механика, § 25, Физматгиз, 1963.
2. Б.Н. Захарьев, С.Н. Соколов. Эффект усиленной проницаемости барьеров для сложных частиц. Препринт ОИЯИ, Р-1473, Дубна, 1963.
3. Б.Н. Захарьев, С.Н. Соколов. О плотности резонансов при рассеянии на связанных частицах. Препринт ОИЯИ, Р-1562, Дубна, 1964.
4. Б.Н. Захарьев, С.Н. Соколов. О виртуальных возбуждениях сложной частицы. Препринт ОИЯИ, Р-1593, Дубна, 1964.
5. Б.Н. Захарьев, Р.К. Калинаускас. О связанном состоянии трех тел. Препринт ОИЯИ, Р-1818, Дубна, 1964.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 декабря 1964 г.

Таблица 1

Коэффициенты C_i и Q_{ij} для потенциального барьера $C = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \frac{\pi}{2} \\ 4 & \text{при } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

x/π	C_1	C_2	C_3	Q_{12}	Q_{31}	Q_{32}
0	1	4	9	0	0	0
0,05	1,001	4,055	9,104	-0,03684	0,02115	-0,061
0,1	1,032	4,148	9,246	-0,1286	0,0691	-0,2015
0,15	1,115	4,447	9,612	-0,2122	0,1095	-0,3188
0,2	1,223	4,690	10,055	-0,2952	0,1362	-0,3953
0,25	1,353	5,131	10,35	-0,35	0,1434	-0,3995
0,3	1,524	5,451	10,725	-0,3867	0,1172	-0,3329
0,35	1,701	5,696	10,633	-0,4217	0,0607	-0,1698
0,4	1,873	6,127	10,704	-0,4157	-0,0234	0,0607
0,45	2,063	6,599	10,906	-0,3849	-0,1237	0,2663
0,5	2,322	6,791	11,104	-0,3239	-0,2183	0,3247
0,55	2,62	6,688	11,418	-0,2229	-0,2741	0,2065
0,6	2,95	6,712	11,69	-0,0393	-0,2629	0,0258
0,65	3,33	6,725	11,974	0,1787	-0,1761	-0,0555
0,7	4,067	6,977	12,002	0,5165	-0,032	-0,0231
0,75	5	7,727	12,046	0,8363	0,1367	0,1649
0,8	5,405	8,258	12,318	0,8092	0,2224	0,4109
0,85	5,163	8,117	12,68	0,4954	0,1943	0,4914
0,9	5,017	8,021	12,843	0,1929	0,0964	0,289
0,95	5,004	8,01	13,008	0,057	0,0293	0,0819
1,0	5	8	13	0	0	0

Таблица 2

Коэффициенты C_i и Q_{ij} для потенциального барьера $C = \begin{cases} 0 & \text{при } x < \frac{\pi}{2} \\ 2 & \text{при } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

x/π	C_1	C_2	C_3	Q_{12}	Q_{31}	Q_{32}
0	1	4	9	0	0	0
0,05	1	4,01	9	-0,025	0,015	0,05
0,1	1,02	4,07	9,1	-0,06947	0,036	0,11
0,15	1,04	4,20	9,25	-0,125	0,055	0,16
0,2	1,12	4,35	9,50	-0,1837	0,077	0,216
0,25	1,21	4,54	9,69	-0,23	0,085	0,220
0,3	1,29	4,73	9,74	-0,2496	0,0511	0,126
0,35	1,41	4,92	9,74	-0,245	0,005	0,02
0,4	1,52	5,09	9,76	-0,226	-0,0484	-0,0806
0,45	1,65	5,14	9,87	-0,18	-0,1	-0,13
0,5	1,81	5,19	10,01	-0,1277	-0,142	-0,0922
0,55	1,98	5,19	10,17	-0,025	-0,165	-0,02
0,6	2,17	5,20	10,35	0,115	-0,117	0,0472
0,65	2,40	5,25	10,37	0,201	-0,06	0,07
0,7	2,73	5,43	10,4	0,364	0,0153	-0,0189
0,75	2,86	5,58	10,46	0,396	0,082	-0,135
0,8	2,99	5,81	10,59	0,312	0,102	-0,231
0,85	2,99	5,98	10,72	0,174	0,079	-0,224
0,9	3	5,97	10,92	0,0803	0,041	-0,125
0,95	3	6,005	10,97	0,0250	0,015	-0,05
1,0	3	6	11	0	0	0