1890

ЖЭТФ, 1965, т.48, в.6, с.1625-36.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 1890

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов

О СПИНОРАХ В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

1964

P - 1890

В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов

О СПИНОРАХ В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

Направлено в ЖЭТФ

1. Введение

Спинорные поля в теории тяготения Эйнштейна рассматривались многократно[1-22]. В отличие от тензорных (скалярных, векторных и т.д.) полей оперирование со спинорными полями вызывало определенные трудности. Впервые теорию фермионов в поле тяготения построили Фок и Иваненко[3,4], которые ввели взаимодействие спиноров с гравитационным полем при помощи формализма ортогональных реперов (см.[23]). С тех пор в большинстве исследований использовались те или иные модификации тетрадного формализма. Главным пунктом этих исследований являлось определение ковариантной производной спинора.

В настоящей статье спиноры будут введены как объекты, преобразующиеся по представлению той же группы, по которой преобразуется фундаментальный тензор $g^{\mu\nu}$. В этом смысле спиноры оказываются объектами того же типа, что и тензоры (скаляр, вектор и т.д.). Вместе с тем имеется существенное отличие спиноров от тензоров: хотя закон преобразования спиноров линеен и однороден по спинорному полю, в отличие от тензорного он зависит от гравитационного поля (метрики), причем сложным нелинейным образом.

С одной стороны, такой подход отвечает замыслу Шредингера[9] обходиться без ортогональных реперов, но в[9] использовались γ - поля, которые также лишь неявно связаны с гравитационным. С другой стороны, возникающий у нас "корень из метрического тензора" $\tau^{\mu\nu}$ может рассматриваться как некоторая модификация тетрады. В отличие от тетрады $\tau^{\mu\nu}$ явно выражено через гравитационное поле, оба его индекса равноправны и относятся к одному и тому же общему базису (у тетрад один индекс относится к общему базису, а другой к локально ортогональному).

В отличие от общего тетрадного формализма в предлагаемом подходе гравитационное взаимодействие явно выражается через гравитационное поле. Это удобно при вычислении гравитационных эффектов, при квантовании и при трактовке уравнений Эйнштейна на языке плоского пространства.

Гупта[24] предложил рассматривать эйнштейновские уравнения гравитации в виде бесконечного ряда по гравитационной константе. Ниже мы получаем взаимодействие фермионов с гравитационным полем именно в виде такого бесконечного ряда.

В § 2 делаются элементарные замечания о инфинитезимальных преобразованиях тензоров в теории тяготения Эйнштейна с ударением на их групповую структуру. Эти преобразования записываются в терминах локальных вариаций, что удобно с точки зрения толкования уравнений Эйнштейна как на языке кривого, так и на языке плоского пространства. Закон преобразования спинорного поля ψ как величины, преобразующейся по представлению той же группы, что и тензорные поля, выводится в § 3. В § 4 на основе найденного группового закона получено выражение для ковариантной производной спинора. В §§ 5 и 6 обсуждаются трансформационные свойства билинейных комбинаций спиноров, и строятся взаимодействия фермионов с гравитационным и другими полями. В Приложениях 1–3 приведены детали вывода законов преобразования ψ и $\gamma^{\mu\nu}$ и вывода ковариантной производной. Приложение 4 посвящено сопоставлению с тетрадным подходом и дан еще один краткий вывод закона преобразования спинора.

2. Вступительные замечания

В теории Эйнштейна симметричный тензор $g^{\mu\nu}(x)$, характеризующий тяготение, преобразуется по закону[x/]

$$g'^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} g^{\rho\sigma}(x); \qquad x'^{\mu} = x^{\mu} + \varkappa \lambda^{\mu}(x), \tag{1}$$

где 4-вектор $\lambda^{\mu}(x)$ произвольным образом зависит от координат x^{μ}, а $\varkappa$ — гравитационная постоянная. Если $\lambda^{\mu}(x)$ бесконечно малы, то преобразование (1) можно представить в виде:

$$\delta g^{\mu\nu} = g'^{\mu\nu}(x') - g^{\mu\nu}(x) = \varkappa\left(\partial_{\rho}\lambda^{\mu} g^{\rho\nu} + \partial_{\rho}\lambda^{\nu} g^{\mu\rho}\right). \tag{2}$$

Вариации типа (2)[xx/] $\delta f = f'(x') - f(x)$ называют субстанциональными вариациями; при их применении существенным образом подразумевается сопутствующее преобразование координат.

2,а. Переход к локальным вариациям и введение матричных обозначений

В дальнейшем вместо формализма с субстанциональными вариациями мы будем пользоваться эквивалентным ему формализмом с локальными вариациями

---

x/ В настоящей статье употребляется мнимая временная координата $x^4 = it$, и метрическим тензором специальной теории относительности служит символ Кронекера $\delta_{\mu\nu}$.

xx/ О вариациях см.[25]. Названия вариаций взяты из статьи Меллера[26].

$$\delta^* f = f'(x) - f(x) = \delta f - \varkappa \lambda^\rho \partial_\rho f(x) . \tag{3}$$

Так, инфинитезимальная локальная вариация $g^{\mu\nu}$ записывается как

$$\delta^* g^{\mu\nu} = \varkappa\left(\partial_\rho \lambda^\mu g^{\rho\nu} + \partial_\rho \lambda^\nu g^{\mu\rho} - \lambda^\rho \partial_\rho g^{\mu\nu}\right). \tag{4}$$

Особо подчеркнем, что локальные вариации можно рассматривать как преобразования только над функциями, <u>без изменения координат</u>. Это полезно при интерпретации теории тяготения Эйнштейна в <u>плоском</u> пространстве, причем в этом случае преобразования (4) (и последующие преобразования (7)-(10)) следует понимать как преобразования типа калибровочных преобразований в электродинамике. Поэтому функции λ^μ можно называть калибровочными функциями. В настоящей работе мы всюду будем пользоваться локальными вариациями, и это позволит понимать все результаты и вычисления как относящиеся либо к кривому пространству, либо к плоскому пространству.

В дальнейшем нам будет удобна компактная матричная запись. Из производных функций λ^μ образуем матрицу

$$\Lambda \equiv \|\Lambda_{\alpha\beta}\| \equiv \|\partial_\alpha \lambda^\beta\| . \tag{5}$$

Если теперь ввести симметричную матрицу $\|g^{\mu\nu}\|$, то закон преобразования (4) можно компактно записать в виде: [x/]

$$g \equiv \|g^{\mu\nu}\| ; \qquad \delta^* g = \varkappa\left(\tilde{\Lambda} g + g\Lambda - \lambda^\rho \partial_\rho g\right), \tag{6}$$

где символ $\sim$ означает транспонирование. Аналогично можно записать локальные вариации $g_{\mu\nu}$ $\left(g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_\mu{}^\lambda\right)$ и векторов A^μ и A_μ :

$$g^{-1} \equiv \|g_{\mu\nu}\| ; \qquad \delta^* g^{-1} = -\varkappa\left(\Lambda g^{-1} + g^{-1}\tilde{\Lambda} + \lambda^\rho \partial_\rho g^{-1}\right), \tag{7}$$

[x/] Обратим внимание на то, что в настоящей работе символом g обозначается матрица, тогда как часто под g понимают детерминант матрицы g^{-1}.

$$A^{\cdot} \equiv \| A^{\mu} \| ; \qquad \delta^* A^{\cdot} = \varkappa(\tilde{\Lambda} A^{\cdot} - \lambda^{\rho} \partial_{\rho} A^{\cdot}) , \tag{8}$$

$$A_{\cdot} \equiv \| A_{\mu} \| ; \qquad \delta^* A_{\cdot} = -\varkappa(\Lambda A_{\cdot} + \lambda^{\rho} \partial_{\rho} A_{\cdot}), \tag{9}$$

где $A^{\cdot}$ и $A_{\cdot}$ понимаются как матрицы - столбцы. Приведем также локальную вариацию скалярного поля

$$\delta^* \varphi = -\varkappa \lambda^{\rho} \partial_{\rho} \varphi . \tag{10}$$

Следуя Гупта /24/, гравитационное поле будем описывать величинами $h^{\mu\nu}$

$$g^{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varkappa h^{\mu\nu} , \tag{11}$$

где $\delta_{\mu\nu}$ -символ Кронекера. Он не тензор, и поэтому положение индексов несущественно; мы их всегда будем писать снизу. Величины $h^{\mu\nu}$ также не образуют тензор, так как они преобразуются согласно

$$h \equiv \| h^{\mu\nu} \| ; \quad \delta^* h = \Lambda + \tilde{\Lambda} + \varkappa(\tilde{\Lambda} h + h\Lambda - \lambda^{\rho} \partial_{\rho} h). \tag{12}$$

Таким образом, h приобретает аддитивный добавок подобно электромагнитному полю или полям Янга-Миллса. Отметим связь между g, g^{-1} и h:

$$g = 1 + \varkappa h , \qquad g^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\varkappa h)^n , \tag{13}$$

где h^n -матрица h в n-той степени: $(h^n)^{\mu\nu} = h^{\mu\sigma_1} h^{\sigma_1\sigma_2} \ldots h^{\sigma_{n-1}\nu}$. Здесь верхние индексы оказываются свернутыми с верхними же, что связано с применением нетензорных величин. (Такие свертки неприемлемы, когда строят тензоры из тензоров) В дальнейшем мы будем часто применять величины с индексами μ, ν ..., не являющиеся тензорами.

2б. Групповое свойство преобразований

Известно, что преобразования (1) образуют группу. На языке инфинитезимальных преобразований (4) (или (6)) это означает следующее.

Обозначим результат преобразования (4) с $\lambda^{\mu} = \lambda^{\mu}_{1}$ через $\delta^*_{\lambda_1} g^{\mu\nu}$ и рассмотрим известную в теории непрерывных групп Ли скобочную операцию $\delta^*_{\lambda_2} \delta^*_{\lambda_1} g^{\mu\nu} - \delta^*_{\lambda_1} \delta^*_{\lambda_2} g^{\mu\nu}$. В соответствии с тем, что преобразования $g^{\mu\nu}$

образуют группу, результат скобочной операции должен быть представим в виде (4) с некоторой новой "скобочной" $\lambda^{\mu}_{ск}$.

$$(\delta^*_{\lambda_2}\delta^*_{\lambda_1}-\delta^*_{\lambda_1}\delta^*_{\lambda_2})g^{\mu\nu}=\delta^*_{\lambda_{ск}}g^{\mu\nu}. \qquad (14)$$

Нетрудно убедиться, что это действительно так и что

$$\lambda^{\mu}_{ск}=-\varkappa\left(\lambda^{\rho}_{1}\partial_{\rho}\lambda^{\mu}_{2}-\lambda^{\rho}_{2}\partial_{\rho}\lambda^{\mu}_{1}\right). \qquad (15)$$

По представлениям этой же группы преобразуется "не совсем" тензорная величина $h^{\mu\nu}$, а также все тензоры. Для всех этих объектов соблюдается соотношение (14) , т.е.

$$\left(\delta^*_{\lambda_2}\delta^*_{\lambda_1}-\delta^*_{\lambda_1}\delta^*_{\lambda_2}\right)T^{\mu_1\mu_2\cdots}_{\nu_1\nu_2\cdots}=\delta^*_{\lambda_{ск}}T^{\mu_1\mu_2\cdots}_{\nu_1\nu_2\cdots}\ , \qquad (16)$$

где $\lambda_{ск}$ всегда выражается одной и той же формулой (15). Легко проверить это для векторов A^{μ} и A_{μ} и скаляра φ , преобразующихся согласно (8)-(10), а также и в общем случае. И наоборот, разрешая соотношение структуры (6) с $\lambda^{\mu}_{ск}$(15), можно восстановить закон преобразования тензора с тем или иным числом индексов, если дополнительно потребовать, чтобы закон не зависел от других тензоров и был линеен и однороден по данному тензору и, конечно, чтобы при лоренцевых преобразованиях он переходил в обычный лоренцевский закон.

3. Закон преобразования спинора

В настоящем параграфе мы как раз обратимся к такому восстановлению закона преобразования объекта, отличного от тензоров, - спинора. Под спинором будем понимать четырехкомпонентный объект, который преобразуется по представлению обсуждаемой группы преобразований $g^{\mu\nu}$ так, чтобы этот закон в частном случае лоренцевых вращений и сдвигов, когда

$$\varkappa\lambda^{\mu}=2\omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}+c^{\mu}\ ; \quad \omega^{\mu}{}_{\nu}=-\omega^{\nu}{}_{\mu}=const\ ;\ c^{\mu}=const, \qquad (17)$$

переходил в лоренцевский закон для дираковского спинора

$$\delta^* \psi = -\varkappa \lambda^\rho \partial_\rho \psi + \frac{i\varkappa}{4} \partial_\alpha \lambda^\beta \sigma_{\beta\alpha} \psi \qquad \text{при} \quad \varkappa \lambda^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu + c^\mu \tag{18}$$

или в матричной форме

$$\delta^* \psi = -\varkappa \lambda^\rho \partial_\rho \psi + \frac{i\varkappa}{4} \langle \Lambda \cdot \sigma \rangle \psi \qquad \text{при} \quad \varkappa \lambda^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu + c^\mu, \tag{19}$$

где $\langle \Lambda \cdot \sigma \rangle = \Lambda_{\alpha\beta} \sigma_{\beta\alpha}$, т.е. угловыми скобками мы обозначаем (здесь и в дальнейшем) операцию свертки по векторным индексам, не затрагивающую спинорных индексов. Далее, $\sigma_{\beta\alpha} = -i(\gamma_\beta \gamma_\alpha - \delta_{\beta\alpha})$, причем γ_α — обычные дираковские матрицы

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2\delta_{\alpha\beta}. \tag{20}$$

При поиске закона наложим следующие ограничения.

а) Предположим по аналогии с тензорами, что искомый закон содержит спинор линейным и однородным образом.

б) Для простоты допустим, что искомый закон отличается от (19) только модификацией члена, содержащего матрицу $\sigma_{\alpha\beta}$ и в нем не возникает новых членов с другими матрицами.

в) Предположим, что в искомый закон, кроме спинорного поля, может входить только гравитационное поле $h^{\mu\nu}$, но не должны входить другие поля и производные от $h^{\mu\nu}$.

Предположение в) слабее соответствующего предположения для тензоров: "в искомый закон, кроме данного поля, не должны входить никакие другие поля". Это ослабление необходимо, так как если его не делать, то спиноров построить нельзя[x/], что согласуется с утверждением Картана[/12/]. Действительно, если в спинорный закон не входят никакие другие поля, то в предположениях а) и б) при необходимом условии перехода в обычный закон преобразования дираковского спинора при λ^μ (17) искомый закон обязан иметь вид (19). Однако прямые вычисления показывают, что при функциях λ^μ общего вида, отличных от (17), преобразования (19) не образу-

---

x/ Это утверждение будет справедливо даже в том случае, если отказаться от предположения б) и модифицировать искомый закон, включив в него все 16 матриц Дирака.

ют группу. В самом деле, применение скобочной операции с использованием формулы[x/]

$$[\langle A\cdot\sigma\rangle, \langle B\cdot\sigma\rangle] = 2i\langle (A-\tilde{A})\cdot(B-\tilde{B})\cdot\sigma\rangle \qquad (21)$$

дает

$$(\delta^*_{\lambda_2}\delta^*_{\lambda_1} - \delta^*_{\lambda_1}\delta^*_{\lambda_2})\psi = -\varkappa\lambda^{\rho}_{ск}\partial_\rho\psi + \frac{i\varkappa}{4}\langle\Lambda_{ск}\cdot\sigma\rangle\psi + \qquad (22)$$

$$+ \frac{i\varkappa^2}{8}\langle(\Lambda_1+\tilde{\Lambda}_1)\cdot(\Lambda_2+\tilde{\Lambda}_2)\cdot\sigma\rangle\psi .$$

Все выражение во второй строке (22) - лишнее; только при частном выборе λ^μ в форме (17), когда Λ_1 и Λ_2 суть антисимметричные матрицы, это выражение обращается в нуль. Таким образом, искомый закон не может совпадать с (19) и должен содержать дополнительные члены, которые компенсировали бы лишний член, возникший в (22), и которые бы обращались в нуль, если Λ —антисимметрична. В соответствии с в) введем в закон поле $h^{\mu\nu}$. Непосредственным анализом можно выяснить, что добавление к (19) члена $-\frac{i\varkappa^2}{4}\langle(\Lambda+\tilde{\Lambda})\cdot h\cdot\sigma\rangle\psi$ компенсирует (за счет аддитивной части вариации h (12)) лишний член в (22), но, в свою очередь, порождает (за счет мультипликативной части вариации h) ненужные добавки при скобочной операции, содержащие уже $\varkappa^3$. Чтобы погасить эти вновь возникшие добавки, приходится добавлять в (19) (первоначально с неопределенными коэффициентами) члены, содержащие h квадратично, затем кубично и т.д. В результате такой лобовой процедуры многократного применения скобочной операции так, чтобы групповое свойство удовлетворялось с точностью до все более высоких степеней константы $\varkappa$, мы нашли несколько первых членов искомого закона преобразования:

$$\delta^*\psi = -\varkappa\lambda^\rho\partial_\rho\psi + \frac{i\varkappa}{4}\langle\Lambda\cdot\sigma\rangle\psi - \frac{i\varkappa^2}{16}\langle(\Lambda+\tilde{\Lambda})\cdot h\cdot\sigma\rangle\psi + \qquad (23)$$

$$+ \frac{i\varkappa^3}{32}\langle(\Lambda+\tilde{\Lambda})\cdot h^2\cdot\sigma\rangle\psi - \frac{i\varkappa^4}{256}\langle h\cdot(\Lambda+\tilde{\Lambda})\cdot h^2\cdot\sigma\rangle\psi - \frac{5i\varkappa^4}{256}\langle(\Lambda+\tilde{\Lambda})\cdot h^3\cdot\sigma\rangle\psi + \dots$$

Естественно теперь искать точный инфинитезимальный закон преобразования спинора в форме:

---

x/ Формула (21) получается умножением $A_{\nu\mu}$ и $B_{\rho\lambda}$ на соотношение коммутации для матриц $\sigma_{\mu\nu}$

$$[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\lambda\rho}] = 2i(\delta_{\mu\lambda}\sigma_{\nu\rho} + \delta_{\nu\rho}\sigma_{\mu\lambda} - \delta_{\mu\rho}\sigma_{\nu\lambda} - \delta_{\nu\lambda}\sigma_{\mu\rho}).$$

$$\delta^*\psi = -\varkappa\lambda^\rho\partial_\rho\psi + \frac{i\varkappa}{4}\langle[\Lambda+\Delta(\Lambda)]\cdot\sigma\rangle\psi\,, \tag{24}$$

где $\Delta(\Lambda)$ –матрица вида:

$$\Delta(\Lambda) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \varkappa^{m+n} c_{mn}\, h^m\cdot(\Lambda+\tilde{\Lambda})\cdot h^n\,. \tag{25}$$

Так как матрица Δ свернута с антисимметричной матрицей σ (в (24) входит $\langle\Delta\cdot\sigma\rangle = \Delta_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}$), то целесообразно с самого начала считать матрицу Δ антисимметричной

$$\Delta = -\tilde{\Delta}\,, \text{ так что } c_{mn} = -c_{nm}\,. \tag{26}$$

Применяя скобочную операцию и используя при этом (21), находим

$$\left(\delta^*_{\lambda_2}\delta^*_{\lambda_1} - \delta^*_{\lambda_1}\delta^*_{\lambda_2}\right)\psi = -\varkappa\lambda^\rho_{ck}\partial_\rho\psi - \frac{i\varkappa^2}{4}\left(\lambda^\rho_1\partial_\rho\langle\Lambda_2\cdot\sigma\rangle - \lambda^\rho_2\partial_\rho\langle\Lambda_1\cdot\sigma\rangle\right)\psi -$$

$$-\frac{i\varkappa^2}{8}\langle[\Lambda_1-\tilde{\Lambda}_1+2\Delta(\Lambda_1)]\cdot[\Lambda_2-\tilde{\Lambda}_2+2\Delta(\Lambda_2)]\cdot\sigma\rangle\psi + \tag{27}$$

$$+\frac{i\varkappa}{4}\langle[\delta^*_{\lambda_2}\Delta(\Lambda_1) - \delta^*_{\lambda_1}\Delta(\Lambda_2) - \varkappa\lambda^\rho_1\partial_\rho\Delta(\Lambda_2) + \varkappa\lambda^\rho_2\partial_\rho\Delta(\Lambda_1)]\cdot\sigma\rangle\psi,$$

где $\delta^*\Delta$ означает вариацию Δ за счет вариации входящих в нее h , варьируемых согласно (12). Поскольку мы хотим, чтобы преобразования (24) образовывали представление группы преобразований $g^{\mu\nu}$, то следует результат скобочной операции приравнять вариации (24)

$$\left(\delta^*_{\lambda_2}\delta^*_{\lambda_1} - \delta^*_{\lambda_1}\delta^*_{\lambda_2}\right)\psi = \delta^*_{\lambda_{ck}}\psi\,, \tag{28}$$

где λ_{ck} снова дается формулой (15). Если в левую часть подставить выражение (27) и расписать правую часть, то в такой форме (28) будет служить источником для получения рекуррентных соотношений между коэффициентами c_{mn} . Основные моменты вычислений вынесены в Приложение 1. Из найденных рекуррентных соотношений следует, что c_{mn} можно определить при помощи производящей функции

$$G(x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn}x^m y^n; \qquad G(x,y)=\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+y}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}} \,. \tag{29}$$

Приведем несколько первых коэффициентов:

$$c_{01}=-\frac{1}{8}\,;\ c_{02}=\frac{1}{16}\,;\ \ldots\ c_{0n}=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\,;\ \ldots$$

$$c_{12}=-\frac{1}{128}\,;\ c_{13}=\frac{1}{128}\,;\ \ldots\ c_{1n}=(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n+4)!!}(n-1)\,;\ \ldots \tag{30}$$

. . . .

Появление в (29) корней свидетельствует, что важную роль должна играть матрица $\tau=\sqrt{1+\varkappa h}$, которая однозначно определяется своим разложением в ряд x/:

$$\tau=1+\frac{1}{2}\varkappa h-\frac{1}{8}\varkappa^2h^2+\cdots+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\varkappa^n h^n+\cdots=$$
$$=\sqrt{1+\varkappa h}=\sqrt{g}\,. \tag{31}$$

Представляя знаменатель производящей функции (29) как интеграл от экспоненты, можно определить матрицу Δ в виде:

$$\Delta=\frac{1}{2}\int_0^\infty d\alpha\, e^{-\alpha\tau}\,[\tau,\Lambda+\tilde{\Lambda}]\,e^{-\alpha\tau}, \tag{32}$$

где квадратные скобки означают коммутатор.

Итак, доказано, что закон преобразования спинора по представлению группы преобразований тензора $g^{\mu\nu}$ можно записать в виде: xx/

$$\delta^*\psi=-\varkappa\lambda^\rho\partial_\rho\psi+\frac{i\varkappa}{4}\langle\Lambda\cdot\sigma\rangle\psi+$$
$$+\frac{i\varkappa}{8}\int_0^\infty d\alpha\,\langle e^{-\alpha\tau}\cdot[\tau,\Lambda+\tilde{\Lambda}]\cdot e^{-\alpha\tau}\cdot\sigma\rangle\psi\,. \tag{33}$$

---

x/ Т.е. в индексах: $\tau^{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\varkappa h^{\mu\nu}-\frac{1}{8}\varkappa^2 h^{\mu\rho}h^{\rho\nu}+\ldots$

xx/ В Приложении 4 дан другой вывод этого же спинорного закона, основанный на том, что общие преобразования индуцируют ортогональные преобразования над дифференциалами $dy^\mu\equiv\tau^{\mu\nu}dx_\nu$.

Отметим, что если отказаться от предположения б), то в (24) можно ввести члены и с другими матрицами (сверх всегда необходимых членов, присутствующих в (24)). Так, при поиске закона можно было бы ввести дополнительные члены, кратные матрицам 1 и γ_5 . Эти неоднозначности можно интерпретировать как переход к другим объектам. Так, введем величину $\psi_{v,w}$, преобразующуюся как $(\mathrm{Det}\, g)^{\frac{v+\gamma_5 w}{2}}\psi$ Эту величину $\psi_{v,w}$ назовем спинором с весом $v+w\gamma_5$ Ее вариация запишется как

$$\delta^*\psi_{v,w}=-\varkappa(v+w\gamma_5)\langle\Lambda\rangle\psi_{v,w}-\varkappa\lambda^\rho\partial_\rho\psi_{v,w}+\frac{i\varkappa}{4}\langle(\Lambda+\Delta)\cdot\sigma\rangle\psi_{v,w}. \quad (34)$$

Первый член в правой части возник за счет веса. Нетрудно проверить, что групповое свойство снова соблюдается. Спиноры с весом находятся в таком отношении к спинорам, как известные тензоры с весом относятся к тензорам [27].

В заключение этого параграфа отметим, что закон преобразования величины τ , определенной формулой (31), можно записать в виде:

$$\delta^*\tau=-\varkappa\lambda^\rho\partial_\rho\tau+\varkappa\tilde{\Lambda}\tau+\frac{\varkappa}{2}\tau(\Lambda-\tilde{\Lambda}+2\Delta). \quad (35)$$

С помощью соотношения

$$\tau\Delta+\Delta\tau=\frac{1}{2}\tau(\Lambda+\tilde{\Lambda})-\frac{1}{2}(\Lambda+\tilde{\Lambda})\tau \quad (36)$$

можно записывать правую часть (35) в различных формах и , в частности, сделать ее явно симметричной. Вывод (35) и (36) см. в Приложении 2.

4. Ковариантная производная спинора

В основополагающих исследованиях Фока и Иваненко [3] и Фока [4] спинор как геометрический объект определялся не на основе его поведения при общековариантных преобразованиях, а на основе его поведения при параллельном переносе, что позволило определить ковариантную производную спинора.

Наше определение ковариантной производной спинора будет прямым следствием полученного выше закона преобразования спинора (33) при общих преобразованиях. Ковариантную производную тензора относительно $g^{\mu\nu}$ можно определить как такую модификацию обычной производной, применение которой к тензору приводит снова к тензору на единицу более высокого ранга [23,27]. Такой подход эквивалентен подходу с использованием параллельного переноса, но в отличие от последнего он более явно связан с групповым свойством тензоров. Аналогично ковариантную производную спинора $\nabla_\mu\psi$ мы определим как объект, который преобразуется по прямому произведению векторного (по индексу μ) и спинорного (по спинорному индексу у ψ) представлений, т.е.

$$\delta^* \nabla_\mu \psi = -\varkappa \lambda^\rho \partial_\rho (\nabla_\mu \psi) - \varkappa \partial_\mu \lambda^\rho \cdot \nabla_\rho \psi + \frac{i\varkappa}{4} \langle [\Lambda + \Delta(\Lambda)] \cdot \sigma \rangle \nabla_\mu \psi . \tag{37}$$

Представим символ ковариантной производной в виде:

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - \Gamma_\mu . \tag{38}$$

Теперь подставим (38) в (37) и используем закон преобразования спинора (24). Тогда мы найдем следующий закон преобразования:

$$\delta^* \Gamma_\mu = -\varkappa \lambda^\rho \partial_\rho \Gamma_\mu - \varkappa \partial_\mu \lambda^\rho \cdot \Gamma_\rho + \frac{i\varkappa}{4} [\langle (\Lambda + \Delta) \cdot \sigma \rangle , \Gamma_\mu] + \\ + \frac{i\varkappa}{4} \partial_\mu \langle (\Lambda + \Delta) \cdot \sigma \rangle . \tag{39}$$

В предположении, что Γ_μ целиком выражается через $h^{\mu\nu}$ (подобно афинной связности для тензоров в римановой геометрии) (39) представляет собой неоднородное уравнение для определения Γ_μ . Разложим Γ_μ по полной системе матриц Дирака:

$$\Gamma_\mu = a_\mu I + a_\mu^\alpha \gamma_\alpha + a_\mu^{\alpha\beta} \sigma_{\beta\alpha} + a_\mu^{\alpha 5} i \gamma_\alpha \gamma_5 + a_\mu^5 \gamma_5 . \tag{40}$$

Если разложение (40) подставить в (39), то можно найти частное решение неоднородного уравнения (39) в виде (см. Приложение 3)

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{4i} \langle \tau \cdot [\| \partial . g_{\mu .} \| + \tau^{-1} \partial_\mu \tau^{-1}] \cdot \tau \cdot \sigma \rangle . \tag{41}$$

Эта матричная запись означает в индексах

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{4i} \tau^{\alpha\beta} [\partial_\beta g_{\mu\gamma} + (\tau^{-1} \partial_\mu \tau^{-1})_{\beta\gamma}] \tau^{\gamma\delta} \sigma_{\delta\alpha} = \tag{41'}$$

$$= \frac{1}{4i} \tau^{\alpha\beta} [-[\beta, \gamma\mu] + (\tau^{-1} \partial_\mu \tau^{-1})_{\beta\gamma}] \tau^{\gamma\delta} \sigma_{\delta\alpha} . \tag{41''}$$

Последнее выражение записано через трехиндексный символ Кристофеля первого рода[23,27], чтобы показать родство полученного выражения для Γ_μ с тем выражением, которое было найдено в тетрадном формализме (см.[18] формула (8)). Подчеркнем, что Γ_μ (41) не содержит никаких новых величин и представляет собой ряд по степеням гравитационного поля (см. разложение (31) для τ)

$$\Gamma_\mu=\frac{1}{4i}\Big\{-\varkappa\partial_\alpha h^{\mu\beta}+\varkappa^2\Big[h^{\mu\sigma}\partial_\alpha h^{\sigma\beta}+\frac{1}{2}\partial_\alpha h^{\mu\sigma}h^{\sigma\beta}-\frac{1}{2}h^{\alpha\sigma}\partial_\sigma h^{\mu\beta}-\frac{1}{4}\partial_\mu h^{\alpha\sigma}\cdot h^{\sigma\beta}+$$
$$+O(\varkappa^3)\Big\}\sigma_{\beta\alpha}. \tag{42}$$

Общее решение уравнения (39) состоит из (41) и общего решения однородного уравнения, соответствующего (39),

$$\Gamma_\mu^{\text{общ}}=\Gamma_\mu+a_\mu I+b_{\mu\alpha}\tau^{\alpha\beta}\gamma_\beta+c_{\mu\alpha\beta}\tau^{\alpha\gamma}\tau^{\beta\delta}\sigma_{\delta\gamma}+$$
$$+d_{\mu\alpha}\tau^{\alpha\beta}\,i\gamma_\beta\gamma_5+a_\mu^5\gamma_5\,, \tag{43}$$

где a_μ и a_μ^5 , $b_{\mu\alpha}$ и $d_{\mu\alpha}$ и $c_{\mu\alpha\beta}$ -ковариантные векторы, тензоры второго и третьего ранга, соответственно (см. Приложение 3). В отличие от Γ_μ —простейшего возможного решения неоднородного уравнения — все остальные члены в (43) можно считать либо равными нулю, либо отличными от нуля и построенными из каких-либо подходящих полей. Введение ковариантной производной полезно для построения инвариантных взаимодействий. При этом включение в ковариантную производную решения неоднородного уравнения, например (41), является необходимым. Что касается остальных членов, входящих в (43), то они не необходимы, а соответствующие взаимодействия всегда можно записать в инвариантной форме отдельно.

Проведем аналогию. Электромагнитные взаимодействия всегда также включаются через "ковариантную производную" $\partial_\mu-ieA_\mu$. Однако выбор этой ковариантной производной в такой же мере неоднозначен. Ничто не мешает взять вместо $\partial_\mu-ieA_\mu$ "ковариантную производную" $\partial_\mu-ieA_\mu+k\gamma_\nu F_{\nu\mu}$ и т.д. Неоднозначность в (43) в точности такого же типа. Например, тензор $c_{\mu\alpha\beta}$ можно реализовать в виде $c_{\mu\alpha\beta}=g_{\mu\alpha}\partial_\beta R-g_{\mu\beta}\partial_\alpha R$, где R -скалярная кривизна. Это привело бы к дополнительному "неминимальному" взаимодействию с гравитационным полем через высшие его производные.

Мы примем, что ковариантная производная спинора есть $\nabla_\mu=\partial_\mu-\Gamma_\mu$, где афинная связность Γ_μ дается выражением (41). Взаимодействия, к которым это приводит, будем называть "минимальными". Такой выбор ковариантной производной удобен еще и тем, что в этом случае

$$\nabla_\mu(\bar\psi\psi)=\partial_\mu(\bar\psi\psi)\,; \qquad \nabla_\mu(\bar\psi\gamma_5\psi)=\partial_\mu(\bar\psi\gamma_5\psi), \tag{44}$$

$$\nabla_\mu(\tau^{\nu\lambda}\bar\psi\gamma_\lambda\psi)=(\delta^\nu_\rho\partial_\mu+\Gamma^\nu_{\mu\rho})(\tau^{\rho\lambda}\bar\psi\gamma_\lambda\psi), \tag{45}$$

$$\nabla_\mu(\tau^{\nu\lambda}\bar\psi\gamma_\lambda\gamma_5\psi)=(\delta^\nu_\rho\partial_\mu+\Gamma^\nu_{\mu\rho})(\tau^{\rho\lambda}\bar\psi\gamma_\lambda\gamma_5\psi), \tag{46}$$

$$\nabla_\mu(\tau^{\nu\lambda}\tau^{\sigma\tau}\bar\psi\,\sigma_{\lambda\tau}\psi)=(\delta^\nu_\alpha\delta^\sigma_\beta\partial_\mu+\delta^\nu_\alpha\Gamma^\sigma_{\mu\beta}+\delta^\sigma_\beta\Gamma^\nu_{\mu\alpha})(\tau^{\alpha\lambda}\tau^{\beta\tau}\bar\psi\,\sigma_{\lambda\tau}\psi). \tag{47}$$

Ковариантные производные в (44)-(47) вычисляются с учетом распределительного свойства, например,

$$\nabla_\mu(\tau^{\nu\lambda}\bar\psi\gamma_\lambda\psi)=(\nabla_\mu\tau^{\nu\lambda})\bar\psi\gamma_\lambda\psi+\tau^{\nu\lambda}(\nabla_\mu\bar\psi)\gamma_\lambda\psi+\tau^{\nu\lambda}\bar\psi\gamma_\lambda\nabla_\mu\psi.$$

При этом ковариантная производная от $\tau^{\nu\lambda}$, как функции от $g^{\alpha\beta}$, равна нулю:

$$\nabla_\mu\tau^{\nu\lambda}=0\,, \tag{48}$$

что можно рассматривать как следствие легко проверямого важного тождества

$$\partial_\mu\tau^{\sigma\rho}+\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\tau^{\lambda\rho}-i\,\tau^{\sigma\alpha}\,\mathrm{Sp}(\sigma_{\alpha\rho}\Gamma_\mu)=0. \tag{49}$$

Вид ковариантных производных (44)-(47) согласуется с тем, что выписанные комбинации преобразуются как скаляры, векторы и тензор (см. следующий параграф). В сходном месте формализма ортогональных реперов Фок /4/ закрепил вид ковариантной производной с помощью условий (44) и (45). Такого рода требование оставляет в (43) произвол только в выборе a_μ, а $b=c=d=a^5=0$. Однако отметим, что исключенные из ковариантной производной члены можно ввести в инвариантный лагранжиан как новые независимые взаимодействия.

В заключение вкратце обсудим спиноры с весом $\psi_{v,w}$ (34). Для этих величин в (39) войдут дополнительные члены

$$-\varkappa(v+w\gamma_5)\partial_\mu\langle\Lambda\rangle\psi_{v,w}+\varkappa w\langle\Lambda\rangle[\Gamma_\mu,\gamma_5]\psi_{v,w}.$$

В результате для спинора с весом в качестве простейшей афинной связности следует взять

$$\Gamma_\mu^{(v,w)}=\Gamma_\mu+(v+w\gamma_5)\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} \tag{50}$$

по аналогии с тем, что имеет место для тензоров (см.[/27/], стр. 55). Применение ковариантной производной к билинейным комбинациям $\psi_{v,w}$ будет давать результаты, отличные от (44)-(47).

5. Свойства билинейных комбинаций

Из (24) вытекает, что

$$\delta^*(\bar\psi\psi) = -\varkappa\lambda^\rho\partial_\rho(\bar\psi\psi), \tag{51}$$

$$\delta^*(\bar\psi\gamma_\mu\psi) = -\varkappa\lambda^\rho\partial_\rho(\bar\psi\gamma_\mu\psi) - \frac{\varkappa}{2}(\Lambda-\tilde\Lambda+2\Delta)_{\mu\beta}\bar\psi\gamma_\beta\psi, \tag{52}$$

$$\delta^*(\bar\psi\sigma_{\mu\nu}\psi) = -\varkappa\lambda^\rho\partial_\rho(\bar\psi\sigma_{\mu\nu}\psi) - \frac{\varkappa}{2}(\Lambda-\tilde\Lambda+2\Delta)_{\mu\beta}\bar\psi\sigma_{\beta\nu}\psi - \frac{\varkappa}{2}(\Lambda-\tilde\Lambda+2\Delta)_{\nu\beta}\bar\psi\sigma_{\mu\beta}\psi, \tag{53}$$

$$\delta^*(\bar\psi\gamma_\mu\gamma_5\psi) = -\varkappa\lambda^\rho\partial_\rho(\bar\psi\gamma_\mu\gamma_5\psi) - \frac{\varkappa}{2}(\Lambda-\tilde\Lambda+2\Delta)_{\mu\beta}\bar\psi\gamma_\beta\gamma_5\psi, \tag{54}$$

$$\delta^*(\bar\psi\gamma_5\psi) = -\varkappa\lambda^\rho\partial_\rho(\bar\psi\gamma_5\psi), \tag{55}$$

$$\delta^*(\bar\psi\gamma_\mu\nabla_\nu\psi) = -\varkappa\lambda^\rho\partial_\rho(\bar\psi\gamma_\mu\nabla_\nu\psi) - \varkappa\partial_\nu\lambda^\rho\bar\psi\gamma_\mu\nabla_\rho\psi - \frac{\varkappa}{2}(\Lambda-\tilde\Lambda+2\Delta)_{\mu\beta}\bar\psi\gamma_\beta\nabla_\nu\psi. \tag{56}$$

Следовательно, величины $\bar\psi\psi$ и $\bar\psi\gamma_5\psi$ преобразуются как скаляры, а остальные величины не преобразуются по тензорным законам. Как тензоры будут преобразовываться комбинации, полученные путем умножения на нетензорную величину $\tau^{\mu\nu}$: $\tau^{\mu\nu}\bar\psi\gamma_\nu\psi$ и $\tau^{\mu\nu}\bar\psi\gamma_\nu\gamma_5\psi$ суть, по обычной терминологии,контравариантные векторы, $\tau^{\mu\alpha}\tau^{\nu\beta}\bar\psi\sigma_{\beta\alpha}\psi$ — контравариантный антисимметричный тензор 2-го ранга, а $\tau^{\mu\alpha}\bar\psi\gamma_\alpha\nabla_\nu\psi$ —смешанный тензор 2-го ранга; свертка последнего тензора есть скаляр, который входит в лагранжиан для спинорного поля.

6. Взаимодействия спинорного поля

Плотность лагранжиана должна быть не скаляром, который преобразуется согласно (10), а относительным скаляром с весом 1, который инфинитезимально при общих преобразованиях изменяется на дивергенцию: $\delta^*\mathcal{L} = -\varkappa\partial_\rho(\lambda^\rho\mathcal{L})$. Тогда полный лагранжиан будет инвариантом. Зная трансформационные свойства билинейных комбинаций спиноров, легко построить плотность лагранжиана для взаимодействия спинорного поля с гравитационным $h^{\mu\nu}$ и одновременно электромагнитным A_μ полями

$$\mathcal{L}=-\left\{\frac{1}{2}\tau^{\mu\nu}\left[\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\nu-\Gamma_\nu-ieA_\nu)\psi-\bar{\psi}(\overleftarrow{\partial}_\nu+\Gamma_\nu+ieA_\nu)\gamma_\mu\psi\right]+m\bar{\psi}\psi\right\}(\mathrm{Det}\, g)^{-\frac{1}{2}}. \tag{57}$$

Путем интегрирования по частям можно привести этот лагранжиан к более простому, но не самосопряженному виду

$$\mathcal{L}=-\left\{\tau^{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\nu-\Gamma_\nu-ieA_\nu)\psi+m\bar{\psi}\psi\right\}(\mathrm{Det}\, g)^{-\frac{1}{2}}, \tag{58}$$

откуда сразу же следует уравнение Дирака в гравитационном поле

$$\tau^{\mu\nu}\gamma_\mu(\partial_\nu-\Gamma_\nu-ieA_\nu)\psi+m\psi=0. \tag{59}$$

Лагранжева плотность (57) (в отличие от лагранжевой плотности в формализме ортогональных реперов) явно выражается через гравитационное и другие поля и представляет собой бесконечный ряд по степеням гравитационного поля $h^{\mu\nu}$. Найдем начальные члены ряда. Для этого воспользуемся разложениями $\tau^{\mu\nu}$ (31), Γ_μ (42) и[x/]

$$\mathrm{Det}\, g=1+\varkappa h_1+\frac{\varkappa^2}{2}(h_1^2-h_2)+\frac{\varkappa^3}{6}(h_1^3-3h_1h_2+2h_3)+\frac{\varkappa^4}{24}(h_1^4-6h_1^2h_2+8h_1h_3+3h_2^2-6h_4), \tag{60}$$

$$(\mathrm{Det}\, g)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{\varkappa}{2}h_1+\frac{\varkappa^2}{8}(h_1^2+2h_2)+\cdots, \tag{61}$$

где $h_1=h^{\alpha\alpha}$, $h_2=h^{\alpha\beta}h^{\beta\alpha}$, $h_3=h^{\alpha\beta}h^{\beta\gamma}h^{\gamma\alpha}$, $h_4=h^{\alpha\beta}h^{\beta\gamma}h^{\gamma\delta}h^{\delta\alpha}$. Тогда

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}\left[\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\nu-ieA_\nu)\psi-(\partial_\nu+ieA_\nu)\bar{\psi}\cdot\gamma_\mu\psi\right]\left\{\delta_{\mu\nu}+\frac{\varkappa}{2}(h^{\mu\nu}-\delta_{\mu\nu}h_1)+\right.$$
$$\left.+\frac{\varkappa^2}{8}\left[\delta_{\mu\nu}(h_1^2+2h_2)-h^{\mu\nu}h_1-h^{\mu\rho}h^{\rho\nu}\right]\right\}-m\bar{\psi}\psi\left[1-\frac{\varkappa h_1}{2}+\frac{\varkappa^2}{8}(h_1^2+2h_2)\right]+$$
$$+\frac{\varkappa^2}{16}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi h^{\nu\sigma}\partial_\lambda h^{\sigma\rho}+O(\varkappa^3). \tag{62}$$

Продолжая разложение (57), легко найти и дальнейшие члены ряда. В линейном приближении по $\varkappa h^{\mu\nu}$ взаимодействие фермионов с гравитонами уже рассматривалось[/24,28/]. Выписанные в (62) члены второго порядка по $\varkappa$ позволяют рассчи-

x/ (60) следует из

$$\mathrm{Det}\, g=\frac{1}{24}\left\{(g^{\alpha\alpha})^4-6(g^{\alpha\alpha})^2g^{\beta\gamma}g^{\gamma\beta}+3(g^{\alpha\beta}g^{\beta\alpha})^2+8g^{\alpha\alpha}g^{\beta\gamma}g^{\gamma\delta}g^{\delta\beta}-6g^{\alpha\beta}g^{\beta\gamma}g^{\gamma\delta}g^{\delta\alpha}\right\}.$$

тать гравитационную собственную энергию, комптон-эффект гравитонов и т.д. Нетрудно записать и взаимодействия с другими полями. Например, псевдоскалярная связь с псевдоскалярным полем φ запишется как

$$\mathcal{L} = i f \bar{\psi} \gamma_5 \psi \, \varphi \, (\mathrm{Det}\, g)^{-\frac{1}{2}}. \tag{63}$$

Четырехфермионные взаимодействия также выглядят очень просто; присутствие гравитационного поля ведет только к появлению $(\mathrm{Det}\, g)^{-\frac{1}{2}}$:

$$\mathcal{L} = \{ f_S (\bar{\psi}_1 \psi_2)(\bar{\psi}_3 \psi_4) + f_V (\bar{\psi}_1 \gamma_\mu \psi_2)(\bar{\psi}_3 \gamma_\mu \psi_4) + \\ + f_T (\bar{\psi}_1 \sigma_{\mu\nu} \psi_2)(\bar{\psi}_3 \sigma_{\mu\nu} \psi_4) + \dots \} (\mathrm{Det}\, g)^{-\frac{1}{2}}. \tag{64}$$

Подчеркнем, что γ -матрицы в (64) суть обычные числовые дираковские матрицы: $\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$!

В заключение приведем результат квадрирования уравнения Дирака в электромагнитном и гравитационном полях (59)

$$\left[(\mathrm{Det}\, g)^{\frac{1}{2}} (\partial_\mu - \Gamma_\mu - ieA_\mu)(\mathrm{Det}\, g)^{-\frac{1}{2}} g^{\mu\nu} (\partial_\nu - \Gamma_\nu - ieA_\nu) + \frac{R}{4} + \frac{e}{2} \tau^{\mu\lambda} \tau^{\nu\rho} F_{\mu\nu} \sigma_{\lambda\rho} - m^2\right] \psi = 0,$$

где R -скалярная кривизна. Это уравнение впервые было выведено Фоком (в формализме ортогональных реперов), а удобную систему промежуточных выкладок для его вывода можно найти у Шредингера /9/. В нашем формализме вычисления проводятся аналогично.

Авторы признательны М.А. Маркову за обсуждение.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

К выводу закона преобразования спинора

В последние два члена (27) входят производные от матрицы Δ . Если воспользоваться представлением (25), то

$$-\varkappa \left[\lambda^\rho_1 \partial_\rho \Delta(\Lambda_2) - \lambda^\rho_2 \partial_\rho \Delta(\Lambda_1)\right] = \Delta(\Lambda_{ck}) - \\ - \sum_{m,n=0}^{\infty} \varkappa^{m+n+1} c_{mn} \Big\{ \lambda^\rho_1 \left[\partial_\rho h^m \cdot (\Lambda_2 + \tilde{\Lambda}_2) \cdot h^n + h^m \cdot (\Lambda_2 + \tilde{\Lambda}_2) \cdot \partial_\rho h^n\right] - \\ - \lambda^\rho_2 \left[\partial_\rho h^m \cdot (\Lambda_1 + \tilde{\Lambda}_1) \cdot h^n + h^m \cdot (\Lambda_1 + \tilde{\Lambda}_1) \cdot \partial_\rho h^n\right] \Big\} + \\ + \Delta\left(\frac{\varkappa}{2} \left[(\Lambda_1 + \tilde{\Lambda}_1)(\Lambda_2 - \tilde{\Lambda}_2) - (\Lambda_2 - \tilde{\Lambda}_2)(\Lambda_1 + \tilde{\Lambda}_1) + (\Lambda_1 - \tilde{\Lambda}_1)(\Lambda_2 + \tilde{\Lambda}_2) - (\Lambda_2 + \tilde{\Lambda}_2)(\Lambda_1 - \tilde{\Lambda}_1)\right]\right), \tag{П.1}$$

где в последней строке в больших круглых скобках стоит аргумент Δ .

Теперь вычислим вариацию $\delta^*_{\lambda_2}\Delta(\Lambda_1)$. Используя (25), получаем:

$$\delta^*_{\lambda_2}\Delta(\Lambda_1)=\sum_{\substack{m=1\\n=0}}^{\infty}\varkappa^{m+n}c_{mn}\sum_{\tau=0}^{m-1}h^{\tau}\cdot\delta^*_{\lambda_2}h\cdot h^{m-\tau-1}\cdot(\Lambda_1+\tilde{\Lambda}_1)\cdot h^{n}+ \tag{П.2}$$
$$+\sum_{\substack{m=0\\n=1}}^{\infty}\varkappa^{m+n}c_{mn}\sum_{\tau=0}^{n-1}h^{m}\cdot(\Lambda_1+\tilde{\Lambda}_1)\cdot h^{\tau}\cdot\delta^*_{\lambda_2}h\cdot h^{n-\tau-1}.$$

Подставим сюда δ^*h из (12). Разобьем Λ_i на симметричную и антисимметричную части: $\Lambda_i=\frac{1}{2}(\Lambda_i+\tilde{\Lambda}_i)+\frac{1}{2}(\Lambda_i-\tilde{\Lambda}_i)$. При этом антисимметричная часть легко выносится наружу. После несложных замен переменных суммирования рядов приходим к

$$\delta^*_{\lambda_2}\Delta(\Lambda_1)=-\sum_{\substack{m=0\\n=0}}^{\infty}\varkappa^{m+n+1}c_{mn}\lambda_2^{\rho}\left[\partial_\rho h^{m}\cdot(\Lambda_1+\tilde{\Lambda}_1)\cdot h^{n}+h^{m}\cdot(\Lambda_1+\tilde{\Lambda}_1)\cdot\partial_\mu h^{n}\right]+$$
$$+\left\{2\sum_{\substack{j=0\\k=0\\l=0}}^{\infty}c_{j,k+l+1}+\sum_{\substack{j=0\\k=0\\l=1}}^{\infty}c_{j,k+l}+\sum_{\substack{j=0\\k=1\\l=0}}^{\infty}c_{j,k+l}\right\}\varkappa^{j+k+l+1}h^{j}\cdot(\Lambda_1+\tilde{\Lambda}_1)\cdot h^{k}\cdot(\Lambda_2+\tilde{\Lambda}_2)\cdot h^{l}- \tag{П.3}$$
$$-\frac{\varkappa}{2}(\Lambda_2-\tilde{\Lambda}_2)\Delta(\Lambda_1)+\frac{\varkappa}{2}\Delta(\Lambda_1)(\Lambda_2-\tilde{\Lambda}_2)-\frac{\varkappa}{2}\Delta\Big((\Lambda_1+\tilde{\Lambda}_1)(\Lambda_2-\tilde{\Lambda}_2)-(\Lambda_2-\tilde{\Lambda}_2)(\Lambda_1+\tilde{\Lambda}_1)\Big).$$

Подставим (П.1) и (П.3) в (27), и результат приравняем вариации $\delta^*_{ck}\psi$, которую можно записать в виде:

$$\delta^*_{\lambda_{ck}}\psi=-\varkappa\lambda^{\rho}\partial_\rho\psi+\frac{i\varkappa}{4}\langle\Delta(\Lambda_{ck})\cdot\sigma\rangle\psi- \tag{П.4}$$
$$-\frac{i\varkappa^2}{4}\left[\langle(\Lambda_1\Lambda_2-\Lambda_2\Lambda_1)\cdot\sigma\rangle+\lambda_1^{\rho}\partial_\rho\langle\Lambda_2\cdot\sigma\rangle-\lambda_2^{\rho}\partial_\rho\langle\Lambda_1\cdot\sigma\rangle\right]\psi.$$

Сравнивая коэффициенты, получаем рекуррентное соотношение

$$c_{j,k+l+1}+c_{l,k+j+1}+c_{j,k+l}+c_{l,k+j}-\frac{1}{2}c_{jk}\delta_{l0}-\frac{1}{2}c_{lk}\delta_{j0}= \tag{П.5}$$
$$=\sum_{\tau=0}^{k}c_{j,\tau}c_{k-\tau,l}-\frac{1}{4}\delta_{j0}\delta_{k0}\delta_{l0}.$$

Полагая в (П.5) $j=0$, $\ell=0$ и учитывая антисимметричность коэффициентов, находим

$$2c_{0,k+1}+c_{0,k}=-\sum_{r=0}^{k}c_{0,r}c_{0,k-r}-\frac{1}{4}\delta_{k0}\ . \qquad (\text{П.6})$$

Применим метод производящих функций. Пусть $\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_{0k}x^k$. Тогда из (П.6) имеем ($\varphi(0)=0$, так как $c_{00}=0$).

$$\frac{2\varphi(x)}{x}+\varphi(x)=-\varphi^2(x)-\frac{1}{4}\ ; \qquad \varphi(x)=\frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}\ . \qquad (\text{П.7})$$

Далее, положим в (П.5) $k=0$. Тогда

$$c_{j,\ell+1}+c_{\ell,j+1}-\frac{1}{2}c_{\ell 0}\delta_{j0}-\frac{1}{2}c_{j0}\delta_{\ell 0}=c_{j0}c_{0\ell}-\frac{1}{4}\delta_{j0}\delta_{\ell 0}\ . \qquad (\text{П.8})$$

Введя теперь производящую функцию двух переменных $G(x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}c_{mn}x^m y^n$, $G(x,y)=-G(y,x), G(0,y)=\varphi(y)$, из (П.8) находим:

$$\frac{G(x,y)-G(x,0)}{y}-\frac{G(x,y)-G(0,y)}{x}-\frac{1}{2}G(x,0)+\frac{1}{2}G(0,y)= \qquad (\text{П.9})$$

$$=G(x,0)G(0,y)-\frac{1}{4}\ .$$

Отсюда следует, что

$$G(x,y)=\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+y}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}}\ . \qquad (\text{П.10})$$

Наконец, общее рекуррентное соотношение (П.5) выражает следующее общее свойство производящей функции $G(x,y)$:

$$\frac{(1+z)G(x,z)-(1+y)G(x,y)}{z-y}+\frac{(1+x)G(x,z)-(1+y)G(y,z)}{x-y}- \qquad (\text{П.11})$$

$$-\frac{1}{2}G(x,y)+\frac{1}{2}G(y,z)=G(x,y)G(y,z)-\frac{1}{4}\ .$$

Это соотношение получается путем умножения (П.5) на $x^j y^k z^\ell$ и суммирования по j, k, ℓ от 0 до ∞ с последующими заменами индексов и изменением порядка суммирования. Можно убедиться в том, что производящая функция (П.10) действительно удовлетворяет соотношению (П.11).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Закон преобразования τ

1) Теперь вычислим вариацию произвольной функции $f(h)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varkappa^n b_n h^n$. Варьируя каждое из h согласно (12), имеем

$$\delta^* f = -\varkappa \lambda^\rho \partial_\rho f - \frac{\varkappa}{2}(\Lambda-\tilde{\Lambda})f + \frac{\varkappa}{2} f(\Lambda-\tilde{\Lambda}) +$$

$$+\left\{\sum_{\substack{k=0\\ \ell=0}}^{\infty} b_{k+\ell+1} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k=1\\ \ell=0}}^{\infty} b_{k+\ell} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k=0\\ \ell=1}}^{\infty} b_{k+\ell}\right\}\varkappa^{k+\ell+1} h^k\cdot(\Lambda+\tilde{\Lambda})\cdot h^\ell . \tag{П.12}$$

Производя замены переменных суммирования и изменения порядка суммирования, можно получить производящую функцию для последней строки (П.12) в виде:

$$F(x,y)=\left\{\sum_{\substack{k=0\\ \ell=0}}^{\infty} b_{k+\ell+1} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k=1\\ \ell=0}}^{\infty} b_{k+\ell} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k=0\\ \ell=1}}^{\infty} b_{k+\ell}\right\} x^k y^\ell = \tag{П.13}$$

$$=\frac{2+x+y}{2(x-y)}\left[f(x)-f(y)\right] .$$

В частности, в интересующем нас случае $f(h)=\tau$ (31) эта производящая функция равна

$$F(x,y)=\frac{2+x+y}{2(x-y)}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+y}\right)=\frac{2+x+y}{2\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}\right)}= \tag{П.14}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1+y}+\sqrt{1+x}\; G(x,y) .$$

Из формул (П.12) и (П.14) следует закон преобразования τ (35).

2) Формула (36) легко получается как следствие того, что производящая функция для $\tau\Delta+\Delta\tau$ равна

$$\sqrt{1+x}\; G(x,y)+\sqrt{1+y}\; G(x,y)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+y}\right) .$$

3) Отметим также, что техника производящих функций удобна для дифференцирования функций от матриц, например,

$$\partial_\mu f(h)=\sum_{\substack{k=0\\ \ell=0}}^{\infty} \varkappa^{k+\ell+1}\, b_{k+\ell+1}\, h^k\cdot\partial_\mu h\cdot h^\ell .$$

Производящая функция в этом случае равна

$$H(x,y)=\sum_{\substack{k=0\\ \ell=0}}^{\infty} \varkappa^{k+\ell+1} b_{k+\ell+1} x^k y^\ell = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} .$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

К выводу ковариантной производной спинора

Подставим разложение (40) в формулу (39). Тогда найдем:

$$\delta^* a_\mu = -\varkappa\lambda^\rho\partial_\rho a_\mu - \varkappa\partial_\mu\lambda^\rho\cdot a_\rho \quad , \tag{П.15}$$

$$\delta^* a^\alpha_\mu = -\varkappa\lambda^\rho\partial_\rho a^\alpha_\mu - \varkappa\partial_\mu\lambda^\rho\cdot a^\alpha_\rho - \frac{\varkappa}{2}\left(\Lambda-\tilde\Lambda+2\Delta\right)_{\alpha\rho} a^\rho_\mu \ , \tag{П.16}$$

$$\delta^* a^{\alpha\beta}_\mu = -\varkappa\lambda^\rho\partial_\rho a^{\alpha\beta}_\mu - \varkappa\partial_\mu\lambda^\rho\cdot a^{\alpha\beta}_\rho - \frac{i\varkappa}{8}\partial_\mu\left(\Lambda-\tilde\Lambda+2\Delta\right)_{\alpha\beta} -$$
$$-\frac{\varkappa}{2}\left(\Lambda-\tilde\Lambda+2\Delta\right)_{\alpha\rho} a^{\rho\beta}_\mu + \frac{\varkappa}{2} a^{\alpha\rho}\left(\Lambda-\tilde\Lambda+2\Delta\right)_{\rho\beta}, \tag{П.17}$$

$$\delta^* a^{\alpha 5}_\mu = -\varkappa\lambda^\rho\partial_\rho a^{\alpha 5}_\mu - \varkappa\partial_\mu\lambda^\rho\cdot a^{\alpha 5}_\rho - \frac{\varkappa}{2}\left(\Lambda-\tilde\Lambda+2\Delta_{\alpha\rho}\right) a^{\rho 5}_\mu \ , \tag{П.18}$$

$$\delta^* a^5_\mu = -\varkappa\lambda^\rho\partial_\rho a^5_\mu - \varkappa\partial_\mu\lambda^\rho\cdot a^5_\rho \ . \tag{П.19}$$

Теперь произведем замены:

$$a^\alpha_\mu = b_{\mu\beta}\tau^{\beta\alpha} \ , \tag{П.20}$$

$$a^{\alpha\beta}_\mu = \tau^{\alpha\gamma}\left[c_{\mu\gamma\delta} + \frac{i}{8}\left(\partial_\gamma g_{\mu\delta} - \partial_\delta g_{\mu\gamma}\right) + \frac{i}{8}\left(\tau^{-1}\partial_\mu\tau^{-1} - \partial_\mu\tau^{-1}\cdot\tau^{-1}\right)_{\gamma\delta}\right]\tau^{\delta\beta}, \tag{П.21}$$

$$a^{\alpha 5}_\mu = d_{\mu\beta}\tau^{\beta\alpha} \ . \tag{П.22}$$

Тогда уравнения (П.16)-(П.18) с учетом (7), (35) и (36) примут вид:

$$\delta^* b_{\mu\beta} = -\varkappa\lambda^\rho\partial_\rho b_{\mu\beta} - \varkappa(\Lambda b + b\tilde{\Lambda})_{\mu\beta}, \tag{П.23}$$

$$\delta^* c_{\mu\gamma\delta} = -\varkappa\lambda^\rho\partial_\rho c_{\mu\gamma\delta} - \varkappa\partial_\mu\lambda^\rho\cdot c_{\rho\gamma\delta} - \varkappa\partial_\gamma\lambda^\beta\cdot c_{\mu\beta\delta} - \varkappa\partial_\delta\lambda^\beta\cdot c_{\mu\gamma\beta}, \tag{П.24}$$

$$\delta^* d_{\mu\beta} = -\varkappa\lambda^\rho\partial_\rho d_{\mu\beta} - \varkappa(\Lambda d + d\tilde{\Lambda})_{\mu\beta}. \tag{П.25}$$

Таким образом, мы пришли к коэффициентам a_μ, $b_{\mu\alpha}$, $c_{\mu\alpha\beta}$, $d_{\mu\alpha}$ и a^5_μ, которые преобразуются как ковариантные тензоры (тензор $c_{\mu\alpha\beta}$ – антисимметричен по индексам $\alpha\beta$).

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Сопоставление с формализмом ортогональных реперов

Отметим, что если ввести матрицы $\hat{\gamma}^\mu = \tau^{\mu\nu}\gamma_\nu$, то они будут подчиняться перестановочным соотношениям

$$\hat{\gamma}^\mu\hat{\gamma}^\nu + \hat{\gamma}^\nu\hat{\gamma}^\mu = 2g^{\mu\nu}, \tag{П.26}$$

которые систематически использовались при изучении спиноров, начиная с первых работ [1-4]. Для введенных матриц $\hat{\gamma}^\mu$ в силу (49) тождественно выполняется соотношение

$$\partial_\mu\hat{\gamma}^\sigma + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\hat{\gamma}^\lambda + [\hat{\gamma}^\sigma, \Gamma_\mu] = 0. \tag{П.27}$$

Такое соотношение для обобщенных γ-матриц впервые было получено Фоком [4], положено в основу исследования спиноров у Шредингера [9] и широко употребляется. Фактически (П.27) есть другая запись тождества (49) для "корня из метрического тензора".

Далее, в теории тяготения при любом подходе с спинорам приходится извлекать корень из $g^{\mu\nu}$. В формализме ортогональных реперов [23] корнем является величина $a^{m\nu}$ – тетрада, так что $g^{\mu\nu} = a^{m\mu}a^{m\nu}$ и $g^{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu = dy^m dy^m$, где $dy^m = a^{mv} dx_v$ –дифференциалы координат в локально ортогональном репере. При этом при общих преобразованиях a^{mv} преобразуется только по индексу v, а dy^m вообще не преобразуется.

У нас корень извлечен специальным образом (31). Если для сравнения наш подход толковать в том же духе, то можно перейти к специфическому локально ортогональному реперу, вводя $dy^\mu = \tau^{\mu\nu} dx^\nu$, так что $g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = dy^\mu dy^\nu$. Однако в отличие от тетрады $\tau^{\mu\nu}$ явно выражено через гравитационное поле $h^{\mu\nu}$, его индексы равноправны, и при общих преобразованиях $\tau^{\mu\nu}$ преобразуется по обоим индексам. Используя $dx'_\mu = dx_\mu - \varkappa \partial_\mu \lambda^\rho . dx_\rho$ и (35), находим, что dy^μ тоже преобразуется:

$$dy'^\mu = \tau'^{\mu\nu}(x') dx'_\nu = dy^\mu - \frac{\varkappa}{2}(\Lambda - \tilde{\Lambda} + 2\Delta)_{\mu\nu} dy_\nu . \quad (П.28)$$

Таким образом, при общих преобразованиях дифференциалы dy^μ претерпевают индуцированное ортогональное преобразование: "параметры" $-\frac{\varkappa}{2}(\Lambda - \tilde{\Lambda} + 2\Delta)_{\mu\nu}$ – антисимметричны. Это свойство позволяет заменить Λ в обычном лоренцевском спинорном законе (19) на $\frac{1}{2}(\Lambda - \tilde{\Lambda} + 2\Delta)$, что также дает закон (24). Итак, еще один вывод спинорного закона состоит в следующем. 1) Решая уравнение $\tau^2 = g \equiv 1 + \varkappa h$ в виде ряда по $\varkappa h$, находим τ в форме (31). 2) С помощью $\delta^* h$ (12), следуя Приложению 2, получаем $\delta^* \tau$ (35). При этом возникает матрица Δ (25) или (32). 3) Отсюда находим ортогональное преобразование (П.28). 4) Заменяя в обычном законе дираковского спинора (19) Λ на $\frac{1}{2}(\Lambda - \tilde{\Lambda} + 2\Delta)$, приходим к искомому закону преобразования спинора (24).

Если при помощи такого приема обобщать тензоры специальной теории относительности, то получатся не обычные тензоры, а величины, преобразующиеся по законам типа (52)-(54). Например, вместо векторного закона получим закон (52).

Литература

1. H.Tetrode. Zs. f. Phys., 50, 336 (1928).
2. E.Wigner. Zs. f. Phys., 53, 592 (1929).
3. В.А. Фок, Д.Д. Иваненко. Compt. Rend. 188, 1470 (1929); Phys. Zs., 30, 648 (1929).
4. В.А. Фок. Comp. Rend., 189, 25 (1929); Zs. f. Phys., 57, 261 (1929); ЖРФХО, часть физ., 62, в. 1, 133 (1930).
5. H.Weyl. Proc. Nat. Acad. Amer., 15, 323 (1929); Zs. f. Phys., 56, 330 (1929).
6. R.Zaycoff. Ann. d. Phys., 37, 1398 (1931). 7, 650 (1930).
7. B.Podolsky. Phys. Rev., 37, 1398 (1931).
8. J.A.Schouten. Journ. of Math. and Phys., 10, 239 (1931).
9. E.Schrodinger, Sitzungsber. der Preussischen Acad. of Wiss., Berlin, c. 105 (1932).
10. V.Bargmann. Sitzungsber. der Preussiachen Acad. of Wiss. Berlin, c. 346 (1932).
11. L.Infeld, B.L. van der Waerden. Sitzungsber. der Preussischen Acad. of Wiss., Berlin, c. 380 (1933).
12. E.Cartan. Lecons Sur la Theorie des Spineurs (1938).
Перевод: Э. Картан. Теория спиноров, И Л, (1947).
13. F.Belinfante. Physica, 7, 305 (1940).
14. W.Bade, H.Jehle. Rev. Mod. Phys., 25, 714 (1953).
15. M.Riesz. Lund Univer. Math. Sem., 12 (1954).
16. Ю.Б. Румер. Исследования по 5-оптике. Гостехиздат, М., 1956.
17. P.G.Bergmann. Phys. Rev., 107, 624 (1957).
18. D.Brill, J.Wheeler. Rev. Mod. Phys., 29, 465 (1957).
19. P.A.Dirac. Сборник – Max–Plank Festschrift, Berlin (1958), 339.
20. J.G.Fletcher. Nuovo Cimento, 8, 451 (1958).
21. A.Peres. Nuovo Cim., 28, 865 (1963); Journ. Math. Phys., 5, 720 (1964).
22. A.Lichnerowicz. Bull. Soc. Math. de France, 92, 11 (1964).
23. L.P.Eisenhart. Riemannian Geometry, Princeton (1926);
(Перевод Л.Р. Эйзенхарт. Риманова геометрия. ИЛ, 1948); C.Møller. Mat. Fys. Skr. Dan. Kid. Sclsk., 1, no 10 (1961).
24. S.N.Gupta. Proc. Phys. Soc., A 65, 161, 608 (1952); Rev. Mod. Phys., 29, 334 (1957).
25. W.Pauli. Relativitatstheorie. Enc. der Mathem. Wissenschaften Band ; 5, 2 (1921).
(Перевод: В. Паули. Теория относительности. ИЛ, 1947, стр. 101).
26. C.Møller. Det. Kgl. Dan. Vid. Selsk. Math–fys., 23, N. 1 (1945).
27. O.Veblen, Invariants of Quadratic Differential Forms (1927);
Перевод: О. Веблен. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. ИЛ, 1948).
28. И.Ю. Кобзарев, Л.Б. Окунь. ЖЭТФ, 43, 1904 (1962).

Рукопись поступила в издательский отдел
11 ноября 1964 г.