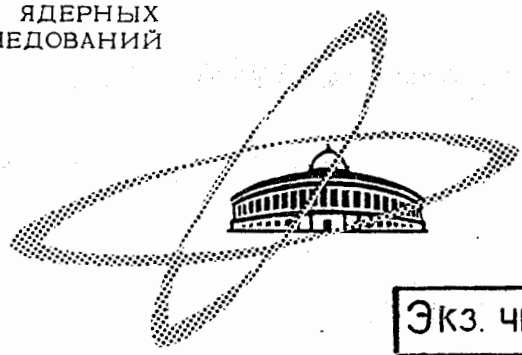


1882

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P-1882



ЭКЗ. ЧИТ. ЗАЛА

Б.Н.Захарьев, Р.К.Калинаускас

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

О СВЯЗАННОМ СОСТОЯНИИ ТРЕХ ЧАСТИЦ

1964

Для элементарных частиц проникаемость любых барьеров в противоположных направлениях строго одинакова. Но для сложных частиц при энергии, достаточной для реального возбуждения высших состояний внутреннего движения, коэффициенты прохождения через несимметричные барьеры в разные стороны могут сильно различаться. С указанным эффектом мы встречаемся при рассмотрении различных ядерных явлений, например, α -распада и рассеяния α -частиц на ядрах.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

Zakhariev B.N., Kalinauskas R.K.

P - 1882

On Bound Three-Body State

The penetration of any barriers in opposite directions is strictly identical for elementary particles. But for complex particles, the coefficients of penetration through the non-symmetrical barrier in opposite directions may be essentially different at an energy sufficient for the real excitation of the higher states of internal motion. We are faced with this effect in considering different nuclear phenomena, e.g., α -decay and α -particle scattering on nuclei.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1964.

P-1882

Б.Н.Захарьев, Р.К.Калинаускас

О СВЯЗАННОМ СОСТОЯНИИ ТРЕХ ЧАСТИЦ

О И И
БИБЛИОТ КА

1. Введение

В последнее время возрос интерес к проблеме трех тел. Три взаимодействующие частицы — это простейшая система, которая позволяет изучать взаимодействие сложной частицы с внешним полем (две связанные между собой частицы в поле третьей). При этом многие свойства более сложных систем (с большим числом тел) могут быть поняты на основе задачи трех тел^{/1,2/}.

Данная работа посвящена исследованию сходимости методов, которые использовались для решения конкретных задач в^{/1,2,3/}. Для того, чтобы стало ясно, что сделано в этой работе и с какой целью она выполнена, имеет смысл очень коротко сказать о том, что нам известно в настоящее время о сходимости методов, близких к рассматриваемому здесь и в^{/1,4/}.

А. Метод Галеркина. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$L\Psi = f \quad (1)$$

с некоторыми граничными условиями. Решение Ψ можно разложить по полной системе известных функций ϕ_n , удовлетворяющих тем же краевым условиям. Приближенное решение (1) ищем в виде, конечной суммы ($k \leq n$):

$$\Psi \approx \sum_{k=1}^n a_k \phi_k \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), умножая слева на ϕ_j (где $j=1, \dots, n$) и интегрируя, получим для a_k систему линейных уравнений. Таким образом задача (1) сводится к решению этой системы. Сходимость суммы в правой части (2) к решению Ψ была доказана в наиболее общем виде Михлиным^{/5/} для случая, когда k в (2) принимает только дискретные значения (отсутствие непрерывного спектра). Таким образом, например, имеется доказательство сходимости метода смешивания конфигураций в модели ядерных оболочек, когда функция N частиц представляется в виде комбинации одночастичных состояний ϕ_k^i , — решений уравнения Шредингера для движения одной частицы в некоторой бесконечной потенциальной яме (имеется только дискретный спектр)

$$\Psi(\bar{r}_1; \bar{r}_2; \dots; \bar{r}_N) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_N=1}^n a_{i_1 \dots i_N} \dots e \phi_{i_1}(\bar{r}_1) \phi_{i_2}(\bar{r}_2) \dots \phi_{i_N}(\bar{r}_N). \quad (3)$$

Б. Метод Борна-Оппенгеймера (теория адиабатического приближения^{/6/}). Пусть требуется найти решение уравнения Шредингера (для простоты мы взяли случай двух переменных^{/4/}):

$$-\frac{1}{2M_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2M_2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + V_{12}(y) + V_1(x + Vy) + V_2(x - Ay)] \Psi(x, y) = E \Psi(x, y). \quad (4)$$

При любом фиксированном x можно разложить $\Psi(x, y)$ по полному набору собственных функций $\Phi_k(y, x)$ уравнения:

$$-\frac{1}{2M_2} \frac{d^2 \Phi_k}{dy^2} + (V_{12} + V_1 + V_2) \Phi_k(y, x) = \epsilon_k \Phi_k(y, x). \quad (5)$$

Приближенное решение (4) имеем в виде суммы с конечным числом членов n

$$\Psi = \sum_{k=1}^n \phi_k(x) \Phi_k(y, x). \quad (6)$$

В отличие от разложения (2) коэффициенты в (6) являются не константами, а функциями от x . Подставляя (6) в (4), умножая слева на Φ_k и интегрируя по y , получим систему дифференциальных уравнений для ϕ_k . Таким образом, задача (4) сводится к решению этой системы.

Нам не известно доказательство сходимости (при $n \rightarrow \infty$) такой процедуры, однако, она представляется оправданной, когда в задаче имеются малые параметры, например, отношение массы электрона (мезона^{/7/}) к массе ядра, малость энергии движения сложной частицы по отношению к расстоянию между уровнями внутреннего движения и т.д.

В. Волновую функцию задачи (4) можно искать в виде разложения по функциям $\Phi_k(y)$, не зависящим от x :

$$\Psi = \sum_k^n \phi_k(x) \Phi_k(y) \quad (7)$$

$$-\frac{1}{2M_2} \frac{d^2 \Phi_k}{dy^2} + V_{12}(y) \Phi_k = \epsilon_k \Phi_k. \quad (8)$$

Этот метод последнее время все чаще начинают использовать в теории ядерных реакций (см., например, ^{/3/}). О сходимости этого метода нам известно лишь, что он, по-видимому, почти всегда сходится хуже, чем метод Б.

Г. В работе^{/4/} была доказана сходимость методов Б и В для одного частного случая: одномерного движения двух частиц, связанных между собой бесконечной прямоугольной потенциальной ямой (только дискретный спектр) во внешнем поле. Было показано, что эта задача может быть решена без использования обычных параметров малости: слабость взаимодействия, малость радиуса взаимодействия между частицами, малость отношения масс, малость энергии движения сложной частицы по сравнению с расстоянием между уровнями внутреннего движения и т.д. При этом был доказан не только сам факт сходимости, но и оценена его скорость, которая оказалась довольно большой (населенность возбужденных виртуальных состояний n падает как $\frac{1}{E^3}$).

В данной работе доказывается сходимость метода В в модели, когда две частицы связаны между собой конечной потенциальной ямой (имеется непрерывный спектр) и эта

сложная частица находится в связанном состоянии в некотором внешнем поле. Кроме того, показано, что населенность виртуальных возбужденных состояний при движении такой сложной частицы во внешнем поле убывает как $\approx \frac{C}{(\xi_n - E)^2}$.

В разделе 2 рассмотрены волновые функции Φ_n , по которым производится разложение (7) и соответствующие собственные значения ξ_n . В разделе 3 приводятся оценки для коэффициентов смешивания W дифференциальных уравнений для функций ϕ . В разделе 4 получена оценка для населенности виртуальных возбужденных состояний сложной частицы. В разделе 5 рассматривается возможность обрыва системы дифференциальных уравнений ϕ .

2. Волновые функции Φ_n и собственные значения ξ_n

Для конкретизации дальнейших расчетов мы выберем потенциал V_{12} в виде конечной прямоугольной ямы:

$$V_{12} = \begin{cases} 0 & \text{при } |y| \geq a \\ -V_0 & \text{при } |y| < a \end{cases} \quad (9)$$

Дискретный спектр. Волновые функции имеют вид:

$$\Phi_n(y) = \begin{cases} C_{1n} e^{k_n y} & y < -a \\ C_{2n} \sin(k_n y + \delta_n) & \text{при } |y| < a \\ C_{3n} e^{-k_n y} & y > a \end{cases} \quad (10)$$

где

$$|C_{2n}| \geq |C_{1n}| = |C_{3n}|; \quad k_n^2 = -2M_2 \xi_n; \quad \kappa_n^2 = 2M_2(V_0 - \xi_n). \quad (11)$$

Значения k_n определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \text{при нечетном } n & \quad \cos k_n a = k_n / \sqrt{2M_2 V_0}; \quad (\text{tg } k_n a > 0), \\ \text{при четном } n & \quad \sin k_n a = k_n / \sqrt{2M_2 V_0}; \quad (\text{tg } k_n a < 0). \end{aligned} \quad (12)$$

Задача, таким образом, сводится к нахождению значений $k_n > 0$, при которых функция $f_1 = \cos k_n a$ ($\sin k_n a$) при дополнительном условии $\text{tg } k_n a < 0$ (> 0) пересекается с прямыми $f_2 = k_n / \sqrt{2M_2 V_0}$ (см. рис. 1). Из рис. 1 видно, что при любом V_0 (любой наклон прямых f_2) значения k_n могут быть только ниже соответствующих значений для бесконечной ямы $k_n^\infty = n \frac{\pi}{2a}$. При этом опускание дискретных уровней в конечной яме по сравнению с бесконечной происходит не больше, чем на $\frac{\pi}{4M_2 a}$.

$$k_n^\infty - k_n < \frac{\pi}{2a}. \quad (13)$$

Кроме того для наименьшего расстояния ΔE_{\min} между уровнями ямы (9) получаем оценку:

$$\frac{\Delta E_{\min}}{2M_2} = \Delta E_{\min} > \frac{1}{2M_2 a^2} \left(1 + \frac{2}{\pi}\right)^{-2} \quad (14)$$

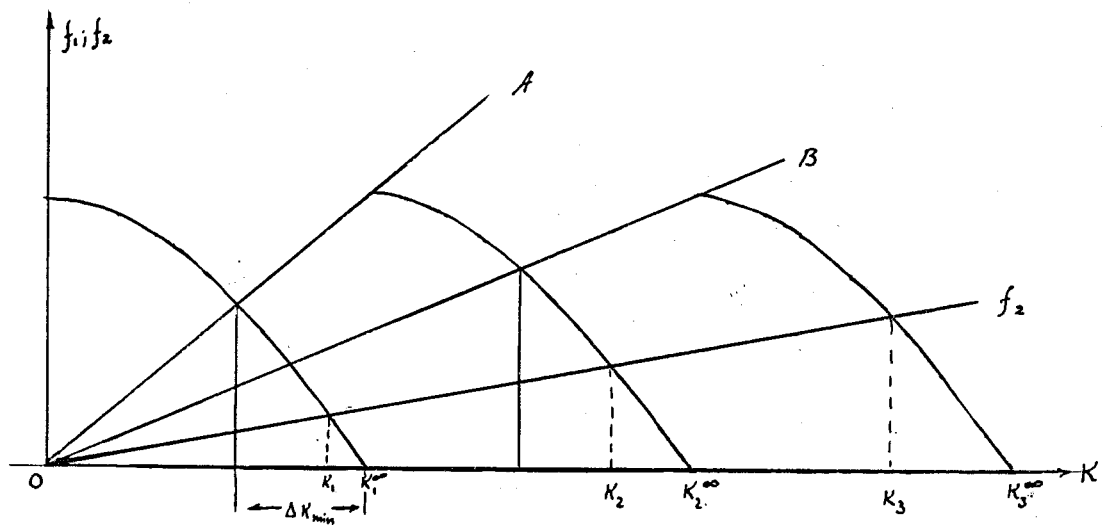


Рис. 1. Положение уровней в конечной прямоугольной яме. Прямые OA и OB представляют собой предельные положения f_2 .

Для коэффициентов C_{2n} можно просто получить оценку, исходя из того, что максимум модуля волновой функции Φ_n^∞ в бесконечной яме с шириной $2a$ должен быть больше максимума модуля $\Phi_n(y)$:

$$C_{2n} < \frac{1}{\sqrt{a}}. \quad (15)$$

Непрерывный спектр. Волновые функции имеют вид:

$$\Phi_k = \begin{cases} A_k \sin(k'y + \delta_1) & \text{при } y < -a \\ B_k \sin(ky + \delta_2) & \text{при } |y| < a \\ C_k \sin(k'y + \delta_3) & \text{при } y > a, \end{cases} \quad (16)$$

где $k'^2 = 2M_2(\epsilon - V_0)$; $k^2 = 2M_2\epsilon$.

Из условия непрерывности Φ и Φ' при $|y| = a$ можно получить:

$$|A_k| \geq |B_k|; \quad |C_k| > |B_k|; \quad \frac{k}{k'} \geq \left| \frac{A_k}{C_k} \right| \geq \frac{k'}{k}. \quad (17)$$

Функции Φ_k должны быть нормированы на δ -функцию, это приводит к ограничению на величину коэффициентов A_k и C_k /8/

$$A_k^2 + C_k^2 = \frac{2}{\pi}. \quad (18)$$

3. Оценка коэффициентов зацепления

Функции $\phi_k(x)$ в разложении (7) определяются из системы интегро-дифференциальных уравнений /4/

$$\phi_m'' - 2M_1(\epsilon_m - E)\phi_m = \sum_n W_{mn} \phi_n \quad (19)$$

Здесь штрихи у ϕ означают производные по x . При исследовании населенности высших состояний $|\phi_m|^2$ важно знать величину коэффициентов W . Мы будем подразумевать, что индексы k, m, n в (7), (8), (19) могут пробегать как дискретные, так и непрерывные значения, а соответствующие суммы означают суммирование по дискретным значениям и интегрирование по непрерывным. Для оценки W оказывается полезной формула:

$$W_{mn}(x) = 2M_1 \int (V_1 + V_2) \Phi_n(y) \Phi_m'(y) dy = \frac{\int (\Phi_n \Phi_m' - \Phi_n' \Phi_m) (V_1 + V_2) dy}{2M_2(\epsilon_n - \epsilon_m)} \quad (20)$$

Точками мы обозначим производные по y . Формула (20) получена интегрированием по частям с учетом того факта, что при любом конечном x V_1 и V_2 равны нулю при $y = \pm\infty$.

Используя (20) и (14), (15), (17), (18), получаем следующие оценки для W :
связь между непрерывными k и k' :

$$|W_{kk'}| < \frac{4M_1}{\pi(k-k')} V_{ar}(V_1+V_2), \quad (21)$$

где $V_{ar} f = \int_{-\infty}^{\infty} |f| dy$

при $\int (V_1+V_2) dy < \frac{V_{ar}(V_1+V_2)}{k-k'}$

$$|W_{kk'}| < \frac{4M_1}{\pi} \int (V_1+V_2) dy; \quad (21a)$$

связь между ϕ_n и ϕ_k , соответствующими дискретному и непрерывному спектру:

$$|W_{kn}|; |W_{nk}| < \frac{2\sqrt{2} M_1}{\sqrt{\pi a} |k-k_n|} V_{ar}(V_1+V_2) \quad (22)$$

$$|W_{kn}|; |W_{nk}| < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi a}} \left\{ \int (V_1+V_2) dy \frac{V_{ar}(V_1+V_2)}{\Delta k_{min}} \right\}; \quad (22a)$$

связь между ϕ_n и ϕ_m , соответствующими дискретному спектру

$$|W_{mn}| < \frac{2M_1}{a |k_n-k_m|} \frac{V_{ar}(V_1+V_2)}{(|m-n|-1)} < \frac{4M_1}{\pi} \frac{V_{ar}(V_1+V_2)}{(|m-n|-1)} \quad (23)$$

$$|W_{mn}| < \frac{2M_1}{a} \left\{ \int (V_1+V_2) dy \frac{V_{ar}(V_1+V_2)}{\Delta k_{min}} \right\}. \quad (23a)$$

Формулами (22a) и (23a) мы будем пользоваться, когда

$$\frac{V_{ar}(V_1+V_2)}{|k_n-k_m|} > \left\{ \int (V_1+V_2) dy \frac{V_{ar}(V_1+V_2)}{\Delta k_{min}} \right\}.$$

4. Оценка $|\phi_m|$

Для тех m , для которых $\xi_m - E > 0$ мы можем с помощью функций $g_m = e^{-\eta_m x}$
 $g_m = -\frac{1}{2\eta_m} e^{\eta_m x}$, где $\eta_m = \sqrt{2M_1(\xi_m - E)}$, являющихся частными решениями однородных уравнений:

$$g_m'' - 2M_1(\xi_m - E)g_m = 0 \quad (24)$$

записать функции ϕ_m в виде (здесь m пробегает как дискретные, так и непрерывные значения) /9/:

$$\begin{aligned} \phi_m = & g_{m_1} \int_{-\infty}^x g_{m_2} \left\{ \sum_{n=1}^N W_{mn} \phi_n + \int_{k_0}^{\infty} W_{mk} \phi_k dk \right\} dk + \\ & + g_{m_2} \int_x^{\infty} g_{m_1} \left\{ \sum_{k=1}^N W_{mn} \phi_n + \int_{k_0}^{\infty} W_{mk} \phi_k dk \right\} dx, \end{aligned} \quad (25)$$

где $k_0^2 = 2M_2V_0$.

Используя соотношения:

$$\left| g_{m_1} \right| \int_{-\infty}^x |g_{m_2}| dx = \left| g_{m_2} \right| \int_x^{\infty} |g_{m_1}| dx = \frac{1}{2\eta^2} \quad (26)$$

и (25), получаем для максимума модуля $\bar{\phi}_m$ функций при $\bar{\epsilon}_m > E$

$$\bar{\phi}_m = \frac{\bar{\epsilon}_m}{\eta^2} \left\{ \sum_{n=1}^N |W_{mn}| \bar{\phi}_n + \int_{k_0}^{\infty} |W_{mk}| \bar{\phi}_k dk \right\}, \quad (27)$$

где $\bar{\epsilon}_m$ некоторая величина меньшая 1.

Выделим в (27) состояния с энергией выше E_s и перепишем (27) в матричной форме^{/4/}:

$$\bar{\phi} = B \bar{\phi} + f, \quad (28)$$

где матричные элементы B определяются так:

$$B_{mn} = \frac{\bar{\epsilon}_m}{\eta^2} |W_{mn}|, \quad (29)$$

здесь $m, n > s$ и могут быть как дискретными, так и непрерывными, а для f имеем:

$$f_m = \begin{cases} \frac{\bar{\epsilon}_m}{\eta^2} \sum_{k=1}^s |W_{mk}| \bar{\phi}_k & s \leq N \\ \frac{\bar{\epsilon}_m}{\eta^2} \left\{ \sum_{n=1}^N |W_{mn}| \bar{\phi}_n + \int_{k_0}^{\infty} |W_{mk}| \bar{\phi}_k dk \right\} & k_s > k_n \end{cases} \quad (29a)$$

Для матрицы B справедливо соотношение:

$$(B^2)_{mn} < B_{mn} \mathcal{R}_s, \quad (30)$$

где $\mathcal{R}_s \rightarrow 0$ с ростом s (см. Примечание 1).

Решая (28) итерациями, получим

$$\bar{\phi} = (1 + B + B^2 + \dots) f. \quad (31)$$

Используя неравенство 30, получаем:

$$\bar{\phi} < f + B(1 + \mathcal{R}_s + \mathcal{R}_s^2 + \dots) f. \quad (32)$$

При достаточно большом s $\mathcal{R}_s \ll 1$ мы можем ограничиться в (32) первым членом из суммы, стоящей в скобках,

$$\bar{\phi} < f + Bf. \quad (33)$$

Как показано в Приложении 2, f_m убывает с ростом m (при достаточно большом $|k_m - k_s|$ как $\frac{1}{(\bar{\epsilon}_m - E)k_m}$, а $(Bf)_m$ убывает быстрее чем $\frac{1}{\bar{\epsilon}_m - E}$. Таким образом, $\bar{\phi}_m$ убывает с ростом m быстрее $\frac{1}{\bar{\epsilon}_m - E}$, а вероятность $|\bar{\phi}_m|^2$ пребывания в m -ом виртуальном возбужденном состоянии - населенность высших уровней

$$|\bar{\phi}_m|^2 < |\bar{\phi}_m|^2 = \frac{C}{(\bar{\epsilon}_m - E)^2} \quad (34)$$

При дифференцируемых V_1 и V_2 населенность высших состояний падает с ростом m и еще быстрее ^{/4/}.

5. О сходимости метода

Быстрое убывание населенности виртуальных состояний, показанное в предыдущем разделе, само по себе не является достаточным основанием процедуры обрыва системы бесконечного числа уравнений (19). Дело в том, что в определение C в (34) входят неизвестные нам величины $\bar{\phi}_n$ ($E_n \leq E_s$), поэтому мы не можем оценить абсолютную величину погрешности, вносимой отбрасыванием уравнений для $\bar{\phi}_n$ с $E_n > E_s$, используя только оценку (34).

В случае задачи о связанном состоянии сложной частицы мы можем воспользоваться ограниченностью полной волновой функции системы $\Psi < L$ для оценки $\bar{\phi}_n$ с $E_n < E_s$. Величина L зависит от конкретного вида потенциалов $V_{12}; V_1; V_2$. Например, в случае, когда $V_{12}; V_1; V_2$ — прямоугольные ямы, картина распределения потенциалов на плоскости (x, y) имеет вид, представленный на рис. 2. Воспользуемся тем фактом, что функция Ψ одномерного движения двух частиц, связанных потенциалом V_{12} во внешнем поле $V_1 + V_2$ совпадает с функцией двумерного движения одной частицы в поле $V_{12} + V_1 + V_2$. Воспользуемся также тем, что максимум модуля $\bar{\Psi}_\infty$ функции двумерного движения одной частицы в бесконечной (двумерной) прямоугольной яме, с основанием в виде прямоугольника (с максимальной площадью), который можно вписать в ABCDE (рис. 2), больше Ψ . Поскольку $\Psi_\infty = \frac{2}{\sqrt{2}r \cdot \rho}$, где r, ρ — длины сторон этого прямоугольника, то мы можем положить $L = \frac{2}{\sqrt{2}r \cdot \rho}$. В случае потенциалов $V_{12}; V_1; V_2$ другой формы мы можем использовать в качестве вспомогательного потенциала не прямоугольную яму, а двумерный осцилляторный потенциал, в котором $\Psi_{\text{осц}} > \Psi$. Для оценки функций $\bar{\phi}_n$ поступим следующим образом. В соотношении

$$\int \Psi^2(x, y) dy = \sum_{n=1}^N \bar{\phi}_n^2(x) + \int_0^{x_0} \bar{\phi}_k^2(x) dx \quad (35)$$

заменим в правой части под интегралом Ψ^2 на L^2 в круге, в которой вписана в область, где $E > V_{12} + V_1 + V_2$, а вне этого круга в концентрических кольцевых областях, где $V_{12} + V_1 + V_2 - E < 0$, заменим Ψ на $L e^{-\theta r}$, где θ — наименьшее значение $V_{12} + V_1 + V_2 - E$ в кольцевой области, r — расстояние до центра круга, и полученный интеграл обозначим P . Таким образом получаем оценку для функций $\bar{\phi}_n$

$$P > \sum_{n=1}^N \bar{\phi}_n^2(x) + \int_0^{x_0} \bar{\phi}_k^2(x) dx \quad (36)$$

На основании (34) и (36) мы можем сделать вывод, что пренебрежение в системе (19) функциями $\bar{\phi}_n$ с $E_n > E_s$ приводит к ошибке, абсолютная величина которой стремится к нулю с ростом E_s быстрее, чем $\frac{1}{(E_s - E)}$.

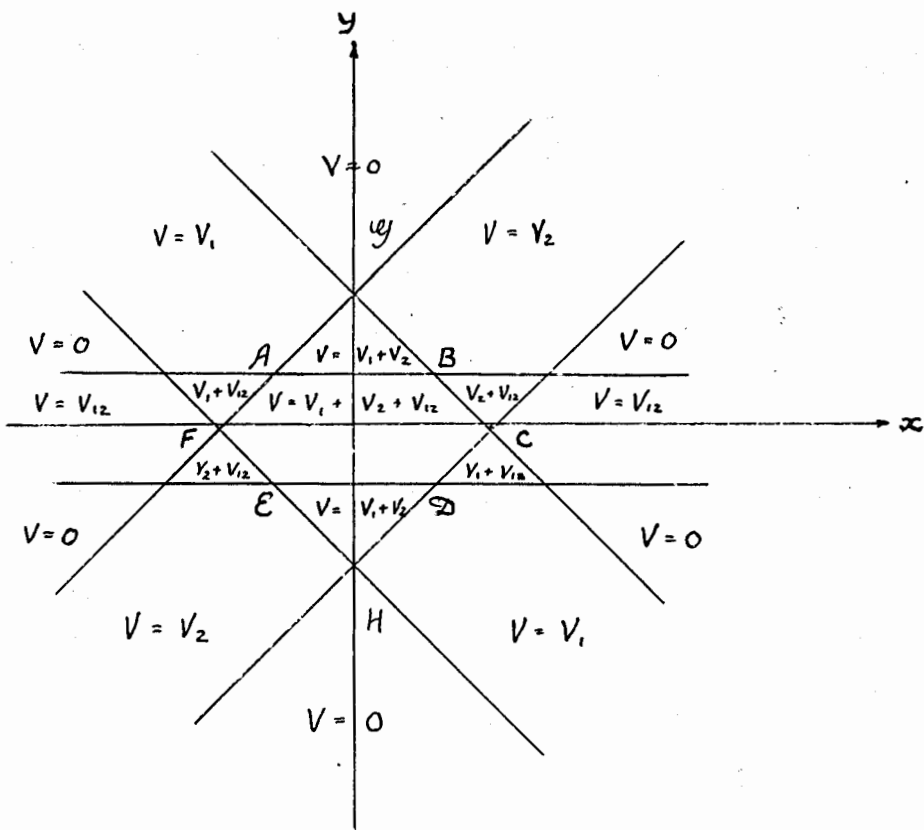


Рис. 2.

6. Заключение

Доказательство сходимости процедуры (7) представляет интерес не только в том, отношении, что мы получаем уверенность в корректности метода, которым мы пользуемся в конкретных расчетах, но и потому, что мы при этом лучше узнаем возможности метода, укрепляется наша интуиция в предсказании новых эффектов, связанных с поведением сложных частиц (даже в задачах с числом тел больше трех) во внешнем поле.

Из задач этого направления, которые нам представляется наиболее интересным выполнить, можно назвать:

а) доказательство корректности обрыва системы (19) интегро-дифференциальных уравнений для задачи рассеяния сложной частицы с конечной энергией связи. Для этого случая в данной работе получено лишь быстрое убывание населенности высших возбужденных состояний.

б) Распространение доказательства на трехмерный случай.

Авторы выражают благодарность С.Н.Соколову за полезные обсуждения вопросов, связанных с темой данной работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Запишем $(B^2)_{mn}$ ($m, n > s$), используя (20) в виде:

$$\begin{aligned}
 (B^2)_{mn} &= \frac{\omega_m}{\nu \eta_m^2} |W_{mn}| \left\{ \sum_{p>s} + \int dk_p \right\} \frac{\omega_p}{\eta_p^2} \frac{|W_{mp}| |W_{pn}|}{|W_{mn}|} = \\
 &= B_{mn} \frac{1}{|W_{mn}|} \left\{ \sum_{p>s} + \int dk_p \right\} \frac{\omega}{\eta^2} |W_{mp}| |W_{pn}| < \\
 &< B_{mn} \frac{1}{|W_{mn}|} \left\{ \sum_{p>s} + \int dk_p \right\} \frac{1}{\eta^2} |W_{mp}| |W_{pn}| = B_{mn} \cdot \mathcal{R}_s \dots
 \end{aligned} \tag{1.П.1}$$

При $a < \frac{\pi}{2}$ можно грубо оценить \mathcal{R}_s :

$$\mathcal{R}_s < \frac{4M_1^2}{a^2 |W_{mn}|} \left[\int (V_1 + V_2) dy \right] \left\{ \sum_{p>s} + \int dk_p \right\} \frac{1}{\frac{k_p^2}{2M_2} - E} \tag{1.П.2}$$

при $a > \frac{\pi}{2}$ нужно заменить в (1.П.2) a^2 на $\frac{\pi^2}{4}$.

Согласно (1.П.2) \mathcal{R}_s убывает с ростом s . В действительности \mathcal{R}_s убывает значительно быстрее, чем это следует из (1.П.2).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Для $f_m (m > s)$ при $E_s > V_0$ и $a > \frac{\pi}{2}$ получаем:

$$f_m = \frac{2 \mathfrak{L}_m M_1 V_{ar} (V_1 + V_2)}{a \eta_m^2} \sum_{n=1}^s \frac{\phi_n}{|k_n - k_m|} = \frac{2 \mathfrak{L}_m M_1 V_{ar} (V_1 + V_2)}{a \eta_m^2 k_m} \quad (2.П.1)$$

$$\sum_{n=1}^s \frac{k_m \phi_n}{|k_n - k_m|} < \frac{2 \mathfrak{L}_m M_1 V_{ar} (V_1 + V_2)}{a \eta_m^2 k_m} \sum_{n=1}^s \frac{k_s \phi_n}{|k_n - k_s|} = \frac{C_1}{\eta_m^2 k_m}$$

при $a < \frac{\pi}{2}$ (и m непрерывно, в формуле (2П1) следует лишь произвести замену: $a \rightarrow \sqrt{\frac{\pi a}{2}}$

При E_s из непрерывного спектра и достаточно больших $m > s$ таких, что

$$\frac{V_{ar} (V_1 + V_2)}{k_m - k_s} < f (V_1 + V_2) dy$$

$$f_m = \frac{2 \mathfrak{L}_m M_1 V_{ar} (V_1 + V_2)}{\eta_m^2 \sqrt{\pi} k_m} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \sum_{n=1}^N \frac{\phi_n k_m}{k_m - k_n} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{k_0}^{k_s} \frac{k_m \phi_k}{k_m - k} dk \right\} < \quad (2.П.2)$$

$$< \frac{2 \mathfrak{L}_m M_1 V_{ar} (V_1 + V_2)}{\eta_m^2 k_m} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \sum_{n=1}^N \frac{k_s \phi_n}{k_s - k_n} + \frac{2}{\pi} \int_{k_0}^{k_s} \frac{k_s \phi_k}{k_s - k} dk \right\} = \frac{C_2}{\eta_m^2 k_m}$$

при m таком, что $\frac{V_{ar} (V_1 + V_2)}{k_m - k_s} > f (V_1 + V_2) dy$

$$f_m < \frac{2 \mathfrak{L}_m V_{ar} (V_1 + V_2)}{\eta_m^2 k_m} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \sum_{n=1}^N \frac{k_s \phi_n}{k_s - k_n} + \frac{2}{\pi} \int_{k_0}^{k_s} \frac{k_s \phi_k}{k_s - k} dk \right\} +$$

$$+ \frac{4 \mathfrak{L}_m M_1 f (V_1 + V_2) dy}{\eta_m^2 \pi} \int_{k_a}^{k_s} \phi_k dk = \frac{1}{\eta_m^2} \left(\frac{C_3}{k_m} + C_4 \right) \quad (2.П.3)$$

здесь k_a определяется из соотношения $\frac{V_{ar} (V_1 + V_2)}{k_m - k_a} = f (V_1 + V_2) dy$.

Для Bf имеем при E_s дискретном

$$(Bf)_m = \sum_{n>s}^N B_{mn} f_n + \int_{k_0}^{\infty} B_{mn} f_n dn = \frac{\mathfrak{L}_m}{\eta_m^2} \left\{ \sum_{n>s}^N |W_{mn}| f_n + \int_{k_0}^{\infty} |W_{mn}| f_n dn \right\}, \quad (2.П.4)$$

а при E_s из непрерывного спектра

$$(Bf)_m = \frac{\mathfrak{L}_m}{\eta_m^2} \int_{k_s}^{\infty} |W_{mn}| f_n dn. \quad (2.П.5)$$

Величины, стоящие в фигурных скобках в (2.П.4), (2.П.5), убывают с ростом m , поэтому $(Bf)_m < \frac{C}{\eta_m^2}$, где константа C равна выражению в фигурных скобках (2.П.4) (2.П.5) при $m = s$ и E_s дискретном или E_s непрерывном соответственно.

Л и т е р а т у р а

1. Б.Н.Захарьев, С.Н.Соколов. Эффект усиленной проницаемости барьеров для сложных частиц. Препринт ОИЯИ Р-1473, 1963.
2. Б.Н.Захарьев, С.Н.Соколов. О плотностях резонансов при рассеянии на связанных частицах. Препринт ОИЯИ Р-1562, Дубна, 1964.
3. H.Feshbach, Unified Theory of Nuclear Reactions. Ann. of Phys., 5, 357 (1958), 19, 287 (1962).
4. Б.Н.Захарьев, С.Н.Соколов. О виртуальных возбуждениях сложной частицы. Препринт ОИЯИ Р-1593, Дубна, 1964.
5. С.Г.Михлин. Прямые методы в математической физике. А5, Гостехиздат, 1950.
6. А.С.Давыдов. Квантовая механика, § 116, Физматгиз, 1963.
7. В.Б.Беляев, С.С.Герштейн, Б.Н.Захарьев, С.П.Ломнев, μ^- -мезомолекулярные процессы в водороде, ЖЭТФ, 37, 6 (12) 1959.
8. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Квантовая механика, № 21, Физматгиз, 1963.
9. Э.Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Гл. 6, § 24, Физматгиз, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 ноября 1964 г.