ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 1872

А.А. Корнейчук

# ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ЖВМ и МФ, 1965, т 5, н 4,
стр. 768-773.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

1964

Р - 1872

2805/3 нр


А.А. Корнейчук


# ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ


Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики"

## ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается линейное однородное разностное уравнение с переменными коэффициентами

$$\sum_{j=0}^{k}(\mathcal{A}_j+\alpha_{j,n+j})y_{n+j}=0; \tag{0.I}$$

$n=0,1,\dots;$ $\alpha_{j,n+j}\to 0$ при $n\to\infty$ для $j=0,1,\dots,k-1;$ $\mathcal{A}_k=1;$ $\alpha_{k,n+k}=0$ для $n=0,1,\dots$ ; а также предельное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\sum_{j=0}^{k}\mathcal{A}_j u_{n+j}=0. \tag{0.2}$$

Если $\lambda=\lambda_i$ – корни характеристического уравнения

$$\sum_{j=0}^{k}\mathcal{A}_j\lambda^j=0, \tag{0.3}$$

то общее решение уравнения (0.2) может быть записано в виде:

$$u_M=\sum_{i=0}^{k-1}c_i(M+1)^{\nu_i}\lambda_i^M,\quad M=0,1,\dots, \tag{0.4}$$

где $c_i$ – произвольные постоянные; $\nu_i=0$ , если $\lambda_i$ – простой корень (0.3); для корня кратности $\ell$ $\nu_i$ принимает значения от $0$ до $\ell-1$ .

Пусть $\bar\lambda$ –тот из наибольших по модулю корней (0.3), который имеет еще и наибольшую кратность $\bar\nu$ . Тогда, как нетрудно проверить, отношение $|u_M|/(M+1)^{\bar\nu}|\bar\lambda|^M$ остается ограниченным при $M\to\infty$ для любого $u_M$ , являющегося решением предельного уравнения (0.2). И в то же время всегда есть решение (0.2), для которого это отношение не стремится к нулю, когда $M\to\infty$ .

Для решения уравнения (0.I) с переменными коэффициентами отношение $|y_M|/(M+1)^{\bar\nu}|\bar\lambda|^M$ не оценивается столь просто, т.к. нет аналогичного (0.4) выражения для общего решения. В § 2 настоящей работы такие оценки получены. Оказывается, $|y_M|/(M+1)^{\bar\nu}|\bar\lambda|^M$ остается ограниченным при $M\to\infty$ , если переменные коэффициенты уравнения (0.I) достаточно быстро стремятся к постоянным пределам.

Оценки для решения разностного уравнения (0.I) сравнительно легко были получены после того, как это уравнение подверглось некоторому преобразованию; такое преобразование в работе /I/ применялось к уравнению 2-го порядка при оценке погрешностей вычисления многочленов Якоби по известной рекуррентной формуле (см. /I/, формула (0.I). Это преобразование естественным образом обобщается для линейных дифференциальных уравнений $k$-го порядка с переменными коэффициентами, стремящимися к постоянным пределам. Этому посвящены §§ 3 и 4 настоящей работы. В § 5 проведено сравнение с некоторыми известными результатами.

## § I. Преобразование разностного уравнения

Пусть $\bar{u}_M$ - решение предельного уравнения (0.2), удовлетворяющее начальным условиям

$$\bar{u}_0 = \bar{u}_1 = \ldots = \bar{u}_{k-2} = 0; \quad \bar{u}_{k-1} = 1, \tag{I.I}$$

а $y_M$ - некоторое решение уравнения (0.I). Возьмем целые числа $n$, $N$ $(n \geqslant k, N \geqslant n)$ и составим следующую сумму:

$$\sum_{i=0}^{N-n+k} \sum_{j=0}^{k} \left(\mathcal{A}_j + a_{j,N+j-i}\right) y_{N+j-i}\, \bar{u}_i = 0. \tag{I.2}$$

Изменим в (I.2) порядок суммирования и запишем левую часть в виде двух отдельных сумм:

$$\sum_{i=0}^{N-n+k} \sum_{j=0}^{k} \left(\mathcal{A}_j + a_{j,N+j-i}\right) y_{N+j-i}\, \bar{u}_i = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=0}^{j-1} \left(\mathcal{A}_j + a_{j,N+j-i}\right) y_{N+j-i}\, \bar{u}_i + \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=j}^{N-n+k} \left(\mathcal{A}_j + a_{j,N+j-i}\right) y_{N+j-i}\, \bar{u}_i. \tag{I.3}$$

Рассмотрим первую из двух сумм в правой части (I.3):

$$\sum_{j=1}^{k} \left(\mathcal{A}_j + a_{j,N+j-i}\right) y_{N+j-i}\, \bar{u}_i = \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=0}^{j-1} \left(\mathcal{A}_j + a_{j,N+j-i}\right) y_{N+j-i}\, \bar{u}_i + \sum_{i=0}^{k-1} \left(\mathcal{A}_k + a_{k,N+k-i}\right) y_{N+k-i}\, \bar{u}_i. \tag{I.4}$$

Для первой суммы в правой части (I.4) область изменения индексов $\{1 \leqslant j \leqslant k-1,\ 0 \leqslant i \leqslant j-1\}$ записываем в другом виде: $\{0 \leqslant i \leqslant k-2,\ i+1 \leqslant j \leqslant k-1\}$ и убеждаемся, что вся эта сумма обращается в нуль, т.к. $\bar{u}_0 = \bar{u}_1 = \ldots \bar{u}_{k-2} = 0$. Что же касается второй суммы в правой части (I.4), то от нее остается единственное слагаемое, соответствующее $i = k-1$. Если, далее, учесть, что $\mathcal{A}_k = 1$, $a_{k,N+k-i} = 0$, $\bar{u}_{k-1} = 1$, то окажется, что это слагаемое есть $y_{N+1}$.

Переходим ко второй сумме правой части (I.3). Вместо индекса суммирования $i$ вводим $\ell = N+j-i$ $(i = N+j-\ell)$ и разбиваем сумму на две:

$$\sum_{j=0}^{k} \sum_{i=j}^{N-n+k} \left(\mathcal{A}_j + a_{j,N+j-i}\right) y_{N+j-i}\, \bar{u}_i = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\ell=n-k+j}^{n-1} \left(\mathcal{A}_j + a_{j,\ell}\right) y_\ell\, \bar{u}_{N+j-\ell} + \sum_{j=0}^{k} \sum_{\ell=n}^{N} \left(\mathcal{A}_j + a_{j,\ell}\right) y_\ell\, \bar{u}_{N+j-\ell}. \tag{I.5}$$

В первой сумме правой части (I.5) изменим порядок суммирования, вторую сумму разобьем на две:

$$\sum_{j=0}^{k} \sum_{i=j}^{N-n+k} \left(\mathcal{A}_j + a_{j,N+j-i}\right) y_{N+j-i}\, \bar{u}_i = \sum_{\ell=n-k}^{n-1} y_\ell \sum_{j=0}^{\ell-n+k} \left(\mathcal{A}_j + a_{j,\ell}\right) \bar{u}_{N+j-\ell} + \sum_{\ell=n}^{N} y_\ell \sum_{j=0}^{k} a_{j,\ell}\, \bar{u}_{N+j-\ell} + \sum_{\ell=n}^{N} y_\ell \sum_{j=0}^{k} \mathcal{A}_j\, \bar{u}_{N+j-\ell}. \tag{I.6}$$



Так как $\bar{u}_M$ - решение уравнения (0.2), то последняя сумма в правой части (I.6) обращается в нуль. Далее, $a_{k,\ell} = 0$ для всех $\ell$, и во второй сумме правой части (I.6) суммирование по $j$ происходит от $0$ до $k-1$. Подставляя в (I.3) значения сумм из (I.4) и (I.6), получим

$$y_{N+1} + \sum_{\ell=n}^{N} y_\ell \sum_{j=0}^{k-1} a_{j,\ell}\, \bar{u}_{N+j-\ell} + \sum_{\ell=n-k}^{n-1} y_\ell \sum_{j=0}^{\ell-n+k} \left(\mathcal{A}_j + a_{j,\ell}\right) \bar{u}_{N+j-\ell} = 0. \tag{I.7}$$

В отличие от исходного уравнения (0.I), связывающего $k+1$ значение $y$ с последовательными номерами, в (I.7) значение $y_{N+1}$ связано со всеми предыдущими, до $n-k$ -го включительно. Как будет видно в дальнейшем, разностное уравнение в виде (I.7) весьма удобно для получения оценок его решения.

## § 2. Оценка решения разностного уравнения

Предположим, что коэффициенты разностного уравнения (0.I) при $\ell \to \infty$ стремятся к постоянным пределам столь быстро, что ряды $\sum\limits_{\ell=j}^{\infty} |a_{j,\ell+j}|(\ell+1)^{\bar{\nu}}$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$ сходятся. Обозначим

$$C_1 = \max_{M \geqslant 0} |\bar{u}_M| / (M+1)^{\bar{\nu}} |\bar{\lambda}|^M. \tag{2.I}$$

Тогда найдется $n$, такое, что

$$C_1 \sum_{\ell=n}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} |\bar{\lambda}|^{j-1} |a_{j,\ell}| (\ell+1)^{\bar{\nu}} \leqslant \sigma < 1. \tag{2.2}$$

По выбранному $n$ определим

$$C_2 = \max_{0 \leqslant M \leqslant n} |y_M| / (M+1)^{\bar{\nu}} |\bar{\lambda}|^M, \tag{2.3}$$

$$C_3 = C_1 C_2 \sum_{\ell=n-k}^{n-1} \sum_{j=0}^{\ell-n+k} |\mathcal{A}_j + a_{j,\ell}| (\ell+1)^{\bar{\nu}} |\bar{\lambda}|^{j-1}, \tag{2.4}$$

$$C_4 = C_2 + C_3 / (1 - \sigma) \tag{2.5}$$

и докажем справедливость оценки

$$|y_M| \leqslant C_4 (M+1)^{\bar{\nu}} |\bar{\lambda}|^M. \tag{2.6}$$

Для $M = 0, 1, \ldots, n$ оценка (2.6) следует из (2.3) и (2.5). Пусть она проверена для $M = 0, 1, \ldots, N$; докажем тогда ее справедливость для $M = N+1$. Из (I.7), (2.2), (2.6) имеем:

$$|y_{N+1}| \leqslant \sum_{\ell=n}^{N} C_4 (\ell+1)^{\bar{\nu}} |\bar{\lambda}|^{\ell} \sum_{j=0}^{k-1} |a_{j,\ell}|\, C_1 (N+j-\ell+1)^{\bar{\nu}} |\bar{\lambda}|^{N+j-\ell} + \sum_{\ell=n-k}^{n-1} C_2 (\ell+1)^{\bar{\nu}} |\bar{\lambda}|^{\ell} \sum_{j=0}^{\ell-n+k} |\mathcal{A}_j + a_{j,\ell}|\, C_1 (N+j-\ell+1)^{\bar{\nu}} |\bar{\lambda}|^{N+j-\ell}. \tag{2.7}$$

В первой сумме правой части (2.7) $N+j-\ell+1 \le N+k-n$ так как $k \le n$ ; по той же причине во второй сумме правой части (2.7) $N+j-\ell+1 \le N+k-n+1 < N+2$ . Из (2.7), (2.4) и (2.5) далее получаем:

$$|y_{N+1}| \le (N+2)^{\bar\nu} |\bar\lambda|^{N+1} (C_4 \sigma + C_3) \le (N+2)^{\bar\nu} |\bar\lambda|^{N+1} C_4 . \tag{2.8}$$

Тем самым доказана следующая

Теорема I. Пусть $\bar\lambda$ – тот из наибольших по модулю корней характеристического уравнения (0.3), который имеет еще и наибольшую кратность $\bar\nu+1$ . Если ряды $\sum\limits_{\ell=j}^{\infty} |a_{j,\ell}|(\ell+1)^{\bar\nu}$, $j=0,1,\dots,k-1$ сходятся, то для любого решения $y_\ell$ уравнения с переменными коэффициентами (0.I) отношение $|y_\ell|/(\ell+1)^{\bar\nu}|\bar\lambda|^\ell$ остается ограниченным при $\ell\to\infty$ .

## § 3. Преобразование дифференциального уравнения

Рассматривается линейное однородное дифференциальное уравнение $k$ -го порядка с переменными коэффициентами

$$\sum_{j=0}^{k} \left[ (\mathcal{A}_j + a_j(x))\, y(x) \right]^{(j)} = 0 ; \quad 0 \le x < \infty ;$$
$$\mathcal{A}_k = 1 ; \quad a_k(x) \equiv 0 ; \quad a_j(x) \to 0 \quad при \quad x\to\infty, \ j=0,1,\dots,k-1 ; \tag{3.I}$$

$a_j(x)$ имеют конечные производные по $x$ до $j$ -го порядка включительно. Наряду с уравнением (3.I) будет рассматриваться также предельное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\sum_{j=0}^{k} \mathcal{A}_j\, u^{(j)}(x) = 0 ; \quad 0 \le x < \infty . \tag{3.2}$$

Если $\mu=\mu_j$ – корни характеристического уравнения

$$\sum_{\ell=0}^{k} \mathcal{A}_\ell\, \mu^\ell = 0, \tag{3.3}$$

то общее решение уравнения (3.2) может быть записано в виде

$$u(x) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j (x+1)^{\tau_j} \exp \mu_j x , \tag{3.4}$$

где $c_j$ – произвольные постоянные; $\tau_j = 0$ , если $\mu_j$ – простой корень (3.3); для корня кратности $\ell$ $\tau_j$ принимает значения от $0$ до $\ell-1$ .

Пусть $\mu=\bar\alpha+i\bar\beta$ – тот из корней (3.3), который, имея наибольшую действительную часть $\bar\alpha$ , имеет еще и наибольшую кратность $\bar\tau$ . Тогда отношение $|u(x)|/(x+1)^{\bar\tau}\exp\bar\alpha x$ будет оставаться ограниченным при $x\to\infty$ для любого решения $u(x)$ предельного уравнения (3.2).



Пусть $\bar u(x)$ – решение предельного уравнения (3.2), удовлетворяющее начальным условиям

$$\bar u(0) = \bar u'(0) = \dots = \bar u^{(k-2)}(0) = 0 ; \quad \bar u^{(k-1)} = 1 , \tag{3.5}$$

а $y(x)$ – решение уравнения (3.I). Возьмем некоторые $x_0 \ge 0$ , $x \ge x_0$ и составим интеграл

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{j=0}^{k} \left[ (\mathcal{A}_j + a_j(\xi))\, y(\xi) \right]^{(j)} \bar u(x-\xi)\, d\xi = 0 . \tag{3.6}$$

Выделим из левой части (3.6) слагаемое с $j=0$ , а к оставшейся сумме применим интегрирование по частям, учитывая при этом (3.5). Тогда получим:

$$\int_{x_0}^{x} (\mathcal{A}_0 + a(\xi))\, y(\xi)\, \bar u(x-\xi)\, d\xi - \sum_{j=0}^{k-1} \left( (\mathcal{A}_{j+1} + a_{j+1}(\xi))\, y(\xi) \right)^{(j)}_{\xi=x_0} \bar u(x-x_0) +$$
$$+ \sum_{j=0}^{k-1} \int_{x_0}^{x} \left( (\mathcal{A}_{j+1} + a_{j+1}(\xi))\, y(\xi) \right)^{(j)} \bar u'(x-\xi)\, d\xi = 0. \tag{3.7}$$

Аналогичное преобразование – отделение слагаемого с $j=0$ и интегрирование по частям оставшейся суммы – применяется к последней сумме в левой части (3.7) и т.д. Выполнив такое преобразование $k-1$ раз, получим:

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{j=0}^{k-2} (\mathcal{A}_j + a_j(\xi))\, y(\xi)\, \bar u^{(j)}(x-\xi)\, d\xi - \sum_{\ell=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-\ell} \left( (\mathcal{A}_{j+\ell} + a_{j+\ell}(\xi))\, y(\xi) \right)^{(j)}_{\xi=x_0} \bar u^{(\ell-1)}(x-x_0) +$$
$$+ \int_{x_0}^{x} \sum_{j=0}^{1} \left( (\mathcal{A}_{j+k-1} + a_{j+k-1}(\xi))\, y(\xi) \right)^{(j)} \bar u^{(k-1)}(x-\xi)\, d\xi = 0. \tag{3.8}$$

Отделив в последней сумме левой части (3.8) слагаемое с $j=0$ , присоединим его к первой сумме левой части (3.8); после этого оставшееся слагаемое последней суммы левой части (3.8) (с $j=1$ ) интегрируем по частям:

$$\int_{x_0}^{x} ((\mathcal{A}_k + a_k(\xi))\, y(\xi))'\, \bar u^{(k-1)}(x-\xi)\, d\xi = \left[ (\mathcal{A}_k + a_k(\xi))\, y(\xi)\, \bar u^{(k-1)}(x-\xi) \right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} (\mathcal{A}_k + a_k(\xi))\, y(\xi)\, \bar u^{(k)}(x-\xi)\, d\xi . \tag{3.9}$$

Последнее слагаемое правой части (3.9) присоединяем к первой сумме левой части (3.8); первое слагаемое будет:

$$\left[ (\mathcal{A}_k + a_k(\xi))\, y(\xi)\, \bar u^{(k-1)}(x-\xi) \right]_{x_0}^{x} = y(x) - \left[ (\mathcal{A}_k + a_k(\xi))\, y(\xi)\, \bar u^{(k-1)}(x-\xi) \right]_{\xi=x_0} \tag{3.10}$$

Последнее слагаемое правой части (3.10) присоединяем ко второй сумме левой части (3.8); после этого получаем:

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{j=0}^{k} (\mathcal{A}_j + a_j(\xi))\, y(\xi)\, \bar u^{(j)}(x-\xi)\, d\xi - \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{j=0}^{k-\ell} \left( (\mathcal{A}_{j+\ell} + a_{j+\ell}(\xi))\, y(\xi) \right)^{(j)}_{\xi=x_0} \bar u^{(\ell-1)}(x-x_0) + y(x) = 0 . \tag{3.II}$$

Меняя во второй сумме левой части (3.II) порядок суммирования и учитывая в первой сумме левой части (3.II) равенство (3.2), получим следующее уравнение для $y=y(x)$ :

$$y = \mathcal{B} y + f , \tag{3.I2}$$

где

$$\mathcal{B} y = \int_{x_0}^{x} \sum_{j=0}^{k-1} a_j(\xi)\, \bar u^{(j)}(x-\xi)\, y(\xi)\, d\xi , \tag{3.I3}$$

$$f = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\ell=1}^{k-j} \left( (\mathcal{A}_{j+\ell} + a_{j+\ell}(\xi))\, y(\xi) \right)^{(j)}_{\xi=x_0} \bar u^{(\ell-1)}(x-x_0) . \tag{3.I4}$$

## § 4. Оценка решения дифференциального уравнения

Определим пространство $\mathcal{R}_{x_0}$ непрерывных на $[x_0,\infty]$ функций с нормой

$$\|y\|_{\mathcal{R}_{x_0}} = \max_{x \geq x_0} |y(x)| / (x+1)^{\bar{\tau}} \exp \bar{\alpha} x. \qquad (4.1)$$

Если $u(x)$ – решение уравнения (3.2), то, как видно из (3.4), оно принадлежит со всеми своими производными $\mathcal{R}_0$ . Далее, из (3.14) следует, что $f$ как функция $x$ принадлежит $\mathcal{R}_{x_0}$. Предположим, что коэффициенты дифференциального уравнения (3.1) при $x \to \infty$ стремятся к постоянным пределам столь быстро, что интегралы $\int_0^\infty |a_j(\xi)|(\xi+1)^{\bar{\tau}} d\xi$, $j=0,1,\dots,k-1$ сходятся. Покажем, что в этом случае $\mathcal{B}y \in \mathcal{R}_{x_0}$ , если $y \in \mathcal{R}_{x_0}$ . Из (3.13) имеем

$$|\mathcal{B}y|_{x \geq x_0} \leq \int_{x_0}^{x} \sum_{j=0}^{k-1} |a_j(\xi)| \, \|\bar{u}^{(j)}\|_{\mathcal{R}_0} (x-\xi+1)^{\bar{\tau}} (\exp \bar{\alpha}(x-\xi)) \, \|y\|_{\mathcal{R}_{x_0}} (\xi+1)^{\bar{\tau}} (\exp \bar{\alpha}\xi) \, d\xi \leq$$
$$\leq \left[ ((x+1)^{\bar{\tau}} \exp \bar{\alpha} x) \int_{x_0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} |a_j(\xi)| \, \|\bar{u}^{(j)}\|_{\mathcal{R}_0} (\xi+1)^{\bar{\tau}} d\xi \right] \|y\|_{\mathcal{R}_{x_0}}. \qquad (4.2)$$

Из того, что $a_j(x)$ конечны, следует конечность подинтегральной функции в правой части (3.13). и, следовательно, непрерывность $\mathcal{B}y$ как функции $x$ . Из (4.2) следует ограниченность отношения $|\mathcal{B}y|/(x+1)^{\bar{\tau}} \exp \bar{\alpha} x$ для $x \geq x_0$ . Итак, $\mathcal{B}y \in \mathcal{R}_{x_0}$ .

На основе известной теоремы о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций легко доказывается полнота $\mathcal{R}_{x_0}$. Итак, $\mathcal{R}_{x_0}$ – банахово пространство при любом $x_0 \geq 0$ . Выберем теперь $x_0$ так, что

$$\int_{x_0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} |a_j(\xi)| \, \|u^{(j)}\|_{\mathcal{R}_0} (\xi+1)^{\bar{\tau}} d\xi \leq \sigma < 1 \qquad (4.3)$$

Тогда из (4.2) получим, что

$$\|\mathcal{B}\|_{\mathcal{R}_{x_0}} \leq \sigma < 1. \qquad (4.4)$$

В этом случае (см.[2], теоремы: 3(2.V) и I(3.V) уравнение (3.12) имеет в $\mathcal{R}_{x_0}$ единственное решение, и это решение удовлетворяет условию:

$$\|y\|_{\mathcal{R}_{x_0}} \leq \frac{\|f\|_{\mathcal{R}_{x_0}}}{1-\sigma}. \qquad (4.5)$$

Таким образом, доказана следующая

<u>Теорема 2.</u> Пусть $\bar{\mu} = \bar{\alpha} + i\bar{\beta}$ – тот из имеющих наибольшую действительную часть $\bar{\alpha}$ корней характеристического уравнения (3.3), который имеет еще и наибольшую кратность $\bar{\tau}+1$ . Если интегралы $\int_0^\infty |a_j(\xi)|(\xi+1)^{\bar{\tau}} d\xi$, $j=0,1,\dots,k-1$ сходятся, то для любого решения $y(x)$ уравнения с переменными коэффициентами (3.1) отношение $|y(x)|/(x+1)^{\bar{\tau}} \exp \bar{\alpha} x$ остается ограниченным при $x \to \infty$ .

Для иллюстрации того, что требования сходимости соответствующих интегралов существенны, рассмотрим пример, где они не выполняются. Возьмем уравнение

$$y^{(k)}(x) - \frac{k!}{(x+1)^k} y(x) = 0. \qquad (4.6)$$

Предельное характеристическое уравнение $\mu^k = 0$ имеет корень $\mu = 0$ кратности $k$ . В данном примере

$$\int_0^\infty |a_0(\xi)|(\xi+1)^{k-1} d\xi = k! \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi+1} = \infty. \qquad (4.7)$$

Нетрудно проверить, что уравнение (4.6) имеет решение $y(x) = (x+1)^k$ , для которого отношение $|y(x)|/(x+1)^{k-1} = x+1$ не ограничено при $x \to \infty$ .

## § 5. Сравнение с известными результатами

Теорема Пуанкаре (см.[3], гл. V, §5) утверждает, что для любого решения разностного уравнения (0.1) отношение $y_{n+k+1}/y_{n+k}$ при $n \to \infty$ стремится к одному из корней характеристического уравнения (0.3) (если все его корни различны по модулю). Из этой теоремы не следуют, однако, оценки для $y_{n+k}$ .

Уравнение

$$\sum_{j=0}^{k} (A_j + a_j(x)) \, y^{(j)}(x) = 0, \qquad (5.1)$$

которое, с точностью до множителя $(-1)^j$ , является сопряженным к (3.1), рассматривалось в[4] (гл. III, задачи 35,36) в предположении, что сходятся интегралы $\int_0^\infty |a_j(\xi)|(\xi+1)^{\tau} d\xi$, $j=0,1,\dots,k-1$, $\tau$ – максимальная кратность всех корней предельного характеристического уравнения (3.3); $\tau \geq \bar{\tau}$ . Намечен путь доказательства, в частности, того, что уравнение (5.1) имеет решение $y(x)$ , для которого

$$\lim_{x \to \infty} \left( y(x)/(x+1)^{\bar{\tau}} (\exp \bar{\lambda} x) - c \right) = 0. \qquad (5.2)$$

Вопрос об ограниченности отношения $|y(x)|/(x+1)^{\bar{\tau}} \exp \bar{\alpha} x$ для произвольного решения уравнения (5.1) не ставится.

В заключение автор благодарит Е.П.Жидкова, Н.П.Жидкова и В.П.Ширикова за ряд полезных замечаний, высказанных ими при обсуждении данной работы.

## ЛИТЕРАТУРА


1. А.А.Корнейчук, А.С.Марков, Ом Сан Ха. Вычисление многочленов Якоби. Препринт ОИЯИ, 1733, Дубна, 1964.
2. Л.В.Канторович и Г.П.Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, М., 1959.
3. А.О.Гельфонд. Исчисление конечных разностей. Физматгиз, М., 1959.
4. Э.А.Коддингтон и Н.Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. ИЛ., М., 1958.



Рукопись поступила в издательский отдел
2 ноября 1964 г.