ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

М.Е.Майер[x)] и Д.В.Ширков[xx)]

Р-187

ОТНОСИТЕЛЬНО ДВУХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ТИРРИНГА

ДАН СССР, 1958, т122, №1, с 45-47.

1958 год

x) Постоянный адрес: Физико-математический факультет Университета им. К.И.Пархона, Бухарест, и Институт атомной физики Академии Румынской НР.

xx) Математический институт им. В.А.Стеклова АН СССР, Москва.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

М.Е.Майер[x)] и Д.В.Ширков[xx)]

Р-187

ОТНОСИТЕЛЬНО ДВУХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ТИРРИНГА

1958 год

x) Постоянный адрес: Физико-математический факультет Университета им. К.И.Пархона, Бухарест, и Институт атомной физики Академии Румынской НР.

xx) Математический институт им. В.А.Стеклова АН СССР, Москва.

Р е з ю м е

Рассматривается двухмерная нелинейная фермионная теория, аналогичная модели Тирринга. Во втором порядке теории возмущений вычислена 4-вершинная диаграмма. Показано, что она не содержит ультрафиолетовых расходимостей, вследствие чего заряд не перенормируется. Улучшенное выражение для матричного элемента рассеяния, полученное методом ренормализационной группы, весьма близко соответствующему точному результату Тирринга.

I. Постановка задачи

Рассмотрим, следуя Тиррингу /I/ двухмерную нелинейную фермионную теория с лагранжианом взаимодействия

$$L(x) = g : \bar{\psi}(x)\sigma^n \psi(x) \bar{\psi}(x) \sigma^n \psi(x) : . \qquad (I)$$

Здесь $\sigma^0 = I$, σ^1, σ^2, σ^3 – обычные двухрядные матрицы Паули. При этом

$$\sigma^n \times \sigma^n = I \times I - \sigma^1 \times \sigma^1 - \sigma^2 \times \sigma^2 - \sigma^3 \times \sigma^3 , \qquad (2)$$

x обозначает точку двухмерного пространства-времени с компонентами $x_0 = t, x_1 = z$, $\psi, \bar{\psi}$ двухкомпонентные спиноры, удовлетворяющие двухмерному уравнению Дирака,

$$(\hat{p} - m)\psi(p) = \bar{\psi}(p)(\hat{p} - m) = 0 \quad ; \quad \bar{\psi} = -\psi^{*}\sigma^2 ,$$

а[x])

$$\hat{p} = -\sigma^2 p_0 - i\sigma^1 p_1 . \qquad (3)$$

Лагранжиан (I) представляет собой единственное возможное в этой теории выражение; симметричное по отношению к перестановке двух ψ или двух $\bar{\psi}$ (см. Приложение).

Как показано в Приложении, (I) может быть также записано в виде

$$L(x) = 4g : \bar{\psi}(x)\psi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x) : , \qquad (1')$$

что с точностью до численного множителя совпадает с предельным

---

x) Эти обозначения соответствуют обозначениям в /I/.

видом лагранжиана Тирринга /I/ при совпадении его полей ψ_1 и ψ_2.

Мы займемся ниже рассмотрением элемента S - матрицы, соответствующего рассеянию двух частиц в случае $m = 0$. В соответствии с (I) матрицу рассеяния для такого процесса запишем в виде:

$$S_{\Gamma} = \frac{ig}{4\pi^2}\int \bar{\psi}_\alpha(p')\psi_\beta(q)\bar{\psi}_\gamma(q')\psi_\delta(p)\delta(p'+q'-p-q)\times$$
$$\times\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p',q',p,q)\,dp'dp\,dq'dq \tag{4}$$

где

$$dp = dp_0\,dp_1$$

а функция Γ обладает свойствами антисимметрии

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p',q',p,q) = -\Gamma_{\gamma\beta,\alpha\delta}(q',p',p,q) = -\Gamma_{\alpha\delta,\gamma\beta}(p',q',q,p) \tag{5}$$

и в низшем приближении имеет вид (ср. А.4)

$$\Gamma^{(1)}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p',q',p,q) = \sigma^n_{\alpha\beta}\times\sigma^n_{\gamma\delta} = -\sigma^n_{\alpha\delta}\times\sigma^n_{\gamma\beta} \tag{6}$$

Улучшенная формула для функции Γ в низшем порядке по g может быть получена без проведения анализа свойств одночастичной функции Грина. Поэтому ниже мы вычислим функцию Γ во втором порядке теории возмущений и затем получим улучшенную формулу с помощью метода ренормализационной группы.

2. Вычисления по теории возмущений

Член 2-го порядка в S - матрице

$$S_2 = \frac{i^2}{2}\int T(L(x)L(y))\,dxdy = \tag{7}$$

$$= -\frac{g^2}{2}\int T\{:\bar\psi(x)\sigma^n\psi(x)\bar\psi(x)\sigma^n\psi(x)::\bar\psi(y)\sigma^m\psi(y)\bar\psi(y)\sigma^m\psi(y):\}dxdy$$

содержит два слагаемых типа (4), содержащих комбинации спариваний

$$\overline{\psi(x)\bar\psi(y)}\,,\quad \overline{\psi(y)\bar\psi(x)}$$

и

$$\overline{\psi(x)\bar\psi(y)}\,,\quad \overline{\psi(x)\bar\psi(y)}$$

Соответствующие Γ имеют вид:

$$\Gamma^a_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p',q',p,q) = \frac{2ig}{\pi^2}\int dk\,\frac{Sp[\sigma^n(\hat k+\hat P)\sigma^m(\hat k-\hat P)]}{(k+P)^2(k-P)^2}\,\sigma^n_{\alpha\beta}\sigma^m_{\gamma\delta} = \tag{8}$$

$$= \frac{2ig}{\pi^2}\int dk\,\frac{2(k^2-P^2)\sigma^n\times\sigma^n + 4(\hat k\times\hat k-\hat P\times\hat P)}{(k+P)^2(k-P)^2}\Big|_{\alpha\beta,\gamma\delta}$$

и

$$\Gamma^b_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p',q',p,q) = \frac{ig}{2\pi^2}\int dk\,\frac{[\sigma^n(\hat k+\hat Q)\sigma^m]_{\alpha\delta}[\sigma^n(\hat k-\hat Q)\sigma^m]_{\gamma\beta}}{(k+Q)^2(k-Q)^2} =$$

$$= \frac{2ig}{\pi^2}(\sigma^n_{\alpha\beta}\times\sigma^n_{\gamma\delta})\int dk\,\frac{Q^2-k^2}{(Q+k)^2(Q-k)^2} \tag{9}$$

где $\quad P = \frac{p'-p}{2}\,,\quad Q = \frac{p+q}{2}\,,\quad \Gamma^{(2)} = \Gamma^a + \Gamma^b$

и где при перестройке Γ^b была использована формула (A.6).

из Приложения.

Сумма выражений (8) и (9) с помощью формул (A.5) и (A.8) может быть приведена к виду

$$\Gamma^{(2)}_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \frac{2ig}{\pi^2}\sigma^n_{\alpha\beta}\times\sigma^n_{\gamma\delta}\int dk\left\{\frac{k^2-P^2}{(k+P)^2(k-P)^2} - \frac{k^2-Q^2}{(k+Q)^2(k-Q)^2}\right\} -$$

$$- \frac{4ig}{\pi^2}\left(\hat{P}_{\alpha\beta}\times\hat{P}_{\gamma\delta} + \hat{P}_{\alpha\delta}\times\hat{P}_{\gamma\beta}\right)\int\frac{dk}{(k+P)^2(k-P)^2}$$

в котором явным образом сокращаются ультрафиолетовые расходимости.

Вычисление интегралов дает

$$\Gamma^{(2)}_{\alpha\beta,\gamma\delta} = -\frac{2g}{\pi}(\sigma^n_{\alpha\beta}\times\sigma^n_{\gamma\delta})\ln\frac{P^2}{Q^2} - \frac{g}{\pi}\frac{(\hat{P}_{\alpha\beta}\times\hat{P}_{\gamma\delta}+\hat{P}_{\alpha\delta}\times\hat{P}_{\gamma\beta})}{P^2}C \tag{I0}$$

где $C=\int_0^1\frac{dx}{x(1-x)}$ – постоянная, содержащая инфракрасную расходимость. В случае, когда частицы с импульсами p и p' реальные, т.е.

$$\bar{\psi}(p')\hat{p}' = \hat{p}\psi(p) = 0$$

второй член в правой части (I0) с помощью формулы (A.5) может быть представлен в виде

$$\frac{g}{2\pi}(\sigma^n_{\alpha\beta}\times\sigma^n_{\gamma\delta})C$$

и при надлежащей нормировке функции Γ отброшен. Как и обычно в электродинамике появления инфракрасной расходимости можно избежать формальным введением малой массы. Это не может повлиять на дальнейшие рассуждения.

Принимая еще во внимание свойство антисимметрии (5) с учетом (6), получаем

$$\Gamma^{(2)}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p',q';p,q) = -\frac{g}{\pi}\left(\sigma^{n}_{\alpha\beta}\times\sigma^{n}_{\gamma\delta}\right)\ln\frac{(p'-p)^2(p'-q)^2}{(p+q)^4} \tag{II}$$

3. Улучшенное выражение для функции Γ

Сравнивая между собой формулы (6) и (II) с учетом сделанного замечания о члене, содержащем инфракрасную расходимость, можем записать

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p',q';p,q) = \left(\sigma^{n}_{\alpha\beta}\times\sigma^{n}_{\gamma\delta}\right)\Gamma(p',q';p,q)$$

$$\Gamma(p',q';p,q) = 1 - \frac{g}{\pi}\ln\frac{(p'-p)^2(p'-q)^2}{(p+q)^4} + gc + \ldots \tag{12}$$

где c – произвольная конечная постоянная, связанная с наличием произвола в определении входящего в (7) T – произведения.

Займемся теперь улучшением аппроксимационных свойств выражения (I2) с помощью метода ренормализационной группы /2/. В рассматриваемой теории конечные допустимые мультипликативные контрчлены к лагранжиану имеют вид:

$$\delta\mathcal{L} = (z_1-1)\bar{\psi}\hat{p}\psi + (z_2-1)g\bar{\psi}\sigma^n\psi\bar{\psi}\sigma^n\psi$$

Введение этих контрчленов эквивалентно конечной мультипликативной перенормировке одночастичной функции Грина d и 4-вершинной функции Γ

$$d_1 \to d_2 = z_1 d_1 \;, \quad \Gamma_1 \to \Gamma_2 = z_2^{-1}\Gamma_1 \tag{I3}$$

Здесь d – скалярная часть функции Грина:

$$G(p) = \frac{d(p^2)}{\hat{p}}$$

Преобразование (I3) имеет такую же структуру, как и преобразования в четырехмерной нелинейной мезонной теории, которая получается из двухзарядной мезонной теории [2] при выключении мезон-нуклонного взаимодействия.

Функциональные уравнения имеют вид [3]

$$d(x,g) = d(t,g)\,d\!\left(\frac{x}{t}, g\varphi(t,g)\right), \tag{I4}$$

$$\Gamma(x_1,\dots x_6,g) = \Gamma(t,\dots t,g)\,\Gamma\!\left(\frac{x_1}{t},\dots\frac{x_6}{t}, g\varphi(t,g)\right), \tag{I5}$$

$$\varphi(t,g) = d^2(t,g)\,\Gamma(t,\dots t,g). \tag{I6}$$

Здесь $x_1,\dots x_6$ – безразмерные скалярные независимые импульсные аргументы 4-вершинной функции Γ, которые могут быть, например, выбраны следующим образом:

$$x_1 = \frac{p^2}{\lambda^2}, \quad x_2 = \frac{p'^2}{\lambda^2}, \quad x_3 = \frac{q^2}{\lambda^2}, \quad x_4 = \frac{q'^2}{\lambda^2},$$
$$x_5 = \frac{(p'-p)^2}{\lambda^2}, \quad x_6 = \frac{(p'-q)^2}{\lambda^2}, \tag{I7}$$

а импульс нормировки λ введен так, что

$$d(1,g) = 1\,,\quad \Gamma(1,\dots 1,g) = 1 \tag{I8}$$

Введенная в (I6) функция φ играет роль инвариантного заряда. Из (I4), (I5), (I6) следует функциональное и дифференциальное уравнение для φ

$$\varphi(x,g) = \varphi(t,g)\,\varphi\left(\frac{x}{t}, g\varphi(t,g)\right) \tag{I9}$$

$$\frac{\partial\varphi(x,g)}{\partial x} = \frac{\varphi(x,g)}{x}\,\Phi(g\varphi(x,g)) \tag{20}$$

где

$$\Phi(g) = \frac{\partial}{\partial\xi}\varphi(\xi,g)\Big|_{\xi=1} \tag{2I}$$

Как обычно, функцию Φ в (20) следует заменить на ее приближение из теории возмущений. Ограничимся здесь линейным приближением по g. Ввиду того, что разложение функции d начинается с члена порядка g^2, мы можем в (2I) заменить φ на полученное нами выше выражение для Γ (I2), которое с учетом (I7) и (I8) имеет вид:

$$\Gamma^{(2)}(x_1,\dots x_6,g) = 1 - \frac{g}{\pi}\ln\frac{4x_5x_6}{(x_1+x_2+x_3+x_4-x_5-x_6)^2} \tag{22}$$

так что $\Phi^{(2)}(g) = 0$.

Уравнение (20) дает

$$\varphi(x,g) = 1\,. \tag{23}$$

Результат (23) является любопытным. Он означает, что в рассматриваемом приближении (линейном по g) постоянная связи не перенормируется. Это соответствует отсутствию расходимости в $\Gamma^{(2)}$.

Приступим теперь к получению улучшенной формулы для функции Γ, соответствующей рассеянию реальных частиц. В этом случае $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Обозначая

$$\Gamma(0,0,0,0,x,y,g) = \Gamma(x,y,g)$$

получаем из (22):

$$\Gamma^{(2)}(x,y,g) = 1 - \frac{g}{\pi} f\left(\frac{x}{y}\right) \quad , \quad f(z) = \ln \frac{4z}{(1+z)^2}$$

С учетом (23) получаем из (I5) дифференциальное уравнение Ли для $\Gamma(x,y,g)$

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln \Gamma(x,y,g) = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \xi} \Gamma^{(2)}\left(\xi, \frac{y}{x}, g\right)\Big|_{\xi=1} =$$

$$= -\frac{g}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} f\left(\frac{x}{y}\right)$$

Здесь вычисление в правой части проведено с точностью до членов, пропорциональных g. Элементарная квадратура (с учетом $f(1) = 0$) дает

$$\Gamma(x,y,g) = \left[\frac{4xy}{(x+y)^2}\right]^{-g/\pi}$$

или

$$\Gamma(p',q',p,q) = \left[\frac{(p'-p)^2(p'-q)^2}{(p+q)^4}\right]^{-g/\pi} \qquad (24)$$

Заметим, что при выводе этой формулы единственное приближение состояло лишь в приближении высшими степенями g. Таким образом, результат (24) является в некотором смысле точным в пределе малых g, в противоположность обычным результатам метода ренормализационной группы, которые относятся лишь к асимптотическим областям импульсных переменных. Это свойство результата обусловлено равенством нулю массы частицы поля ψ. Заметим еще, что формула (24) является также контрпримером к рецепту получения импульсных асимптотик, данному в /6/ (см. подробную дискуссию этого вопроса в /3/).

Формула (24) весьма напоминает результат Тирринга (формула (4.II) из /I/) в пределе малых $\lambda = g$. Если считать, что соответствие наших результатов с формулами Тирринга сохранится и в высших приближениях по g, что весьма правдоподобно, так как рассматриваемый нами случай отличается от модели Тирринга лишь наличием дополнительной симметрии, т.е. что учет высших приближении приведет к выражению вида:

$$\Gamma(p', q'; p, q) \sim \left[\frac{(p'-p)^2 (p'-q)^2}{(p+q)^4} \right]^{-\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} g \, g} \tag{25}$$

то это будет означать, что заряд не перенормируется вообще и что уравнение (23) остается в силе и в высших приближениях. Последнее замечание применимо без оговорок к самой модели Тирринга, которая таким образом обладает замечательным свойством: в отличие от всех рассмотренных теорий поля /4/ она не приводит к выходу за рамки слабой связи.

В заключение выражаем благодарность В. Тиррингу за присылку препринта его работы и полезные замечания, а также Н.Н.Боголюбову и Б.В.Медведеву за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В этом приложении мы приведем список использованных формул из алгебры двухрядных σ - матриц, определенных свойствами:

$$\sigma^0 = I \;, \quad \sigma^\alpha \sigma^\beta + \sigma^\beta \sigma^\alpha = 2\delta^{\alpha\beta} \qquad \alpha,\beta = 1,2,3$$
$$\sigma^1 \sigma^2 = i\sigma^3, \dots \qquad (\sigma^i)^2 = 1 \,. \tag{A.I}$$

Повторяя рассуждение Паули[5], легко показать, что

$$\sum_{i=0}^{3} \sigma^i_{\rho\sigma}\, \sigma^i_{\sigma'\rho'} = 2\delta_{\sigma'\sigma}\, \delta_{\rho'\rho} \,. \tag{A.2}$$

Рассмотрим теперь прямое произведение двух любых двухрядных матриц A и B. Тогда

$$A_{\alpha\beta} B_{\gamma\delta} = A_{\alpha\alpha'}\, \delta_{\alpha'\beta}\, \delta_{\gamma\delta'} B_{\delta'\delta} .$$

Используя здесь (A.2), получим

$$A_{\alpha\beta} B_{\gamma\delta} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{3} \sigma^i_{\gamma\beta} (A\sigma^i B)_{\alpha\delta} \,. \tag{A.3}$$

С помощью (A.3) убедимся, что лагранжиан (I) симметричен. Действительно, из (A.3) вытекает (суммирование по n, в смысле (2))

$$\sigma^n_{\alpha\beta} \sigma^n_{\gamma\delta} = -\,\sigma^n_{\alpha\delta}\, \sigma^n_{\gamma\beta} \,. \tag{A.4}$$

Эта формула совместно со свойством антикоммутативности операторов ψ и $\bar{\psi}$ приводит к симметрии выражения (1) относительно двух ψ и двух $\bar{\psi}$.

Подставляя в (A.3) вместо A и B матричный вектор $\hat{a}$ (определенный согласно (4)), находим

$$\hat{a}_{\alpha\beta}\hat{a}_{\gamma\delta} = \frac{a^2}{2}\sigma^n_{\alpha\delta}\sigma^n_{\gamma\beta} + \hat{a}_{\alpha\delta}\hat{a}_{\gamma\beta} = \tag{A.5}$$

$$= -\frac{a^2}{2}\sigma^n_{\alpha\beta}\sigma^n_{\gamma\delta} + \hat{a}_{\alpha\delta}\hat{a}_{\gamma\beta}.$$

Таким же образом можно получить и следующие формулы (суммирование по n и m согласно (2)!)

$$(\sigma^n\hat{a}\sigma^m)_{\alpha\beta}(\sigma^n\hat{b}\sigma^m)_{\gamma\delta} = 4(ab)\,\sigma^n_{\alpha\delta}\sigma^n_{\gamma\beta},$$

или с учетом (A.4)

$$\frac{1}{4}(\sigma^n\hat{a}\sigma^m)\times(\sigma^n\hat{b}\sigma^m) = -(ab)\,\sigma^n\times\sigma^n \tag{A.6}$$

и

$$\frac{1}{4}(\sigma^n\hat{a}\sigma^m)_{\alpha\beta}(\sigma^m\hat{a}\sigma^n)_{\gamma\delta} = \frac{a^2}{2}\sigma^n_{\alpha\delta}\sigma^n_{\gamma\beta} + \hat{a}_{\alpha\delta}\hat{a}_{\gamma\beta},$$

которая с учетом (A.5) дает

$$(\sigma^n\hat{a}\sigma^m)\times(\sigma^m\hat{a}\sigma^n) = 4\,\hat{a}\times\hat{a}. \tag{A.7}$$

Приведем еще ряд формул, в которых матрицы σ стоят между операторными функциями $\bar{\psi}$, ψ . Заметим во-первых, что лагранжиан (I) может быть записан в виде (1').

Это непосредственно вытекает из (А.2) и (А4). Во-вторых, если вектор $\hat{a}$ не зависит от импульсных аргументов спиноров $\bar{\psi}$ и ψ, то (под знаком интеграла)

$$\bar{\psi}(p')\hat{a}\psi(q)\bar{\psi}(q')\hat{a}\psi(p) =$$

$$= -\frac{a^2}{4}\bar{\psi}(p')\sigma^n\psi(q)\bar{\psi}(q')\sigma^n\psi(p) \qquad \text{(A.8)}$$

Это вытекает из (А.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. W.E.Thirring, Annals of Physics 3, (1958).
2. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков, "Введение в теорию квантованных полей", Гостехиздат 1957 год, см. также Nuovo Cimento 3, 845 (1956).
3. И.Ф.Гинзбург, Д.В.Ширков, Доклады Высшей Школы № 2 (1958).
4. А.А.Абрикосов, А.Д.Галанин, Л.П.Горьков, Л.Д.Ландау, И.Я.Померанчук, К.А.Тер-Мартиросян, ЖЭТФ (в печати).
5. W.Pauli, Ann Inst. H.Poincare, 6, 109 (1936); M.Fierz, Z.Physik 104, 553 (1937); 102, 572 (1936).
6. M.Konuma and H.Umezawa, Nuovo Cimento, 4, 1461 (1956).