1860

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р - 1860

Э. Капусцик и Э. Обрык

О ВОЗМОЖНОСТИ ОБЪЕДИНЕНИЯ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА С ГРУППОЙ УНИТАРНОЙ СИММЕТРИИ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1964

О возможности объединения группы Лоренца с группой унитарной симметрии

В работе обсуждается один из возможных способов объединения неоднородной группы Лоренца с группой SU_3 в одну 18-параметрическую группу Ли. Предполагая коммутативность генераторов, соответствующих операторам полного изотопического спина I, третьей его компоненты I_2, полного спина S, третьей его компоненты S_2 и четырехмерного импульса $p\mu$, получаем, что все коммутаторы генераторов группы Лоренца с генераторами SU_3 равны нулю.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

Kapuścik E., Obryk E. P-1860

On a Possibility of Combining the Lorentz Group and the Unitary Symmetry Group

One of the possible ways of combining the inhomogeneous Lorentz group and the SU_3 group into one 18-parametric Lie group is discussed. By assuming that the generators corresponding to the operators of the total isotopic spin I, and of its third component I_2 commute with those of the total spin S, its third component S_2 and of the four-dimensional momentum $p\mu$, we obtain that all the commutators of the Lorentz group generators and those of the SU_3 generators are equal to zero.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1964.

P - 1860

Э. Капусцик[x/] и Э. Обрык[x/]

О ВОЗМОЖНОСТИ ОБЪЕДИНЕНИЯ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА С ГРУППОЙ УНИТАРНОЙ СИММЕТРИИ

Направлено в журнал "Acta Physica Polonica"

x/ Постоянный адрес: Институт ядерной физики в Кракове. Краков,23, Польша.

В последнее время обсуждался вопрос о возможных способах объединения группы высших симметрий с группой Лоренца [1]. Одна из причин важности этого вопроса лежит в том, что можно надеяться получить таким образом точную массовую формулу для частиц, принадлежащих к определенным представлениям этой группы, и тем самым – новые сведения о природе сильных взаимодействий. Раньше в работе [2] обсуждалась возможность построения (n + 10) параметрической группы T, включающей n параметрическую группу высших симметрий и неоднородную группу Лоренца в предположении коммутативности всех генераторов высших симметрий с генераторами однородной группы Лоренца. Как было показано в этой работе, генераторы группы высшей симметрии при этом оказываются коммутирующими также и с генераторами неоднородной группы Лоренца, так что исследованная группа T является прямым произведением этих двух групп. В настоящей работе мы покажем, что этот вывод можно получить при значительно менее жестких предположениях. Для краткости доказательства в качестве примера будем рассматривать только группу SU_3 .

Генераторы рассматриваемой группы T обозначим через J_i , где значения индекса $i = 1, 2, \dots , 8$ соответствуют генераторам группы SU_3 , а значения $i = 9, 10, \dots , 18$ – генераторам неоднородной группы Лоренца, причем:

$$
\begin{aligned}
&J_i = H_i , && i = 1, 2.\\
&J_{2i+1} = E_i , && i = 1, 2, 3.\\
&J_{2i+2} = E_{-i} , && i = 1, 2, 3.\\
&J_{8+i} = p_i , && i = 1, 2, 3, 4.\\
&J_{11+i} = M_{1,i} , && i = 2, 3, 4.\\
&J_{13+i} = M_{2,i} , && i = 3, 4.\\
&J_{18} = M_{3,4} .
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Обозначения для генераторов группы SU_3 используем те же самые, что в работе [3], а для группы Лоренца те же, что в работе [4].

Группа T определяется перестановочными соотношениями

$$[J_i , J_k] = C^s_{i,k} J_s , \tag{2}$$

где структурные константы удовлетворяют соотношениям

$$C^s_{i,k} = - C^s_{k,i} , \tag{3}$$

$$C^p_{i,s}\, C^s_{k,\ell} + C^p_{k,s}\, C^s_{\ell,i} + C^p_{\ell,s}\, C^s_{i,k} = 0. \tag{4}$$

Структурные константы, определяющие перестановочные соотношения внутри группы SU_3 и группы Лоренца, даны, например, в работах /3/ и /4/. Для определения группы T нужно найти остальные $C^s_{i,k}$ ($i = 1, \dots, 8$; $k = 9, \dots, 18$), совместимые с условиями (3) и (4).

В качестве предположения примем только коммутативность генераторов или их комбинаций, соответствующих физически наблюдаемым величинам: третьей компоненты изотопического спина $I_z = \sqrt{3} J_1$, полного изотопического спина $I^2 = 3(J_1^2 + J_3 J_4 + J_4 J_3)$, гиперзаряза $Y = 2 J_2$, третьей компоненты спина $S_z = \frac{1}{i}(J_{13} J_{12} - J_{15} J_{10} + J_{17} J_9)$, полного спина $S^2 = S_\mu S^\mu$, ($S_\mu = \frac{1}{2i} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} M^{\nu\lambda} p^\sigma$) и компонент импульса $p_\mu = J_{8+\mu}$. Как известно из работ /3,4/,

$$[I_z, I^2] = [I_z, Y] = [Y, I^2] = 0, \tag{5}$$

$$[p_\mu, S_z] = [S^2, p_\mu] = [p_\mu, p_\nu] = [S^2, S_z] = 0.$$

Рассмотрим теперь коммутаторы операторов I^2 и I_z с операторами p_μ, S_z, S^2. Потребовав, чтобы

$$[I_z, p_\mu] = 0,$$

получаем

$$C^s_{1,i} = 0 \quad \text{для} \quad i = 9,\ 10,\ 11,\ 12. \tag{6}$$

Аналогично из обращения в нуль коммутатора $[I^2, p_\mu]$ следует, что

$$C^s_{k,i} = 0 \quad \text{для} \quad k = 3,\ 4; \quad i = 9,\ 10,\ 11,\ 12;\ s \neq k. \tag{6'}$$

Из условия

$$[I_z, S_z] = 0 \quad \text{и} \quad [I^2, S_z] = 0$$

имеем далее

$$\begin{aligned} C^s_{1,13} &= 0 \quad \text{для} \quad s \neq 9, 10, \\ C^s_{1,15} &= 0 \quad \text{для} \quad s \neq 9,\ 12, \\ C^s_{1,17} &= 0 \quad \text{для} \quad s \neq 10,\ 12, \end{aligned} \tag{7}$$

а при $k = 3$ и 4

$$\begin{aligned} C^s_{k,13} &= 0 \quad \text{для} \quad s \neq k,\ 9,\ 10, \\ C^s_{k,15} &= 0 \quad \text{для} \quad s \neq k,\ 9,\ 12, \\ C^s_{k,17} &= 0 \quad \text{для} \quad s \neq k,\ 10,\ 12. \end{aligned} \tag{8}$$

Из тождества Якоби (4), задавая соответствующие комбинации индексов i, k, ℓ и p, легко показать, что ограничения в соотношениях (7) и (8) можно отбросить. Действительно, положив

$$i = 1, \qquad k = 3,\ 4 \qquad \text{и} \qquad \ell = 13,\ 15,\ 17,$$

видим, что

$$C^{9}_{k,\ell} = C^{10}_{k,\ell} = C^{12}_{k,\ell} = 0. \tag{9}$$

Выбрав

$$i = 3, \qquad k = 4, \qquad \ell = 13,\ 15,\ 17,$$

получаем

$$C^{s}_{i,\ell} = 0. \tag{10}$$

Аналогично для

$$i = 3,4, \qquad k = 13,\ 15,\ 17, \qquad \ell = 13,\ 15,\ 17$$

также получим, что

$$C^{i}_{i,k} = 0, \tag{11}$$

а для

$$i = 3,\ 4, \qquad k = 9,\ 10,\ 11,\ 12, \qquad \ell = 13,\ 15,\ 17$$

имеем

$$C^{i}_{i,k} = 0. \tag{12}$$

Таким образом, мы получили, что

$$C^{s}_{i,k} = 0 \tag{13}$$

для $i = 1,\ 3,\ 4$ и $k = 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 15,\ 17.$

Следующее ограничение следует из условия

$$[S^2, I_z] = 0.$$

После громоздких вычислений получаем, что условие приводит к следующему выводу:

$$C^{s}_{i,k} = 0, \qquad k = 14,\ 16,\ 18. \tag{14}$$

Из соотношений (6), (10) и (14) видим, что для всех значений s и $k \geq 9$

$$C^{s}_{i,k} = 0. \tag{15}$$

Рассматривая теперь соответствующие тождества Якоби (4), получим аналогичным образом, что и все структурные константы

$$C^{s}_{i,k} = 0 \tag{16}$$

для $i \leq 8$ и $k \geq 9$.

Интересно отметить, что в ходе рассуждений мы нигде не использовали тот факт, что оператор гиперзаряда Y коммутирует с операторами p_μ , S_z и S^2 , а получили это из других условий.

Из условия (16) видно, что построенная вышеуказанным способом группа T является прямым произведением группы SU_3 и группы Лоренца. Таким образом, чтобы найти группу, соединяющую нетривиальным способом группу SU_3 и группу Лоренца и обеспечивающую коммутативность наблюдаемых пространственно-временного характера с внутренними наблюдаемыми, необходимо рассматривать группы более высокого порядка, чем 18 параметрические.

Литература

1. Proceedings of the Conference on Symmetry Principles at High Energy, University of Miami, Miami Florida, 1964.
2. W.D.Mc Glinn. Phys. Rev. Lett., 12, 467 (1964).
3. G.Racah. Group Theory and Spectroscopy Lectures Notes, Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey, 1961.
4. Ю.М. Широков. ЖЭТФ, 33 , 861 (1957).

Рукопись поступила в издательский отдел
28 октября 1964 г.