ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Р-184

Б.В. Медведев, М.К. Поливанов

# ПЕРЕНОРМИРОВКА В ТЕОРИИ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

1958 год

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

Р-184

Б.В. Медведев, М.К. Поливанов

# ПЕРЕНОРМИРОВКА В ТЕОРИИ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ



1958 год

В недавней работе Н.Н. Боголюбова и авторов /I/x) был предложен вариант построения регулярной теории поля с помощью введения индефинитной метрики. Мы намерены здесь исследовать перенормировки в такой теории. (В силу регулярности теории речь будет итти, конечно, только о конечных перенормировках). Помимо самостоятельного значения это исследование составляет особый интерес, поскольку оно непосредственно связано с представлением о полевом происхождении массы элементарных частиц.

I. Напомним прежде всего, что в вопросе о полевых добавках к массе или о всей полевой массе в последнее время сложилось весьма парадоксальное положение.

С одной стороны, существует высоко научная точка зрения, основанная на ковариантном формализме Томонага-Швингера и теории перенормировок. Согласно этой точки зрения полевые добавки к массам фермионов, во всяком случае для перенормируемых теорий (а другие теории с этой точки зрения вообще не имеют смысла), расходятся логарифмически:

$$\Delta M \sim \alpha M \ln\left(\frac{\mu}{M}\right); \quad \mu = \frac{1}{\lambda}; \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} \quad \text{для электрона} \qquad (I)$$

---

x) Цитируется в дальнейшем, как I.

где $\lambda$ – некоторая постоянная размерности длины. Поэтому, если попытаться сделать $\lambda$ конечной, то мы неминуемо приходим либо к тому выводу, что полевые поправки к массе малы и основную роль играет "затравочная" масса неполевого происхождения, либо, что обрезание надо проводить при столь огромных импульсах $1/\lambda$, что гораздо раньше начнут играть существенную роль эффекты взаимодействия со всеми остальными существующими в природе полями. В обоих случаях построение полевой теории массы, исходя из взаимодействия только двух полей, оказывается с этой точки зрения невозможным.

С другой стороны, однако, еще со времен классической электродинамики для массы электрона существует формула

$$\Delta M \sim \frac{\alpha}{\lambda} = \alpha \mu \qquad (2)$$

Никто не сомневается в том, что эта выведенная чисто классически формула неприменима для $\lambda \sim 10^{-13}$ см., когда квантовые эффекты играют решающую роль.

Тем не менее, большинство теоретиков явно или не явно апелирует к (2) в своих рассуждениях. Дело в том, что эта формула удивительно хорошо описывает массы большинства элементарных частиц в свете наших сегодняшних представлений о существующих между ними взаимодействиях. Действительно, при одном и том же значении постоянной $\lambda \sim 10^{-13}$ см. она дает массу электрона, при подстановке в качестве $\alpha$ электродинамической постоянной тонкой структуры $\sim 1/137$; массу нуклона – при подстановке для $\alpha$ ядерной постоянной тонкой структуры $\sim 15$; дает правильный порядок величины для расщепления изотопических мультиплетов под действием электромагнитного взаимодействия или странностных мультиплетов под действием "умеренно-сильного" взаимодействия с К-мезонами. Единственные, пожалуй, исключения составляют массы "таинственного" $\mu$-мезона и, возможно, К-мезона, но и тут легче склониться в пользу неполноты нашей сегодняшней классификации взаимодействий, чем в пользу несправедливости формулы (2).

С этой, второй, точки зрения появляется естественное подозрение, что следующая из современной квантовой теории поля формула (I) не является верной[x)], и встает вопрос о том, почему приводящая к неверной формуле (I) теория может в большом количестве других следствий приводить к великолепному согласию с опытом.

С нашей точки зрения причиной успехов квантовой электродинамики является в значительной степени предложенный Паули и Вилларсом /3/ метод регуляризации элементов матрицы рассеяния. Поэтому мы считаем, что будущая регулярная теория должна, во-первых, сохранить метод Паули-Вилларса и, во-вторых, приводить для собственных масс к выражениям типа (2), а не типа (I). Ниже мы хотим показать, что предложенный в I метод введения индефинитной метрики может удовлетворить обоим этим требованиям.

2. Из соображений простоты и наглядности изложения мы займемся сейчас не какой-либо реальной физической теорией, но рассмотрим мо-

---

x) Напомним, что "логарифмическая ситуация" в квантовой теории поля может привести не только к расхождению с опытом в вопросе о массах, но и к другим, далеко идущим затруднениям, ср. /2/.

дельный пример фермионного поля, взаимодействующего с нейтральным скалярным полем с лагранжианом взаимодействия:

$$\mathcal{L}(x) = \sqrt{4\pi}\, g : \overline{\psi}(x)\varphi(x)\psi(x) : \qquad (3)$$

Эта модель обладает всеми характерными особенностями реальных взаимодействий, таких как электронно-фотонное или нуклонно-пионное, но свободна от дополнительных осложнений, связанных в первом случае с градиентной инвариантностью, а во втором – с изотопической зависимостью и большой величиной постоянной связи.

Как было показано в I, простая связь имеется не между $S$ и $\tilde{S}$, а между K и $\tilde{K}$. Поэтому удобно сразу разложить $S$, $\tilde{S}$, K и $\tilde{K}$ в ряды по постоянной связи:

$$\left.\begin{array}{l} S = 1 + S_1 + S_2 + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde{K} = \tilde{K}_1 + \tilde{K}_2 + \ldots \end{array}\right\} \qquad (4)$$

после чего получим:

$$\tilde{S}_1 = P S_1 P \,; \quad \tilde{S}_2 = P S_2 P - \frac{1}{2}\left(P S_1 S_1 P - P S_1 P S_1 P\right) \qquad (5)$$

Таким образом, мы видим, что член первого порядка в $\tilde{S}$ получается простым проектированием в $H_I$, а во втором порядке кроме главного члена, получающегося из $S$ проектированием в $H_I$, возникает еще добавок, который, как легко понять из I, призван восстановить унитарность $\tilde{S}$, которая иначе была бы утеряна. Аналогичные добавки войдут, конечно, и во все высшие порядки.

Для вопросов перенормировки нас будут интересовать только члены из $\tilde{S}_2$, соответствующие собственным энергиям фермиона и бозона. Запишем члены собственной энергии фермиона в виде:

$$\tilde{S}_{2\Phi} = -i :\bar{\psi}(x)\Sigma(x-y)\psi(y): = -i :\bar{\psi}(x)\Sigma^{(1)}(x-y)\psi(y): -i:\bar{\psi}(x)\Sigma^{(2)}\psi(y): \quad (6)$$

В силу (5) и (3) $\Sigma^{(1)}(x-y)$ и $\Sigma^{(2)}(x-y)$ будут тогда иметь вид:

$$\Sigma^{(1)}(x-y) = 4\pi i g^2 \mathcal{S}^{(c)}(x-y)\ \mathcal{D}^{(c)}(x-y) \ ; \quad (6.1)$$

$$\Sigma^{(2)}(x-y) = -2\pi i g^2 \left[\mathcal{S}^{(-)}(x-y)\mathcal{D}^{(-)}(x-y) - S^{(-)}(x-y)D^{(-)}(x-y)\right]. \quad (6.2)$$

Мы выполнили разбиение $\Sigma$ так, чтобы $\Sigma^{(1)}$ соответствовал бы главному члену $PS_2P$, а $\Sigma^{(2)}$ – восстанавливающему унитарность добавку. В соответствие с развитым в I методом мы должны теперь воспользоваться для обобщенных сверток $\mathcal{S}^{(c)}, \dots, \mathcal{D}^{(-)}$ выражениями типа (5) из I, т.е. написать:

$$\mathcal{D}^{(c)}_m(x-y) = \sum_{i\geq 0} f_i D^{(c)}_{m_i}(x-y) \ ; \ f_0 = 1, \ m_0 = m \quad (7.1)$$

$$\mathcal{S}^{(c)}_M(x-y) = \sum_{j\geq 0} d_j S^{(c)}_{\mu_j}(x-y); \ d_0 = 1, \ \mu_0 = M \quad (7.2)$$

где $M$ и $m$ – затравочные массы физических фермиона и бозона, а $\mu_j$, $m_i$; $i,j>0$ – массы фиктивных фермионов и бозонов; коэффициенты $f_i$ и $d_j$ не обязаны быть положительными. Такие же выражения следует написать для функций $\mathcal{D}^{(-)}$ и $\mathcal{S}^{(-)}$.

Член, соответствующий собственной энергии бозона запишем в виде:

$$\tilde{S}_{2Б} = -\frac{i}{2}:\varphi(x)\Pi(x-y)\varphi(y): = -\frac{i}{2}:\varphi(x)\Pi^{(1)}(x-y)\varphi(y): -\frac{i}{2}:\varphi(x)\Pi^{(2)}(x-y)\varphi(y): \quad (8)$$

где опять

$$\Pi^{(1)}(x-y) = -4\pi i g^2 \, Sp\left( S^{(c)}(x-y)\, S^{(c)}(y-x) \right) \tag{9.I}$$

соответствует главному члену, а

$$\Pi^{(2)}(x-y) = -2\pi i g^2 \, Sp\left( S^{(-)}(x-y)\, S^{(+)}(y-x) - S^{(-)}(x-y)\, S^{(+)}(y-x) \right) \tag{9.2}$$

восстанавливающему унитарность добавку.

Переходя к Фурье-образам, определенным соотношениями

$$\Sigma(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ip(x-y)}\Sigma(p)\,dp, \quad \Pi(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ik(x-y)}\Pi(k)\,dk \tag{I0}$$

мы получим с помощью разложений (7):

$$\Sigma^{(1)}(p) = \frac{4\pi i g^2}{(2\pi)^4}\int dk \sum_{i,j\geq 0} f_i d_j \, D^{(c)}_{m_i}(k) S^{(c)}_{\mu_j}(p-k) \tag{II.I}$$

$$\Sigma^{(2)}(p) = -\frac{2\pi i g^2}{(2\pi)^4}\int dk \sum_{i+j>0} f_i d_j \, D^{(-)}_{m_i}(k)\, S^{(-)}_{\mu_j}(p-k) \tag{II.2}$$

и аналогичные выражения для поляризационного оператора:

$$\Pi^{(1)}(k) = -\frac{4\pi i g^2}{(2\pi)^4}\int dp \, Sp \sum_{i,j\geq 0} d_i d_j \, S^{(c)}_{\mu_i}(p-k)\, S^{(c)}_{\mu_j}(p); \tag{I2.I}$$

$$\Pi^{(2)}(k) = -\frac{2\pi i g^2}{(2\pi)^4}\int dp \, Sp \sum_{i+j>0} d_i d_j \, S^{(-)}_{\mu_i}(p-k)\, S^{(+)}_{\mu_j}(p) \tag{I2.2}$$

Компенсационные члены (II.2) и (I2.2) не дадут вклада в полевые добавки к массам или множителям $Z$. Действительно, поскольку в этих членах участвуют только свободные функции $D^{(-)}$, $S^{(-)}$ и $S^{(+)}$, то концы векторов к и р-к в (II.2) и векторов р-к и р в (I2.2) должны лежать на гиперболоидах, определяемых соответствующими массами. Более того, легко сообразить, что частотности этих векторов оказываются выбранными таким образом, что свободный импульс р в (II.2) и к в (I2.2) представляется суммой двух векторов, концы каждого из которых лежат на полугиперболоиде, заключенном в одной и той же половине светового конуса. Поэтому интегралы в (II.2) и (I2.2) могут дать отличный от нуля результат лишь для таких внешних импульсов, которые (а) времениподобны и (б) квадрат которых больше суммы двух наименьших входящих в сумму по $i$ и $j$ масс. Поскольку, однако, член с обоими физическими массами в этих суммах отсутствует, то компенсационные члены могут быть отличны от нуля только для времениподобных внешних импульсов, квадрат которых больше наименьшей фиктивной массы. Так как мы будем считать в дальнейшем, что реальные массы частиц меньше всех фиктивных, то $\Sigma^{(2)}$ и $\Pi^{(2)}$ не будут давать никакого вклада в одночастичные состояния, и при рассмотрении таких состояний достаточно будет ограничиться главными членами $\Sigma^{(1)}$ и $\Pi^{(1)}$ x), к вычислению которых мы и перейдем.

---

x) Этот результат очень легко понять физически. Унитарность матрицы $PSP$ могла бы нарушиться только для таких процессов, при которых могли бы испускаться фиктивные частицы, что запрещено сформулированными в I условиями. Как раз тогда и приходится добавлять компенсирующие члены. Для рассматриваемых собственно энергетических частией это может произойти только для квадратов импульсов столь больших, что становится возможным распад на две частицы, по меньшей мере одна из которых – фиктивная.

3. Вычисления $\Sigma^{(1)}$ и $\Pi^{(1)}$ отличаются от соответствующих стандартных выкладок с использованием регуляризации Паули-Вилларса только тем, что (I) в сумме (7.2) при переходе от члена к члену заменяются массы и в числителе и в знаменателе, а не только в знаменателе, как обычно, в (2) фиктивные массы не стремятся в конце вычислений к бесконечности. (I) приводит к тому, что добавление каждой фиктивной фермионной массы может снизить у нас степень расходимости только на единицу, а не на два. Пункт (2) составляет существо отличия рассматриваемой теории от обычной и позволяет вычислить полевые добавки к массам, зарядам и т.д., вместо того, чтобы отбрасывать их, как физически бессмысленные бесконечные величины.

Ясно, что подобное вычисление будет представлять интерес, только если число вычисляемых постоянных будет меньше числа вновь вводимых. С первого взгляда представляется, что предлагаемая теория не будет обладать таким преимуществом, поскольку были введены в неопределенном числе, во-первых, характеризующие фиктивные поля массы $m_i$ и $\mu_j$ и, во-вторых, ~~составляющие~~ соответствующие коэффициенты $f_i$ и $d_j$. Однако этот произвол совершенно естественно ограничивается очень существенным образом. Прежде всего, как мы увидим ниже, требование сходимости интегралов налагает на коэффициенты $f_i$ и $d_j$ обычные условия Паули-Вилларса:

$$\sum_{i\geq 0} f_i = 0, \ldots, \sum (m_i)^n f_i = 0; \tag{13.1}$$

$$\sum_{j\geq 0} d_j = 0, \ldots, \sum (\mu_j)^s d_j = 0. \tag{13.2}$$

Поэтому, если наложить как раз по столько условий (13), сколько выбрано соответствующих фиктивных масс, то коэффициенты $f_i$ и

$d_j$ определятся однозначно. Во-вторых, число фиктивных масс совершенно естественно определить из своего рода условия экономии, потребовав, чтобы число вводимых масс было бы минимально необходимым для сходимости всех расходящихся в рассматриваемой теории диаграмм.

В нашей модели будет пять типов расходящихся диаграмм: собственная энергия фермиона (рис.I), собственная энергия бозона (рис.2), вершинная часть (рис.3), рассеяние бозона на бозоне (рис. 4) и вклад бозонной петли в собственную энергию бозона (рис.5).

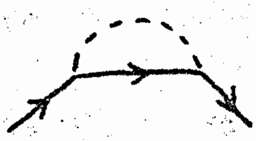

Рис. I

Рис. 2

Рис. 3

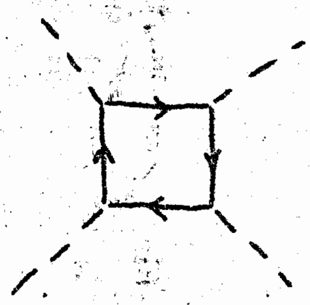

Рис. 4

Рис. 5

Диаграмма I расходится линейно; чтобы сделать ее сходящейся, надо понизить степень расходимости на 2, т.е. в силу сделанного замечания (I), ввести одну фиктивную бозонную либо две фиктивных фермионных массы. Квадратично расходящаяся диаграмма 2 требует двух фермионных масс; логарифмическая диаграмма 3 – одной фермионной или одной бозонной; логарифмическая диаграмма 4 – одной фермионной массы. Наконец, чтобы сделать сходящейся квадратичную диаграмму 5 достаточно одной бозонной фиктивной массы. Таким образом, в нашей модели "минимальный" набор фиктивных полей включает одно бозонное и два фермионных поля.

Итак, потребное нам число постоянных сократилось до трех. Однако, мы хотим пойти дальше, выбрав все эти постоянные если не равными, то во всяком случае одного и того же порядка величины - именно, порядка $1/r_0$ , где $r_0$ - классический радиус электрона. Более того, мы хотим, чтобы одни и те же постоянные можно было бы применить для описания разных взаимодействий различных частиц[x)]. Основанием для подобной программы является следующее обстоятельство.

Как известно, после обычной регуляризации Паули-Вилларса диаграмма I - зависит от вспомогательных масс квадратично, а диаграмма I - логарифмически. Если бы это положение сохранилось бы и в предлагаемом варианте теории, то полевые добавки к фермионной массе зависели бы логарифмически от масс фиктивных частиц, т.е. мы пришли бы к "обычной" формуле типа (I) со всеми ее отрицательными сторонами. Однако, как будет показано ниже, отмеченное ранее отличие (I) нашей процедуры от процедуры Паули-Вилларса приводит к тому, что диаграмма (I) зависит теперь линейно от фиктивных масс. Иными словами, если мы захотим стать на ту же точку зрения, что основная часть массы обусловлена взаимодействиями, то для этой полевой массы

---

x) Любопытно заметить, что тот же набор фиктивных полей устраняет все расходимости не только во всех известных ренормируемых теориях, но и в неренормируемой теории с четырехфермионным взаимодействием.

мы получим и для фермиона, и для бозона и формулу типа (2), т.е. как раз зависимость, которая подсказывается экспериментом.

4. Практически вычисление $\Sigma^{(1)}$ и $\Pi^{(1)}$ удобно проводить, используя для $D^{(c)}$ и $S^{(c)}$ обычное $\alpha$ -представление:

$$D^{(c)}_m(k) = i\int d\alpha\, e^{i\alpha(k^2-m^2+i\epsilon)}$$
$$S^{(c)}_M(p) = i\int d\beta\, e^{i\beta(p^2-M^2+i\epsilon)}(M+\hat{p}) \tag{I4}$$

Вычисляя шпуры и выполняя интегрирование по импульсам, получаем:

$$\Sigma^{(1)}(p) = -\frac{4\pi g^2}{16\pi^2}\int d\alpha d\beta\,\frac{e^{ip^2\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}-\epsilon(\alpha+\beta)}}{(\alpha+\beta)^2}\sum_{i,j\geqq 0} f_i\mu_j d_j e^{-i\alpha m_i^2-i\beta\mu_j^2} -$$
$$-\frac{4\pi g^2}{16\pi^2}\hat{p}\int\frac{d\alpha d\beta}{(\alpha+\beta)^2}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}e^{ip^2\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}-\epsilon(\alpha+\beta)}\sum_{i,j\geqq 0} f_i d_j e^{-i\alpha m_i^2-i\beta\mu_j^2}. \tag{I5}$$

и

$$\Pi^{(1)}(k) = \frac{g^2}{\pi}\int\frac{d\alpha d\beta}{(\alpha+\beta)^2}e^{ik^2\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}-\epsilon(\alpha+\beta)}\sum_{i,j\geqq 0}\mu_i\mu_j d_i d_j e^{-i\alpha\mu_i^2-i\beta\mu_j^2} -$$
$$-\frac{g^2}{\pi}\int\frac{d\alpha d\beta}{(\alpha+\beta)^2}e^{ik^2\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}-\epsilon(\alpha+\beta)}\left(-\frac{2i}{\alpha+\beta}+\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}k^2\right)\sum_{i,j\geqq 0} d_i d_j e^{-i\alpha\mu_i^2-i\beta\mu_j^2} \tag{I6}$$

Переходя к обычным переменным $\lambda$ и $\xi$ :

$$\alpha = \xi \lambda \quad ; \quad \beta = (1-\xi)\lambda \tag{I7}$$

обнаруживаем, что для сходимости интеграла по $\lambda$ в $\Sigma^{(1)}$ необходимо наложить одно условие (I3.I) или два условия (I3.2), а для сходимости интеграла по $\lambda$ в $\Pi^{(1)}$ – два условия (I3.2), – как то и следовало ожидать в силу сделанных замечаний, – после чего выражения для $\Sigma^{(1)}(p)$ и $\Pi^{(1)}(k)$ приводятся к форме:

$$\Sigma^{(1)}(p) = -\frac{g^2}{4\pi}\left( I_1(p) + \hat{p}\, I_2(p)\right) \tag{I8}$$

где

$$I_1(p) = -\sum_{i,j\geq 0} f_i \mu_j d_j \int_0^1 d\xi \ln\left|p^2\xi(1-\xi) - m_i^2\xi - \mu_j^2(1-\xi)\right| \tag{I9.I}$$

$$I_2(p) = -\sum_{i,j\geq 0} f_i d_j \int_0^1 d\xi\, \xi \ln\left|p^2\xi(1-\xi) - m_i^2\xi - \mu_j^2(1-\xi)\right| \tag{I9.2}$$

и

$$\Pi^{(1)}(k) = -\frac{g^2}{\pi}\int_0^1 d\xi \sum_{i,j\geq 0} \mu_i \mu_j d_i d_j \ln\left|k^2\xi(1-\xi) - \mu_i^2\xi - \mu_j^2(1-\xi)\right| - \tag{20}$$

$$-\frac{g^2}{\pi}\int_0^1 d\xi \sum_{i,j\geq 0} d_i d_j \left[2\mu_i^2\xi + 2\mu_j^2(1-\xi) - 3k^2\xi(1-\xi)\right] \ln\left|k^2\xi(1-\xi) - \mu_i^2\xi - \mu_j^2(1-\xi)\right|$$

Результат интегрирования по $\xi$ приводит к выражениям, поведение которых затруднительно непосредственно оценить. Поэтому мы не будем его выписывать, а приведем только предельные формулы. Мы будем считать, что фиктивные массы велики как по сравнению с затравочными массами, так и по сравнению с наблюдаемыми (последнее связано с допущением маслости постоянной связи). В таком предельном случае мы получим для $\Pi^{(I)}(\kappa)$

$$\Pi^{(1)}(k) = -\frac{g^2}{\pi}\left\{\frac{\mu_1^2\mu_2^2}{(\mu_1-\mu_2)^2}\left[4-\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\ln\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2}\right] - \right.$$

$$-\frac{\mu_1\mu_2}{(\mu_1-\mu_2)^2}\left[\mu_1+\mu_2-2\frac{\mu_1^2+\mu_2^2}{\mu_1-\mu_2}\ln\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2}\right]M+\frac{1}{(\mu_1-\mu_2)^2}\left[4\mu_1\mu_2+\frac{\mu_1+\mu_2}{2(\mu_1-\mu_2)}(\mu_1^2+4\mu_1\mu_2+\mu_2^2)\ln\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2}\right]M$$

$$-\frac{k^2}{(\mu_1-\mu_2)^4}\left[\frac{4\mu_1^4-9\mu_1^3\mu_2+4\mu_1^2\mu_2^2-9\mu_1\mu_2^3+4\mu_2^4}{6}+\right. \tag{21}$$

$$\left.+\frac{\mu_1^6-4\mu_1^5\mu_2+3\mu_1^4\mu_2^2+4\mu_1^3\mu_2^3+3\mu_1^2\mu_2^4-4\mu_1\mu_2^5+\mu_2^6}{4(\mu_1-\mu_2)^2}\ln\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2}\right]$$

$$\left.-\left(\frac{3M^2}{2}-\frac{k^2}{4}\right)\ln\frac{\mu_1^2\mu_2^2}{M^4}+\frac{(2M^2-k^2)(4M^2-k^2)}{4k^2}\sqrt{1-\xi^2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-\xi^2}}{1+\sqrt{1-\xi^2}}\right|-4M^2+\frac{5k^2}{6}\right\}.$$

где

$$\xi = \frac{1}{1-k^2/2M^2}$$

и предположено, что

$$\mu_1^2,\ \mu_2^2,\ |\mu_1^2-\mu_2^2| \gg k^2,\ M^2 \tag{22}$$

в соответствие с чем члены $1/\mu$ и выше опущены.

Если принять, что затравочная масса M равна нулю, т.е. стать на ту точку зрения, что вся масса полевого происхождения, мы получим:

$$\Pi^{(1)}(k) = -\frac{g^2}{\pi}\left\{\frac{\mu_1^2\mu_2^2}{(\mu_1-\mu_2)^2}\left(4-\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\ln\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2}\right)+\frac{k^2}{4}\ln\frac{\mu_1^2\mu_2^2}{k^2\cdot k^2}+\frac{5k^2}{6}-\right.$$

$$-\frac{k^2}{(\mu_1-\mu_2)^4}\left[\frac{4\mu_1^4-9\mu_1^3\mu_2+4\mu_1^2\mu_2^2-9\mu_1\mu_2^3+4\mu_2^4}{6}+\right. \qquad (23)$$

$$\left.\left.+\frac{\mu_1^6-4\mu_1^5\mu_2+3\mu_1^4\mu_2^2+4\mu_1^3\mu_2^3+3\mu_1^2\mu_2^4-4\mu_1\mu_2^5+\mu_2^6}{4(\mu_1-\mu_2)^2}\ln\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2}\right]\right\}$$

где теперь считается, что

$$\mu_1^2,\ \mu_2^2,\ |\mu_1^2-\mu_2^2| \gg k^2; \qquad M=0 \qquad (24)$$

Особый интерес представляет "дипольный" случай, когда массы $\mu_1$ и $\mu_2$ стремятся друг к другу, и мы получаем, как легко понять, совокупность двух полей с совпадающими массами, одно из которых несет дефинитную, а другое -индефинитную метрику. Формулы при этом значительно упрощаются и мы находим, что:

$$\Pi^{(1)}(k) = \frac{g^2}{\pi}\left\{\frac{\mu^2}{3}-\frac{4}{3}\mu M+3\ln\frac{\mu^2}{M^2}\cdot M^2+\frac{23}{3}M^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{8}{15}-\frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{M^2}\right)k^2-\frac{(2M^2-k^2)(4M^2-k^2)}{4k^2}\sqrt{1-\xi^2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-\xi^2}}{1+\sqrt{1-\xi^2}}\right|\right\}, \qquad (25)$$

при условии

$$\mu_1^2=\mu_2^2=\mu^2 \gg k^2,\ M^2 \qquad (26)$$

Наконец, если теперь считать и затравочную массу равной нулю, то $\Pi^{(1)}(K)$ принимает совсем простой вид:

$$\Pi^{(1)}(K) = \frac{g}{\pi}\left\{\frac{\mu^2}{3} + \left(\frac{8}{15} - \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{K^2}\right)K^2\right\} \tag{27}$$

если

$$\mu_1^2 = \mu_2^2 = \mu^2 \gg K^2 \;, \quad \mathcal{M} = 0 \tag{28}$$

Совершенно аналогично проводится исследование фермионной собственной энергии $\Sigma^{(1)}(p)$. Полагая опять все (теперь три) фиктивные массы большими, получаем для дающего главный вклад в массу члена $I_1(p)$:

$$I_1(p) = \frac{-2m_1^4\mu_1\mu_2 + m_1^2\mu_1\mu_2(\mu_1^2+\mu_2^2) + (\mu_1+\mu_2)m_1^2(m_1^2+\mu_1^2+\mu_2^2)\mathcal{M}}{(\mu_1-\mu_2)(m_1^2-\mu_1^2)(m_1^2-\mu_2^2)}\ln\frac{\mu_1}{\mu_2} + \tag{29}$$

$$+\frac{m_1^2\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2) + [\mu_1^2\mu_2^2 - m_1^2(\mu_1^2+\mu_1\mu_2+\mu_2^2)]\mathcal{M}}{(m_1^2-\mu_1^2)(m_1^2-\mu_2^2)}\ln\frac{m_1^2}{\mu_1\mu_2} +$$

$$+\mathcal{M}\ln\frac{\mu_1\mu_2}{\mathcal{M}^2} + \mathcal{M} - \mathcal{M}\,\frac{p^2-\mathcal{M}^2+m^2}{p^2}\ln\frac{m}{\mathcal{M}} - \mathcal{M}\,\frac{m^2+\mathcal{M}^2-p^2}{2p^2}\sqrt{1-\varsigma^2}\,\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-\varsigma^2}}{1+\sqrt{1-\varsigma^2}}\right|$$

где теперь

$$\varsigma = \frac{2 m \mathcal{M}}{m^2 + \mathcal{M}^2 - p^2} \tag{30}$$

и предположено, что

$$\mu_1^2,\ \mu_2^2,\ m_1^2 \gg \mathcal{M}^2,\ m^2,\ p^2 \tag{31}$$

Если же опять допустить, что (теперь обе) затравочные массы равны нулю, то получается гораздо более простое выражение

$$I_1(p) = \frac{m_1^2 \mu_1 \mu_2 (\mu_1^2 + \mu_2^2 - 2m_1^2)}{(\mu_1 - \mu_2)(m_1^2 - \mu_2^2)(m_1^2 - \mu_1^2)} \ln \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{m_1^2 \mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2)}{(m_1^2 - \mu_1^2)(m_1^2 - \mu_2^2)} \ln \frac{m_1^2}{\mu_1 \mu_2} \tag{32}$$

справедливое, если

$$\mu_1^2,\ \mu_2^2,\ m_1^2 \gg p^2 \qquad и \qquad \mathcal{M} = m = 0 \tag{33}$$

"Дипольных" случаев надо будет теперь различать два – когда совпадают только две фиктивные фермионные массы $\mu_1$ и $\mu_2$, и когда с ними совпадает и бозонная фиктивная масса $m_1$. В первом из этих дипольных случаев мы находим

$$I_1(p) = 2m_1^2 \frac{\mu(\mu^2 - m_1^2) + (2\mu^2 + m_1^2)\mathcal{M}}{(m_1^2 - \mu^2)^2} + \frac{2m_1^2\mu^3 + (\mu^4 - 3m_1^2\mu^2)}{(m_1^2 - \mu^2)^2} \ln \frac{m_1^2}{\mu^2} +$$

$$+ \mathcal{M}\left(\ln \frac{\mu^2}{\mathcal{M}^2} + 1\right) - \mathcal{M} \frac{p^2 - \mathcal{M}^2 + m^2}{p^2} \ln \frac{m}{\mathcal{M}} - \mathcal{M} \frac{m^2 + \mathcal{M}^2 - p^2}{2p^2} \sqrt{1 - \varsigma^2} \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1 - \varsigma^2}}{1 + \sqrt{1 - \varsigma^2}} \right| \tag{34}$$

для

$$\mu_1^2=\mu_2^2=\mu^2,\ m_1^2 \gg M^2,\ m^2,\ p^2 \tag{35}$$

и

$$I_1(p)=\frac{2m_1^2\mu}{(m_1^2-\mu^2)^2}\left[\mu^2-m_1^2+\mu_2 \ln\frac{m_1^2}{\mu_1^2}\right] \tag{36}$$

для

$$\mu_1^2=\mu_2^2=\mu^2,\quad m_1^2 \gg p^2\ ;\quad M=m=0 \tag{37}$$

Наконец во втором дипольном случае получается, в предположении отсутствия затравочных масс, совсем простое выражение

$$I_1(p)=-\mu \tag{38}$$

если

$$\mu_1^2=\mu_2^2=m_1^2=\mu^2 \quad \text{и} \quad M=m=0 \tag{39}$$

Для второго, умножающегося на $\hat{p}$, члена $I_2(p)$, находим в общем случае

$$I_2(p)=\frac{\mu_1\mu_2(m_1^2+\mu_1\mu_2)}{2(m_1^2-\mu_1^2)(m_1^2-\mu_2^2)}+\frac{1}{4}+\frac{-m_1^4(\mu_1^2+\mu_1\mu_2+\mu_2^2)+2m_1^2\mu_1^2\mu_2^2+\mu_1^3\mu_2^3}{2(m_1^2-\mu_1^2)^2(m_1^2-\mu_2^2)^2}\ln\frac{m_1^2}{\mu_1\mu_2}+$$

$$+\left[\frac{\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)}{4(\mu_1-\mu_2)}\,\frac{m_1^4(\mu_1^2-\mu_1\mu_2+\mu_2^2)-2m_1^2\mu_1^2\mu_2^2+\mu_1^3\mu_2^3}{(m_1^2-\mu_1^2)^2(m_1^2-\mu_2^2)^2}-\frac{\mu_1+\mu_2}{4(\mu_1-\mu_2)}\right]\ln\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2}+ \tag{40}$$

$$+\frac{1}{2}\ln\frac{\mu_1\mu_2}{M^2}-\frac{p^4+2p^2m^2-(M-m)^2}{4p^4}\ln\frac{m^2}{M^2}-$$

$$-\frac{-p^4+2p^2m^2-m^4+M^4}{4p^4}\sqrt{1-\xi^2}\,\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-\xi^2}}{1+\sqrt{1-\xi^2}}\right|+\frac{M^2-m^2}{2p^2}$$

где $\xi$ опять дается выражением (30) и предположено выполнение условия (31). Полагая теперь затравочные массы равными нулю и переходя к первому дипольному случаю (37) получим из (40):

$$I_2(p)=\frac{\mu^2(m_1^2+3\mu^2)}{2(m_1^2-\mu^2)^2}-\mu^4\frac{(3m_1^2+\mu^2)}{2(m_1^2-\mu^2)^3}\ln\frac{m_1^2}{\mu^2}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\ln\frac{p^2}{\mu^2} \tag{41}$$

и, наконец, во втором дипольном случае (39) $I_2(p)$ примет вид:

$$I_2(p)=-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\ln\frac{p^2}{\mu^2} \tag{42}$$

5. Сравнивая теперь полученные в различных частных предположениях выражения (2I), (23), (25) и (27) для $\Pi(k)$, видим, что все они отличаются по существу лишь численными коефициентами и младшими членами, основная же зависимость оказывается нечувствительной к деталям выбора фиктивных масс или же к наличию или отсутствию затравочной массы M. Именно, во всех случаях $\Pi(k)$ оказывается имеющей следующую структуру:

$$\Pi(K)=g^2\mu^2F_1\left(\frac{\mu_1}{\mu},\frac{\mu_2}{\mu}\right)+g^2\mu\mathcal{M}F_2\left(\frac{\mu_1}{\mu},\frac{\mu_2}{\mu}\right)+$$
$$+g^2\mathcal{M}^2F_3\left(\frac{\mu_1}{\mu},\frac{\mu_2}{\mu},\ln\frac{\mathcal{M}}{\mu}\right)+g^2k^2F_4\left(\frac{\mu_1}{\mu},\frac{\mu_2}{\mu},\mathcal{M},k\right)+g^2O\left(\frac{1}{\mu}\right) \tag{43}$$

где $\mu$ - величина порядка фиктивных масс $\mu_1,\mu_2$ / и $m_1$ /, а $F_1$, $F_2$, $F_3$ и $F_4$ - функции порядка единицы или, может быть для $F_3$, $F_4$, - порядка $\ln(p/\mu)$. Точно таким же образом, складывая в соответствие с (I8) выражения для $I_1(p)$ и $I_2(p)$, находим, что независимо от деталей выбора фиктивных масс $\mu_1,\mu_2$, и $m_1$ и от наличия или отсутствия затравочных масс $\mathcal{M}$, $m$, для $\Sigma(p)$ получается выражение вида

$$\Sigma(p)=g^2\mu f_1\left(\frac{\mu_1}{\mu},\frac{\mu_2}{\mu},\frac{m_1}{\mu}\right)+g^2\mathcal{M}f_2\left(\frac{\mu_1}{\mu},\frac{\mu_2}{\mu},\frac{m_1}{\mu},\mathcal{M},m,p\right)+$$
$$+\hat{p}f_3\left(\frac{\mu_1}{\mu},\frac{\mu_2}{\mu},\frac{m_1}{\mu},\mathcal{M},m,p\right)+O\left(\frac{1}{\mu}\right)g^2 \tag{44}$$

(Приведем в качестве примера выражение для случая (39):

$$\Sigma(p)=\frac{1}{4\pi}g^2\mu+\frac{g^2}{6\pi}\hat{p}\left(1+\frac{3}{4}\frac{p^2}{\mu^2}\right) \tag{45}$$

Наша нормировка $\Pi(k)$ и $\Sigma(p)$ выбрана таким образом, что их значения при $k^2$ равном $m^2$ или, соответственно, $\hat{p}$ равном $M$ дают как раз поправки $\Delta m^2$ или $\Delta M$ к массам фермиона или бозона. Таким образом мы видим, что предлагаемый вариант теории с индефинитной метрикой действительно приводит для полевых вкладов в массы к выражениям типа обсуждавшейся в начале статьи формулы (2). Это обстоятельство может послужить основанием для надежды, что на пути дальнейшего развития такой теории в направлении применения к физически интересным случаям электродинамики, сильных взаимодействия и умеренно сильных взаимодействий можно ожидать интересных результатов. Заметим, что на этом пути стоят пока ещё существенные трудности, связанные, с одной стороны, с вопросами градиентной инвариантности при переходе к электродинамике, и, с другой стороны, с большой величиной константы связи в сильных взаимодействиях.

Кроме перенормировки масс следует, конечно, рассмотреть и вопрос о перенормировках волновых функций и заряда. Все эти перенормировки будут, естественно, конечными. Более того, они будут, во всяком случае для достаточно малой постоянной связи, также и малыми. Действительно, что касается перенормировки бозонной и фермионных операторов поля, то из последних членов (43) и (44) видно, что такие перенормировки будут, в лучшем случае, порядка

$$g^2 \ln\left(\frac{\mu}{M}\right) \tag{46}$$

Так как, однако, мы считаем, что $\mu/M \sim \frac{1}{g^2}$, то, следовательно, эти перенормировки будут порядка

$$g^2 \ln g^2 \tag{46a}$$

то есть малыми. Для перенормировки заряда это следует, кроме только что сделанного замечания, из того обстоятельства, что вершинная диаграмма (рис.3) расходится логарифмически и, следовательно, будет после регуляризации логарифмически же зависеть от фиктивных масс.

Перечисленные выше вопросы требуют , конечно, дальнейшего исследования, которое мы надеемся совершить в следующей работе.

Авторы пользуются случаем , чтобы выразить свою глубокую благодарность Н.Н. Боголюбову, ценными советми которого они имели возможность пользоваться. Авторы благодарны также Д.В. Ширкову за плодотворные дискуссии.

## Л И Т Е Р А Т У Р А


I. Н.Н. Боголюбов, Б.В. Медведев и М.К. Поливанов, Доклады Высшей школы (в печати).

2. И.Я. Померанчук, ДАН СССР, 103, 1005 (1955).

3. Pauli and Willars, Rev. Mod. Phys. 21,434 (1949).


Статья поступила в Издательский отдел
15 апреля 1958 г.