ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-1830

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Е.Червонко

МЕТОД САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ И КОЛЛЕКТИВНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ МОДЕЛЬНЫХ ФЕРМИ-СИСТЕМ

1964

Р-1830

2708/3 пр.

Е.Червонко

МЕТОД САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ И КОЛЛЕКТИВНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ МОДЕЛЬНЫХ ФЕРМИ-СИСТЕМ

Направлено в ЖЭТФ

В работе[1] мы рассмотрели класс модельных систем с гамильтонианом

$$H = \sum_{1} E(1)\, a^{+}(1)\, a(1) - \frac{A}{2} \sum_{i=1}^{k} L_i^{+} L_i - \frac{A}{2} \sum_{i=1}^{n} R_i^{+} R_i \quad , \tag{1}$$

где $L_i = \frac{1}{A} \sum_{12} \lambda^{i}_{12}\, a^{+}(1)\, a(2)$, $\qquad R_i = \frac{1}{A} \sum_{12} \rho^{i}_{12}\, a(1)\, a(2)$,
$\rho^{i}_{12} = -\rho^{i}_{21}$, $a^{+}(1), a(1)$ соответственно операторы рождения и уничтожения ферми-частицы в состоянии "1", A – большой параметр порядка массового числа. Число членов суммы по "1" – по одночастичным уравнениям сферического или деформированного ядра, – равное числу рассматриваемых одночастичных уровней, было порядка A. Такого же порядка были суммы от модулей λ_{12} и ρ_{12} по "1" и "2". Суммы от тех же модулей, но по одному лишь квантовому числу, были порядка единицы, а λ и ρ не перемешивали состояний с различной четностью и зарядом. $E(1)$ равнялось энергии оболочечной модели, сдвинутой благодаря наличию различных лагранжевых множителей от одночастичных интегралов движения, неустойчивых при прибавлении к гамильтониану членов линейных по $(L^{+} + L)$ и $(R^{+} + R)$.

В работе[1] было доказано, между прочим, совпадение одночастичных возбуждений гамильтониана (1) и линеаризованного гамильтониана

$$\sum_{12} K_{12}\, a^{+}(1)\, a(2) - \frac{1}{2} \sum_{12} [\, P_{12}\, a^{+}(1)\, a^{+}(2) + P^{*}_{12}\, a(2)\, a(1) \,] . \tag{2}$$

в пределе больших A. В формуле (2) матрицы K_{12} и P_{12} были определены следующим образом:

$$K_{12} = E(1)\, \delta_{12} - \Lambda_{12}, \qquad \Lambda_{12} \equiv \tfrac{1}{2} \sum_{i}^{k} [\, \lambda^{i}_{12} \langle L_i \rangle^{*} + \lambda^{i*}_{21} \langle L_i^{*} \rangle \,] = \Lambda^{*}_{21} \; , \tag{3}$$

$$P_{12} \equiv \sum_{i}^{n} \rho^{i*}_{21} \langle R_i \rangle \; ,$$

а среднее <......> взято по основному состоянию (2). Как мы доказали в[1], условие

$$\sum_{s} [\, K_{1s}\, P^{*}_{s2} + K_{2s}\, P^{*}_{s1} \,] = 0 \tag{4}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы (2) диагонализовать путем применения к нему одного преобразования Хартри-Фока, а затем – специального преобразования Боголюбова. Если нет ограничения (4), то нам нужно общее преобразование Боголюбова[2,3]. Коэфициенты нужного преобразования Хартри-Фока $-\sum_{2} C_{12}\, \alpha(2) = a(1)$ – удовлетворяют уравнению на собственные значения:

$$\sum_{s} K_{1s} C_{s4} \equiv E(1)\, C_{14} - \sum_{s} \Lambda_{1s} C_{s4} = \Omega(4)\, C_{14} , \qquad \text{откуда:} \qquad K_{1s} = \sum_{4} C^{*}_{14} C_{s4}\, \Omega(4) . \tag{5}$$

Если C нормированы на единицу, т.е. $\sum_{3} C^*_{31} C_{32} = \delta_{12}$, то их всегда можно подобрать таким образом, чтобы антисимметричная матрица $\tilde{\tilde{P}}_{56} \equiv \sum_{12} C^*_{15} P_{12} C^*_{26}$ при фиксированном "5" могла быть не нулевой, как следует из (4) и (5), лишь для одного состояния: $6 \equiv \bar{5}$. Притом $\Omega(\bar{5}) = \Omega(5)$. Поэтому мы можем написать $\tilde{\tilde{P}}_{56} = \nu(5)\,\delta_{5\bar{6}}$, $\nu(\bar{5}) = -\nu(5)$, откуда следует, что

$$P_{12} = \sum_{4} C_{14} C_{2\bar{4}} \nu(4). \tag{6}$$

Легко видеть, что (4) выполняется независимо от значений средних $\langle L\rangle$ и $\langle R\rangle$, если выполняются условия

$$\rho^{i}_{12} [E(1) - E(2)] = 0 \qquad \text{и}$$

$$\sum_{3} [\lambda^{j}_{13}\rho^{i}_{32} + \lambda^{j}_{23}\rho^{i}_{31}] = \sum_{3} [\lambda^{j*}_{31}\rho^{i}_{32} + \lambda^{j*}_{32}\rho^{i}_{31}] = 0. \tag{7}$$

Оба условия (7) будут выполняться, если ρ_{12} спаривает частицы в S-состоянии и не зависит от радиального квантового числа, а λ_{13} соответствует четному мультиполю с нулевой проекцией и симметричио по радиальному квантовому чнслу. Существует определенная связь между условиями (7) и инвариантностью линеаризованного гамильтониана относительно отражения времени[1,4].

Если имеет место (4), то энергии одночастичных возбуждений равны

$$\tilde{\tilde{E}}(4) = [\Omega^2(4) + |\nu(4)|^2]^{1/2}, \tag{8}$$

а корреляционные функции имеют вид[x)]:

$$\begin{aligned} \langle a^+(1)\, a(2)\rangle &= \tfrac{1}{2}\,\delta_{12} - \tfrac{1}{2}\sum_{4} C^*_{14} C_{24}\frac{\Omega(4)}{\tilde{\tilde{E}}(4)} \equiv F(12), \\ \langle a^+(1)\, a^+(2)\rangle &= \tfrac{1}{2}\sum_{4} C^*_{14} C^*_{2\bar{4}}\frac{\nu^*(4)}{\tilde{\tilde{E}}(4)} \equiv \Phi^*(21). \end{aligned} \tag{9}$$

Напомним еще условие самосогласованности для $\langle R\rangle$, когда имеется только одна матрица ρ. Оно имеет вид:

$$|\langle R\rangle|^2 = \frac{1}{2A}\sum_{4}\frac{|\nu(4)|^2}{E(4)}. \tag{10}$$

Применим к рассмотренным системам метод самосогласованного поля[2,5]. Для этой цели проварьируем корреляционные функции, прибавив к ним малый член, зависящий от времени, и требуя, чтобы существовала та же связь между $F' = F + \delta F$ и $\Phi' = \Phi + \delta\Phi$, что и между F и Φ. Этот факт можно записать в виде:

$$\begin{aligned} &\delta\sum_{3} [F(13)\, F(32) + \Phi^*(31)\,\Phi(32)] = \delta F(12), \\ &\delta\sum_{3} [F(13)\,\Phi^*(32) + F(23)\,\Phi^*(31)] = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

---

x) В отличие от работы[1] мы рассматриваем систему при нулевой температуре.

причем δF будет эрмитовской, а $\delta \Phi$ – антисимметричной матрицей. Определив $\delta \phi(56)$ и $\delta f(56)$ при помощи соотношений

$$\delta \Phi(12) = \sum_{56} C_{15} C_{26} \, \delta \phi(56) \quad \text{и}$$

$$\delta F(12) = \sum_{56} C^*_{15} \, C_{26} \, \delta f(56),$$

можем получить из (11), используя (9), связь между δf и $\delta \phi$. Умножая первое и второе из соотношений (11) соответственно на $C_{17} \, C^*_{28}$ и $C_{17} \, C_{28}$ и суммируя по "1" и "2", получим

$$\delta f(78) \left[\frac{\Omega(7)}{\tilde{E}(7)} + \frac{\Omega(8)}{\tilde{E}(8)} \right] = \frac{\nu^*(7)}{\tilde{E}(7)} \, \delta \phi(7\bar{8}) + \frac{\nu(8)}{\tilde{E}(8)} \, \delta \phi^*(\bar{8}7), \tag{12}$$

$$\delta \phi^*(78) \left[\frac{\Omega(7)}{\tilde{E}(7)} - \frac{\Omega(8)}{\tilde{E}(8)} \right] = \frac{\nu^*(7)}{\tilde{E}(7)} \, \delta f(8\bar{7}) + \frac{\nu^*(8)}{\tilde{E}(8)} \, \delta f(7\bar{8}).$$

Ясно, что соотношения (12), аналогичные соотношениям работы /5/, зависимы друг от друга.

В связи с формулами (7) должна быть нулевой вариация выражения (4). Подставив выражения (5) и (6) для K и P^* в проварьированное выражение (4), после аналогичного преобразования получим

$$\delta \tilde{P}^*_{56} \left[\Omega(5) - \Omega(6) \right] + \delta \tilde{\Lambda}'_{5\bar{6}} \, \nu^*(6) + \delta \tilde{\Lambda}'_{65} \, \nu^*(5) = 0, \tag{13}$$

где

$$\delta \tilde{P}^*_{56} = \sum_{34} C_{35} \, \delta P^*_{34} \, C_{46}; \qquad \delta \tilde{\Lambda}'_{56} = \sum_{34} C_{35} \, \delta \Lambda_{34} \, C^*_{46}.$$

При выводе формулы (13) использовалось очевидное равенство $\delta K = -\delta \Lambda$. Уравнения самосогласованного поля, линеаризованные по приращениям $\delta \Phi$, δF, запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
\left[i \frac{d}{dt} - E(1) - E(2) \right] \delta \Phi(12) = &- \sum_3 \left[\Lambda_{23} \delta \Phi(13) + \Lambda_{13} \delta \Phi(32) \right] \\
&- \sum_3 \left[P_{32} \, \delta F(31) - P_{31} \, \delta F(32) \right] + \delta P_{12} - \sum_3 \left[\delta \Lambda_{23} \Phi(13) + \delta \Lambda_{13} \Phi(32) \right] \\
&- \sum_3 \left[\delta P_{32} \, F(31) - \delta P_{31} \, F(32) \right],
\end{aligned} \tag{14а}$$

$$\begin{aligned}
\left[i \frac{d}{dt} + E(1) - E(2) \right] \delta F(12) = &- \sum_3 \left[\Lambda_{23} \delta F(13) - \Lambda_{31} \delta F(32) \right] \\
&- \sum_3 \left[P_{23} \, \delta \Phi^*(31) + P^*_{31} \delta \Phi(32) \right] - \sum_3 \left[\delta \Lambda_{23} F(13) - \delta \Lambda_{31} F(32) \right] \\
&- \sum_3 \left[\delta P_{23} \, \Phi^*(31) + \delta P^*_{31} \, \Phi(32) \right].
\end{aligned} \tag{14б}$$

Выражая $\delta \Phi$ и δF через $\delta \phi$ и δf и используя уравнения (5) и формулы (6), (9), а затем умножая уравнения (14а) и (14б) на $C^*_{16}\ C^*_{27}$ и $C_{16}\,C^*_{27}$, соответственно, и суммируя по "1" и "2", нетрудно получить

$$\left[i\frac{d}{dt} - \Omega(6) - \Omega(7) \right] \delta\phi\,(67) = \nu(7)\,\delta f\,(\bar{7}\bar{6}) - \nu(6)\,\delta f\,(\bar{6}\bar{7})$$
$$-\tfrac{1}{2}\left[\delta\tilde{\Lambda}_{67}\frac{\nu(7)}{E(7)} - \delta\tilde{\Lambda}_{76}\frac{\nu(6)}{E(6)} \right] + \tfrac{1}{2}\,\delta\tilde{P}_{67}\left[\frac{\Omega(6)}{\tilde{E}(6)} + \frac{\Omega(7)}{\tilde{E}(7)} \right], \tag{15а}$$

$$\left[i\frac{d}{dt} + \Omega(6) - \Omega(7) \right] \delta f\,(67) = \nu^*(6)\,\delta\phi\,(\bar{6}\bar{7}) - \nu(7)\,\delta\phi^*\,(\bar{7}\bar{6})$$
$$-\tfrac{1}{2}\,\delta\tilde{\Lambda}_{76}\left[\frac{\Omega(7)}{\tilde{E}(7)} - \frac{\Omega(6)}{\tilde{E}(6)} \right] - \tfrac{1}{2}\left[\delta\tilde{P}_{76}\frac{\nu^*(6)}{\tilde{E}(6)} + \delta\tilde{P}^*_{\bar{7}6}\frac{\nu(7)}{\tilde{E}(7)} \right], \tag{15б}$$

где $\delta\tilde{\Lambda}_{76} = \sum\limits_{46} C^*_{47}\,\delta\Lambda_{45}C_{56}$.

Если исключить δf из уравнения (15а), применяя первую из формул (12), то получим:

$$\left[i\frac{d}{dt} - L_{67} \right] \delta\phi\,(67) = M_{67}\,\delta\phi^*\,(\bar{6}\bar{7}) + Q_{67}, \tag{16}$$

где $L_{67} = \chi(67)\left[\tilde{E}(6) + \tilde{E}(7) \right]\left[1 + \frac{\Omega(6)}{\tilde{E}(6)}\ \frac{\Omega(7)}{\tilde{E}(7)} \right] = L_{76} = L_{\bar{7}6} = L^*_{76}$,

$$M_{67} = \chi(67)\left[\tilde{E}(6) + \tilde{E}(7) \right]\frac{\nu(6)}{\tilde{E}(6)}\ \frac{\nu(7)}{\tilde{E}(7)} = M_{76} = -M_{\bar{7}6},$$

$$\chi(67) = \left[\frac{\Omega(6)}{\tilde{E}(6)} + \frac{B\Omega(7)}{\tilde{E}(7)} \right]^{-1},$$

$$Q_{67} = \tfrac{1}{2}\,\delta\tilde{P}_{67}\left[\frac{\Omega(6)}{\tilde{E}(6)} + \frac{\Omega(7)}{\tilde{E}(7)} \right] - \tfrac{1}{2}\left[\delta\tilde{\Lambda}_{67}\frac{\nu(7)}{\tilde{E}(7)} - \delta\tilde{\Lambda}_{76}\frac{\nu(6)}{\tilde{E}(6)} \right].$$

Из (16) непосредственно получаем:

$$\left[i\frac{d}{dt} + L_{67} \right] \delta\phi^*\,(\bar{6}\bar{7}) = -M^*_{67}\ \delta\phi\,(67) - Q^*_{\bar{6}\bar{7}}. \tag{17}$$

Нетрудно убедиться, что выражение δf через $\delta\phi$ в уравнении (15б) приводит к тождеству относительно уравнений (16) и (17). Вернемся к определению матриц $\delta\tilde{\Lambda}$ и $\delta\tilde{P}$. Имеем $\delta\tilde{\Lambda}_{13} = \sum\limits_{i}^{k}\left[\tilde{\lambda}^{i}_{13}\ \delta\langle L_i\rangle^* + \tilde{\lambda}^{i*}_{31}\ \delta\langle L_i\rangle \right]$, где

$$\delta\langle L_i\rangle = \frac{1}{A}\sum_{45}\lambda^{i}_{45}\,\delta F(45) = \frac{1}{A}\sum_{45}\tilde{\lambda}^{i}_{45}\,\delta f\,(45),\quad \tilde{\lambda}^{i}_{45} = \sum_{12} C^*_{14}\,\lambda^{i}_{12}\,C_{25}. \tag{18}$$

Аналогично можем написать:

$$\delta\tilde{P}_{13} = \sum_{i}^{n}\tilde{\rho}^{i*}_{31}\ \delta\langle R_i\rangle,\quad \delta\langle R_i\rangle = \frac{1}{A}\sum_{45}\rho^{i}_{45}\,\delta\Phi(45) = \frac{1}{A}\sum_{45}\tilde{\rho}^{i}_{45}\,\delta\phi_{,}(45)$$
$$\tilde{\rho}^{i}_{45} = \sum_{12} C_{12}\,\rho^{i}_{12}\,C_{25}. \tag{19}$$

Если перейти к фурье-представлению в уравнениях (16) и (17), то получим:

$$[E - L_{67}]\,\delta\phi(67) = M_{67}\,\delta\overset{\circ}{\phi}(67) + Q_{67}\,,$$

$$[E + L_{67}]\,\delta\overset{\circ}{\phi}(67) = -M_{67}\,\delta\phi(67) - \overset{\circ}{Q}_{\bar{6}\bar{7}}\,, \tag{20}$$

где $\overset{\circ}{f}(E) \equiv f^*(-E)$. Как видно, решения уравнений (20) всегда можно выразить через приращения средних $\delta\langle L_i\rangle$, $\delta\langle R_i\rangle$, $\delta\langle\overset{\circ}{L}_i\rangle$, $\delta\langle\overset{\circ}{R}_i\rangle$. Затем можно представить эти решения в определение приращений средних (18) и (19), используя формулу (12). Условие размерности полученной однородной системы, линейной по приращениям средних, дает уравнение дисперсии. Таким образом, мы показали, что из уравнений самосогласованного поля уравнение дисперсии в замкнутой форме можно получить не только тогда, когда для решения одночастичной задачи применяется специальное преобразование Боголюбова (см./5/).

Рассмотрим теперь следствия ограничений, наложенных на матрицы ρ и λ. Если все матрицы λ будут действительны и симметричны, то матрица Λ, а следовательно, и K будут иметь тот же характер. Поэтому диагонализация K не требует унитарной группы; достаточно применить ортогональную группу. В этом случае $\delta\tilde{\Lambda}'$ совпадает с $\delta\tilde{\Lambda}$ и становится действительным и симметричным. Все это совместно с соотношением (13) позволяет нам упростить формулу для Q_{67}. Если предположить, что уровни Ω вырождены лишь дважды x), то в случае, когда $5 \neq \bar{6}$ (см. (13)), можно выразить $-\delta\tilde{P}$ через $\delta\tilde{\Lambda}$, если же $5 = \bar{6}$ – получить соотношение $\delta\tilde{\Lambda}_{55} = \delta\tilde{\Lambda}_{\bar{5}\bar{5}}$. Используя полученные таким образом формулы, можно написать уравнения (20) при $6 \neq \bar{7}$ в той же форме, но со значительным упрощением Q_{67}:

$$Q_{67} = \tfrac{1}{2}\,[\tilde{E}(6) + \tilde{E}(7)]\,[\Omega(7) - \Omega(6)]^{-1}\left[\frac{\nu(7)}{\tilde{E}(7)}\,\frac{\Omega(6)}{\tilde{E}(6)}\,\delta\tilde{\Lambda}_{7\bar{6}} + \frac{\nu(6)}{\tilde{E}(6)}\,\frac{\Omega(7)}{\tilde{E}(7)}\,\delta\tilde{\Lambda}_{6\bar{7}}\right], \tag{21}$$

откуда $Q_{67} = -Q_{76}$. Аналогично этому уравнения для $\delta\phi(5\bar{5})$ и $\delta\overset{\circ}{\phi}(5\bar{5})$ запишутся в виде:

$$\left[E - \Omega(5) - \frac{\tilde{E}^2(5)}{\Omega(5)}\right]\delta\phi(5\bar{5}) = \frac{\nu^2(5)}{\Omega(5)}\,\delta\overset{\circ}{\phi}(5\bar{5}) + \frac{\Omega(5)}{\tilde{E}(5)}\,\delta\tilde{P}_{5\bar{5}}\,,$$

$$\left[E + \Omega(5) + \frac{\tilde{E}^2(5)}{\Omega(5)}\right]\delta\overset{\circ}{\phi}(5\bar{5}) = -\frac{[\nu^2(5)]^*}{\Omega(5)}\,\delta\phi(5\bar{5}) - \frac{\Omega(5)}{\tilde{E}(5)}\,\delta\overset{\circ}{\tilde{P}}_{5\bar{5}}\,, \tag{22}$$

откуда

$$\delta\phi(5\bar{5}) = [E^2 - 4\tilde{E}^2(5)]^{-1}\left\{\left[\frac{\Omega^2(5)}{\tilde{E}(5)} + \frac{E\Omega(5)}{\tilde{E}(5)} + \tilde{E}(5)\right]\delta\tilde{P}_{5\bar{5}} - \frac{\nu^2(5)}{\tilde{E}(5)}\,\delta\overset{\circ}{\tilde{P}}_{5\bar{5}}\right\},$$

x) Рассмотрение более общего случая не составляет труда.

а решение для $\delta\overset{\circ}{\phi}(5\bar{5})$ легко получить из $\delta\phi(5\bar{5})$. Если имеется только одна матрица ρ, то $P = \langle R\rangle\rho^+$ и, как нетрудно убедиться, $\delta\overset{\approx}{P}_{81} = -\frac{\nu(3)\delta_{18}}{A|\langle R\rangle|^2}\sum_4 \nu^*(4)\delta\phi(4\bar{4})$.

В этом случае решения (22) зависят от $D \equiv \Sigma\,\nu^*(4)\,\delta\phi(4\bar{4})$ $\overset{\circ}{D}$. Подставив полученные решения для $\delta\phi(5\bar{5})$ и $\delta\overset{\circ}{\phi}(55)$ в D, $\overset{\circ}{D}$, получим систему двух однородных линейных уравнений по этим переменным с условием разрешимости:

$$\zeta\left\{\frac{1}{2A}\sum_5\frac{|\nu(5)|^2\Omega(5)}{\overset{\approx}{E}(5)[\overset{\approx}{E}^2(5)-\zeta]}\right\}^2 = \left\{\frac{1}{2A}\sum_5\frac{|\nu(5)|^2\Omega^2(5)}{\overset{\approx}{E}(5)[\overset{\approx}{E}^2(5)-\zeta]} - |\langle R\rangle|^2\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{2A}\sum_5\frac{|\nu(5)|^2\,\overset{\approx}{E}(5)}{\overset{\approx}{E}^2(5)-\zeta} - |\langle R\rangle|^2\right\};\qquad \zeta = E^2/4\,. \tag{23}$$

Из формулы (10) следует, что (23) удовлетворяется при нулевом ζ. Если разделить обе стороны (23) на квадрат суммы из левой части, то полученное таким образом уравнение выполняется также при $\zeta = \overset{\approx}{E}^2(5)$, если $\overset{\approx}{E}(5)$, за исключением $\overset{\approx}{E}(5) = \overset{\approx}{E}(\bar{5})$ не вырождено. Легко убедиться, что при $\zeta \to \overset{\approx}{E}^2(5)$ (23) имеет особенность. Посложнее обстоит дело, если $\overset{\approx}{E}(5)$ добавочно вырождено. Это особенно сильно сказывается на левой части (23), поскольку полюсные члены в ней обоих знаков.

Из (8) и (10) легко заметить, что второй сомножитель правой части положителен при положительном ζ левее первого полюса и в то же время первый сомножитель отрицателен при достаточно малых ζ. Поэтому (23) может иметь решение правее нуля первого сомножителя. Приравняв его к нулю и применив (8) и (10), получим

$$\frac{1}{2A}\sum_5\frac{|\nu(5)|^2}{\overset{\approx}{E}(5)}\left[\frac{|\nu(5)|^2-\zeta_0}{\overset{\approx}{E}^2(5)-\zeta_0}\right] = 0 \tag{24}$$

и $\zeta \geq \zeta_0$. Если $|\nu(5)| = \Delta$ внутри некой области $\overset{\approx}{E}(5) < \omega$ и равна нулю вне ее, то решением (24) будет $\zeta_0 = \Delta^2$; это доказывает, что (23) не имеет решений ниже энергетической щели. Следует заметить, что если $|\nu(5)|$ симметрично относительно поверхности Ферми, а $\Omega(5)$ антисимметрично там, где $|\nu(5)| \neq 0$, то левая часть (23) исчезает и решения (23) левее первого полюса будут даны формулой (24).

Если имеется только одна матрица ρ, пропорциональная $\delta_{1\bar{2}}$, где $\bar{2}$ на этот раз – состояние, обращенное во времени по отношению к 2, и произвольное число матриц λ, диагональных по 1,2 и инвариантных относительно обращения времени x), то интегралом движения будет старшинство (seniority). Тогда $\delta\Phi(5\bar{5}) = \delta\phi(5\bar{5})$

---
x) Случай, когда среди матриц λ есть "нечетные" относительно отражения времени, будет рассмотрен в другой работе.

будут единственными неисчезающими приращениями Φ. В связи с этим для такой системы мы можем получить лишь одно уравнение дчсперсии (23), решения которого, как мы доказали, лежат в сужающейся с увеличением A полосе около Δ^2.

Этот результат находится в противоречии с результатом Беляева /6/. Стоит заметить, что в методе самосогласованного поля содержится меньший произвол, чем при введении неравновесных средних значений, как это сделано в /6/. С другой стороны, в микроскопической теории /6/ одночастичные и двухчастичные функции соответствуют различным гамильтонианам. Это, по-видимому, является источником неадитивности энергии.

Перейдем теперь к рассмотрению уравнения дисперсии при $6 \neq \bar{7}$, когда имеется только одна матрица λ, действительная и симметричная. В этом случае на основе (5) и (18) имеем:

$$\tilde{\lambda}_{13} = \frac{1}{\langle L \rangle} \{ \sum_6 E(6)\, C_{61} C_{63} - \Omega(3)\, \delta_{13} \} \; ; \qquad (25)$$

применив (25) к (18), получим

$$\delta \tilde{\Lambda}_{13} = B \{ \sum_6 E(6)\, C_{61} C_{63} - \Omega(3)\, \delta_{13} \} ,$$

$$B = \frac{1}{A |\langle L \rangle|^2} \sum_6 [E(6)\, \delta F(66) - \Omega(6)\, \delta f(66)] . \qquad (26)$$

Как видно из (12), $\delta f(66)$ выражается через $\delta \phi(6\bar{6})$ и $\delta \mathring{\phi}(6\bar{6})$. Мы показали что эти функции могут быть отличнымн от нуля левее первого полюса лишь при нулевом ζ и при ζ больше Δ^2. Поэтому в (26) мы можем везде положить $\delta f(66)=0$, поскольку мы ищем возбуждения в энергетической щели. Учтя вышесказанное, можем написать $\delta \tilde{\Lambda}_{13}$, нужное нам в уравнении (20), в виде:

$$\delta \tilde{\Lambda}_{13} = B E_{13} ; \qquad B = \frac{1}{|\langle L \rangle|^2 A} \sum_{13}{}' E_{13}\, \delta f(13); \qquad E_{13} = \sum_6 E(6)\, C_{61} C_{63} , \qquad (27)$$

где штрих над суммой обозначает ограничение суммирования: $1 \neq 3$, $1 \neq \bar{3}$. Нетрудно убедиться, используя симметрию и действительность E_{13}, что $\mathring{B} = B$. Поэтому мы можем переписать систему (20) в виде:

$$[E - L_{67}]\, \delta\phi(67) - M_{67}\, \delta \mathring{\phi}(\bar{6}\bar{7}) = -\frac{B}{2} [\tilde{E}(6) + \tilde{E}(7)][\Omega(6) - \Omega(7)]^{-1} S_{67} ,$$

$$M^*_{67}\, \delta\phi(67) + [E + L_{67}]\, \delta \mathring{\phi}(\bar{6}\bar{7}) = \frac{B}{2} [\tilde{E}(6) + \tilde{E}(7)] [\Omega(6) - \Omega(7)]^{-1} S^*_{\bar{6}\bar{7}} ,$$

где

$$S_{67} = [E_{67} \frac{\nu(6)}{\tilde{E}(6)} \frac{\Omega(7)}{\tilde{E}(7)} + E_{76} \frac{\nu(7)}{\tilde{E}(7)} \frac{\Omega(6)}{\tilde{E}(6)}] .$$

Решения этой системы уравнений даются формулами:

$$\delta\phi(67) = B\psi(67)\,[\,M_{67}S^{*}_{\overline{67}} - L_{67}S_{67} - E\,S_{67}\,]\,, \tag{28}$$

$$\delta\overset{\circ}{\phi}(67) = B\psi_{E}(67)\,[\,M^{*}_{67}S_{67} - L_{67}S^{*}_{\overline{67}} + E\,S^{*}_{\overline{67}}\,]\,,$$

где

$$\Psi^{-1}_{E}(67) = 2[\Omega(6) - \Omega(7)]\,\{E^{2} - [\tilde{E}(6) + \tilde{E}(7)]^{2}\}\,[\tilde{E}(6) + \tilde{E}(7)]^{-1},$$

Применив формулу (12) ко второй из формул (27), получим:

$$B = \frac{1}{|\langle L\rangle|^{2}A}\sum_{13}{}' E_{13}\,\chi(13)\,[\,\frac{\nu^{*}(1)}{\tilde{E}(1)}\,\delta\phi(\overline{1}3) + \frac{\nu(3)}{\tilde{E}(3)}\,\delta\overset{\circ}{\phi}(31)\,].$$

Подставив в эту формулу решения (28), получим уравнение дисперсии. После длинных, но несложных преобразований можем написать при действительном ν :

$$|\langle L\rangle|^{2} = \frac{1}{2A}\sum_{13}{}' \frac{E^{2}_{13}[\tilde{E}(1) + \tilde{E}(3)]^{2}\,[\frac{\Omega(1)}{\tilde{E}(1)} - \frac{\Omega(3)}{\tilde{E}(3)}]}{\{[\tilde{E}(1) + \tilde{E}(3)]^{2} - E^{2}\}\,[\Omega(1) - \Omega(3)]}\,. \tag{29}$$

Это уравнение можно переписать в более стандартном виде, учтя, что на основе (25) при $1\neq 3$ $E^{2}_{13}|\langle L\rangle|^{-2} = (\tilde{\lambda}_{13})^{2}$. Уравнение (29) имеет корень также налево от $\underset{1\neq a,\bar{a}}{\mathrm{Min}}\,[\tilde{E}(1) + \tilde{E}(3)]$, если только

$$\frac{1}{2A}\sum_{13}{}' E^{2}_{13}\frac{[\frac{\Omega(1)}{\tilde{E}(1)} - \frac{\Omega(3)}{\tilde{E}(3)}]}{[\Omega(1) - \Omega(3)]} < |\langle L\rangle|^{2}\,. \tag{30}$$

Рассматриваемая процедура может служить для уменьшения числа параметров при построении теории деформированных ядер. Если уровни гамильтониана невзаимодействующих частиц будут уровнями теории оболочек с осцилляторным потенциалом, сдвинутыми на величину $\approx j(j+1)$, и если к такому гамильтониану прибавить квадруполь-квадрупольную часть с нулевой прекцией и парный гамильтониан, то (5) будет уравнением модели Нильссона с одним параметром, который надо определить самосогласованным образом. Решая в этом случае одночастичную задачу, мы можем определить все параметры, входящие в уравнение (29).

Проведенное нами исследование напоминает во многом работу [5]. Существенным отличием здесь является применение общего преобразования Боголюбова для одночастичной задачи и более детальный учет вариации δP, благодаря чему прибавление постоянного диагонального члена к матрице λ приводит в уравнении (29) лишь к перенормировке химического потенциала. Мы не в состоянии сделать заключение относительно асимптотических свойств коллективных уровней, как это сделано в негативном смысле для гамильтониана БКШ в [7]. Однако в данном случае обнадеживает полное согласие (23) с оценками [7] для гамильтониана БКШ, и мы надеемся рассмотреть эту проблему в некоторых частных случаях.

Автор искренне благодарен Н.Н.Боголюбову и В.Г.Соловьеву за полезные дискуссии и стимулирующие советы.

Литература

1. Е.Червонко. Препринт ОИЯИ, Р-1744, Дубна, 1964.
2. Н.Н.Боголюбов. УФН, XVII , 549 (1959).
3. C.Bloch, A.Messiah. Nucl. Phys. , 39, 95 (1962).
4. F.J.Dyson. Journ. Math. Phys., 3, 140 (1962).
5. S.T.Belyaev. Из книги "Selected Topics in Nuclear Theory". Вена, 1963.
6. С.Т.Беляев. ЖЭТФ, 39, 1389 (1960).
7. Н.Н.Боголюбов. Препринт ОИЯИ, Р-511, Дубна, 1960.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 сентября 1964 г.