ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 1822

В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

О ТЕОРИЯХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОЛЕЙ СО СПИНОМ 1

1964

Р - 1822

В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов

О ТЕОРИЯХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОЛЕЙ СО СПИНОМ 1

Направлено в Nuclear Physics

1. Введение

В теориях Янга-Миллса [1-5] взаимодействующие векторные поля переносят спин 1 [6]. Требование, чтобы векторное поле переносило спин 1, может служить принципом для построения взаимодействий. Перечисление на основе этого принципа всех теорий векторных полей со спином 1 было дано в [7]. При этом обнаружилась важная динамическая роль спина. Требование, чтобы векторные поля обладали спином 1, порождало симметрии, отвечающие сохранению зарядов (электрического, барионного и др.), симметрии типа изотопической, $SU(3)$ и т.д. Таким образом, и эти законы сохранения оказались связанными с пространством-временем, а именно, с пространственно-временным свойством векторных полей обладать спином 1. Все полученные теории в пределе нулевых масс векторных полей переходят в теории Янга-Миллса с их калибровочными инвариантностями. Однако способ вывода в [7] был чересчур прямолинейным, громоздким и недопускающим обобщения на высшие спины.

В настоящей статье будет дан другой более общий и простой вывод симметрий в теориях векторных полей со спином 1 и соответствующих взаимодействий. Этот вывод существенным образом связан с вариационным принципом и со второй теоремой Э.Нетер [8]. Так, ниже показано, что для исключения лишних (описывающих степени свободы со спином 0) составляющих векторных полей должно выполняться некоторое тождество типа тех, которые обсуждаются в теореме Нетер, а отсюда следует инвариантность. Вывод позволяет с самого начала проследить связь общих теорий взаимодействующих векторных полей со спином 1 с теориями Янга-Миллса. Он допускает обобщение на поля с высшими спинами.

2. Общий подход

Взаимодействующее векторное поле описывает только спин 1, если из уравнений движения следует [6]

$$m^2 \partial_\mu b_\mu = 0 \qquad (1)$$

т.е. массивные поля должны подчиняться условию Лоренца, тогда как в случае нулевой массы на $\partial_\mu b_\mu$ нет ограничений, $\partial_\mu b_\mu$ произвольно.

Пусть имеется некоторое число n векторных b^i_μ $(i=1\cdots n)$, m спинорных ψ^r $(r=1\cdots m)$ и ℓ скалярных φ^a $(a=1\cdots \ell)$ полей. Выделим из полного лагранжиана системы взаимодействующих полей массовый член векторных полей

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \frac{1}{2} b^i_\mu m^2_{ij} b^j_\mu \qquad (2)$$

Тогда уравнения Эйлера для векторных полей запишутся

$$\frac{\delta \mathcal{L}'}{\delta b^i_\mu} - \partial_\nu \frac{\delta \mathcal{L}'}{\delta \partial_\nu b^i_\mu} - m^2_{ij} b^j_\mu = 0 \qquad (3)$$

Отсюда следует, что[ж)]

$$m^2_{ij}\partial_\mu B^j_\mu = \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta B^i_\mu} - \partial_\nu \frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_\nu B^i_\mu}\right) \tag{4}$$

Для того, чтобы из (4) вытекало условие (I), необходимо, чтобы правая часть (4) обращалась в ноль либо тождественно либо вследствие уравнений движения. Это означает, что ещё до того, как поля подчинены уравнениям Эйлера должно иметь место некоторое тождество типа

$$\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta B^i_\mu} - \partial_\nu \frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_\nu B^i_\mu}\right) = \left(\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta B^i_\mu} - \partial_\nu \frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_\nu B^i_\mu} - m^2_{i\ell} B^\ell_\mu\right)\alpha_{ijk} B^k_\mu -$$

$$-i\left(\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\Psi} - \partial_\nu\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_\nu\Psi}\right)\left(\hat{T}^{(1)}_j + \gamma_5\hat{T}^{(2)}_j\right)\Psi + \left(\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\varphi^a} - \partial_\nu\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_\nu\varphi^a}\right)\eta^j_{ab}\varphi^b \tag{5}$$

(Тождественному обращению в нуль правой части (4) соответствуют $\alpha = T^{(1)} = T^{(2)} = \eta = 0$). Чтобы не иметь дела порознь со спинорами ψ и $\bar{\psi}$ в (5) введен спинор удвоенной размерности

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\psi + \psi_c \\ i(\psi - \psi_c)\end{pmatrix}\ ;\ \psi = \begin{pmatrix}\psi^1 \\ \vdots \\ \psi^m\end{pmatrix}\ ; \qquad \bar{\Psi} = \Psi C^{-1} \tag{6}$$

Правая часть тождества (5) построена из эйлерианов всех полей с тем, чтобы она обращалась в нуль при выполнении уравнений движения. Сделано предположение, что входящие в коэффициенты при эйлерианах величины α_{ijk}, $\hat{T}^{(1)}_j + \gamma_5\hat{T}^{(2)}_j$, η^j_{ab} суть некоторые операторы (матрицы), состоящие из безразмерных констант. Это допущение, как мы увидим, ведет к взаимодействиям с безразмерными константами связи.

Если бы мы заменили коэффициенты в (5) более общими выражениями, содержащими размерные параметры и те или иные поля, то мы пришли бы к другим взаимодействиям с размерными константами связи.

Отметим ещё, что в тождестве (5) имеется единственный член вида $\alpha_{ijk} B^j_\mu m^2_{k\ell} B^\ell_\mu$, а поэтому он должен равняться нулю сам по себе, т.е. должно выполняться равенство

$$\alpha_{ijk} m^2_{i\ell} + \alpha_{ij\ell} m^2_{ik} = 0 \tag{7}$$

Вернемся к обсуждению тождества (5). После исключения массового члена в тождестве (5) входит только $\mathcal{L}'$, и оно означает инвариантность $\mathcal{L}'$ относительно преобразований, инфинитезимальный вид которых записывается

$$\delta B^i_\mu = \partial_\mu\lambda^i + \alpha_{ijk}\lambda^j B^k_\mu \tag{8}$$

$$\delta\Psi = -i\left(\hat{T}^{(1)}_j + \gamma_5\hat{T}^{(2)}_j\right)\lambda^j\Psi \tag{9}$$

$$\delta\varphi^a = \eta^j_{ab}\lambda^j\varphi^b \tag{10}$$

[ж)] Равенство (4) может быть получено отдельно от уравнений движения, если варьировать лагранжиан на специальном классе вариаций вида $\delta B^i_\mu = \partial_\mu\lambda^i(x)$, где $\lambda^i(x)$ $(i = 1 \cdots n)$ - произвольные функции.

где λ^j - произвольные функции. Обратно, из инвариантности $\mathcal{L}'$ относительно (8)-(10) следует тождество (5). Прямое и обратное утверждения представляют частный случай второй теоремы Э. Нетер[8].

Вследствие инвариантности $L'=\int d^4x\,\mathcal{L}(x)$ относительно таких преобразований, вариация полного лагранжиана при вариациях полей согласно (8)-(10) оказывается равной

$$\delta\int d^4x\,\mathcal{L}(x)=\int d^4x\; m^2_{ij}\,b^i_\mu\,\partial_\mu\lambda^j \tag{11}$$

Таким образом, мы пришли к желаемому результату, так как из (11) сразу же следует равенство (1). Из (11) видно, что полный лагранжиан при $m^2_{ij}=0$ инвариантен относительно преобразований (8)-(10) с совершенно произвольными функциями λ^j. Таким образом, в теориях, в которых виртуальные векторные кванты имеют только спин 1, в пределе нулевой массы векторного поля обязательно возникает калибровочная инвариантность. В то же время такие теории при любых массах m^2_{ij} должны быть инвариантны относительно преобразований (8)-(10) с $\lambda_j=\text{const}$.

Таким образом, для исключения спина 0 у векторных полей с любой массой необходимо добиться инвариантности $\mathcal{L}'$ относительно специального класса вариаций, произвольно изменяющих составляющую b^i_μ со спином 0 и потому её обезвреживающих*).

3. Групповое свойство преобразований

Теперь мы докажем, что вариации (8)-(10), и, в частности, вариация (8) гарантирующая спин 1 у векторного поля, должны образовать группу. Инвариантность относительно преобразований (8)-(10) означает, что

$$\delta_{\lambda_1}L'=\int d^4x\Big[\Big(\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta b^i_\mu}+\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_\nu b^i_\mu}\partial_\nu\Big)\big(\partial_\mu\lambda^i_1+\alpha_{ijk}\lambda^j_1 b^k_\mu\big)-$$

$$-i\Big(\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\Psi}+\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_\nu\Psi}\partial_\nu\Big)\big(\hat{T}^{(1)}_j+\gamma_5\hat{T}^{(2)}_j\big)\lambda^j_1\Psi+\Big(\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\varphi^a}+\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_\nu\varphi^a}\partial_\nu\Big)\eta^j_{a\ell}\lambda^j_1\varphi^\ell\Big]=0 \tag{12}$$

Проварьируем теперь (12), подвергнув поля вариациям (8)-(10) с функциями λ^i_2, отличными от λ^i_1, тогда мы получим равенство $\delta_{\lambda_2}\delta_{\lambda_1}L'=0$. Вычитая из него равенство $\delta_{\lambda_1}\delta_{\lambda_2}L=0$, мы получим (операция $\delta_{\lambda_2}\delta_{\lambda_1}-\delta_{\lambda_1}\delta_{\lambda_2}$ - есть скобочная операция Софуса Ли)

---

*) Проиллюстрируем, что при преобразовании (8) действительно произвольно изменяется $\partial_\mu b^i_\mu$. Имеем

$$\partial_\mu b'^i_\mu=\partial_\mu b^i_\mu+\Box\lambda^i+\alpha_{ijk}(\partial_\mu\lambda^j b^k_\mu)+\cdots$$

Теперь разлагая λ^i по степеням α, $\lambda^i=\lambda^i_{(0)}+\lambda^i_{(1)}+\lambda^i_{(2)}+\cdots$, мы можем подчинить $\lambda^i_{(1)}$, $\lambda^i_{(2)}$ ... уравнениям

$$\Box\lambda^i_{(1)}+\alpha_{ijk}\partial_\mu(\lambda^j_{(0)}b^k_\mu)=0\;;\;\Box\lambda^i_{(2)}+\cdots=0\;;\;\ldots$$

При этом $\lambda^i_{(0)}$ остается совершенно произвольной функцией, что и говорит о произвольности $\partial_\mu b^i_\mu$.

$$(\delta_{\lambda_2}\delta_{\lambda_1}-\delta_{\lambda_1}\delta_{\lambda_2})L' = \int d^4x \left\{\left(\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta b^i_\mu}+\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_\nu b^i_\mu}\partial_\nu\right)\left[\alpha_{ijk}(\lambda^j_1\partial_\mu\lambda^k_2-\lambda^j_2\partial_\mu\lambda^k_1)+[\alpha_j,\alpha_k]_{im}\lambda^j_1\lambda^k_2 b^m_\mu\right]\right.$$

$$-\left(\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\Psi}+\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_\nu\Psi}\partial_\nu\right)[\hat{T}^{(1)}_j+\gamma_5\hat{T}^{(2)}_j,\hat{T}^{(1)}_k+\gamma_5\hat{T}^{(2)}_k]\lambda^j_1\lambda^k_2\Psi +$$

$$\left.+\left(\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\varphi^a}+\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_\nu\varphi^a}\partial_\nu\right)[\eta^j,\eta^k]_{ab}\lambda^j_1\lambda^k_2\varphi^b\right\} = 0 \qquad (13)$$

где для удобства введены матрицы $(\alpha_j)_{ik}=\alpha_{ijk}$ и $(\eta^j)_{ab}=\eta^j_{ab}$. При повторном варьировании левой части (12) возникают и вторые производные лагранжиана (например, $\frac{\delta^2\mathcal{L}'}{\delta b^i_\mu\delta b^m_\nu}$, $\frac{\delta^2\mathcal{L}'}{\delta b^i_\mu\delta\Psi}$), однако выражения, в которые они входят оказываются симметричными относительно перестановки λ_1 и λ_2, и поэтому при образовании скобочной операции выпадают.

Соотношение (13) означает, что лагранжиан наряду с инвариантностью относительно преобразований (8)-(10), инвариантен относительно преобразований

$$\begin{aligned}\delta b^i_\mu &= \alpha_{ijk}(\lambda^j_1\partial_\mu\lambda^k_2-\lambda^j_2\partial_\mu\lambda^k_1)+[\alpha_j,\alpha_k]_{im}\lambda^j_1\lambda^k_2 b^m_\mu\\ \delta\Psi &= -[\hat{T}^{(1)}_j+\gamma_5\hat{T}^{(2)}_j,\ \hat{T}^{(1)}_k+\gamma_5\hat{T}^{(2)}_k]\lambda^j_1\lambda^k_2\Psi\\ \delta\varphi^a &= [\eta^j,\eta^k]_{ab}\lambda^j_1\lambda^k_2\varphi^b\end{aligned} \qquad (14)$$

которые возникают в результате скобочной операции над преобразованиями (8)-(10).

Выберем теперь

$$\lambda^m_1=\delta_{mj}\delta^4(x-y)\ ;\quad \lambda^n_2=\delta_{nk} \qquad (15)$$

Тогда в дополнение к тождеству (5), которое может быть получено из (12), получаем тождество

$$\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta b^i_\mu}-\partial_\nu\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_\nu b^i_\mu}\right)\alpha_{ikj}+\left(\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta b^i_\mu}-\partial_\nu\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_\nu b^i_\mu}\right)[\alpha_j,\alpha_k]_{im}b^m_\mu -$$

$$-\left(\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\Psi}-\partial_\nu\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_\nu\Psi}\right)[\hat{T}^{(1)}_j+\gamma_5\hat{T}^{(2)}_j,\hat{T}^{(1)}_k+\gamma_5\hat{T}^{(2)}_k]\Psi+\left(\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\varphi^a}-\partial_\nu\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_\nu\varphi^a}\right)[\eta^j,\eta^k]_{ab}\varphi^b=0 \qquad (16)$$

Исключим член с $\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta b^i_\mu}-\partial_\nu\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_\nu b^i_\mu}\right)$ в (16) с помощью тождества (5). Тогда получим

$$\left(\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta b^i_\mu}-\partial_\nu\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_\nu b^i_\mu}\right)\left(\alpha_{\ell kj}\alpha_{i\ell m}+[\alpha_j,\alpha_k]_{im}\right)b^m_\mu +$$

$$+\left(\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\Psi}-\partial_\nu\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_\nu\Psi}\right)\left(-i\alpha_{\ell kj}(\hat{T}^{(1)}_\ell+\gamma_5\hat{T}^{(2)}_\ell)-[\hat{T}^{(1)}_j+\gamma_5\hat{T}^{(2)}_j,\hat{T}^{(1)}_k+\gamma_5\hat{T}^{(2)}_k]\right)\Psi +$$

$$+\left(\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\varphi^a}-\partial_\nu\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_\nu\varphi^a}\right)\left(\alpha_{\ell kj}\eta^\ell_{ab}+[\eta^j,\eta^k]_{ab}\right)\varphi^b=0 \qquad (17)$$

В предположении линейной независимости всех эйлерианов, получаем

$$[\alpha_j, \alpha_k] = \alpha_{\ell jk}\alpha_\ell \tag{18}$$

$$[\hat{T}_j^{(1)} + \gamma_5\hat{T}_j^{(2)}, \hat{T}_k^{(1)} + \gamma_5\hat{T}_k^{(2)}] = i\alpha_{\ell jk}(\hat{T}_\ell^{(1)} + \gamma_5 T_\ell^{(2)}) \tag{19}$$

$$[\eta^j, \eta^k] = \alpha_{\ell jk}\eta^\ell \tag{20}$$

Это означает, что матрицы α_i , $\hat{T}_i^{(1)} + \gamma_5 T_i^2$ и η^i обязаны образовывать представления алгебры Ли. Структурными константами служат элементы матрицы преобразования векторного поля α_{ijk} .

Выделим в тождестве (5) массовый член спинорных полей $-\frac{1}{2}\bar{\Psi}\hat{M}\Psi$ и массовый член скалярных полей $-\frac{1}{2}\varphi\mu^2\varphi$. Тогда в точности так же, как возникает условие (7), которое можно записать в виде:

$$[\alpha_j, m^2] = 0 \tag{21}$$

возникают также уоловия

$$[\hat{T}_i^{(1)}, \hat{M}] = 0\,;\ [\hat{T}_i^{(2)}, \hat{M}]_+ = 0\,;\ [\eta^i, \mu^2] = 0 \tag{22}$$

Таким образом, доказано, что как следствие требования, чтобы векторные поля описывали только спин I, должны выполняться соотношения структуры (I8)-(20) и ограничения на массы (2I) и (22). Все эти соотношения и отвечающие им свойства симметрии взаимодействий полей со спином I были получены нами и обсуждались в [7]. После того, как установлены симметрии, гарантирующие спин I у векторных полей, полное восстановление лагранжиана можно провести аналогично тому, как это делал Янг и Миллс, Утияма и др. (см. Приложение).

Настоящий метод в отличие от метода примененного в [7] существенно более простой и общий. Он не требует явного вида взаимодействий и позволяет проследить в общем виде, почему и как возникают симметрии типа изотопической или $SU(3)$ или симметрии, соответствующие сохранению тех или иных зарядов и связь этих симметрий с пространственно-временным свойством векторных полей [7]. Этот метод оказывается полезным при исследовании теорий полей с более высокими спинами с ограничениями на спин виртуальных квантов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Тождества, определяющие лагранжиан

Часть лагранжиана $\mathcal{L}'$, не содержащую массового члена векторных полей, можно найти , предположив, что тождество (I2) выполняется за счет того, что в (I2) тождественно равно нулю подынтегральное выражение. (Вообще говоря, оно может быть равно 4-дивергенции). Если затем последовательно полагать $\lambda^n = \delta_{nj}$, $\lambda^n = \delta_{nj}x_\lambda$, $\lambda^n = \delta_{nj}x_\lambda x_\rho$, то мы получим следующие три ограничения на вид лагранжиана:

$$\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta b^i_\mu}\alpha_{ijk}b^k_\mu + \frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_\nu b^i_\mu}\alpha_{ijk}\partial_\nu b^k_\mu - i\left[\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\Psi}\left(\hat{T}^{(1)}_j+\gamma_5\hat{T}^{(2)}_j\right)\Psi + \frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_\nu\Psi}\left(\hat{T}^{(1)}_j+\gamma_5\hat{T}^{(2)}_j\right)\partial_\nu\Psi\right] + \frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\varphi^a}\eta^j_{ab}\varphi^b + \frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_\nu\varphi^a}\eta^j_{ab}\partial_\nu\varphi^a = 0 \tag{П.1}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta b^j_\lambda} + \frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_\lambda b^i_\mu}\alpha_{ijk}b^k_\mu - i\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_\lambda\Psi}\left(\hat{T}^{(1)}_j+\gamma_5\hat{T}^{(2)}_j\right)\Psi + \frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_\lambda\varphi^a}\eta^j_{ab}\varphi^b = 0 \tag{П.2}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_\lambda b^j_\rho} + \frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\partial_\rho b^j_\lambda} = 0 \tag{П.3}$$

Анализируя (П.I)-(П.3) обычным способом /I,2/, находим, что в $\mathcal{L}'$ поля входят следующим образом:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}'\Big(\partial_\mu b^i_\nu - \partial_\nu b^i_\mu + \alpha_{ijk}b^j_\mu b^k_\nu,\ \Psi,\ \left[\partial_\mu - i\left(\hat{T}^{(1)}_j+\gamma_5\hat{T}^{(2)}_j\right)b^j_\mu\right]\Psi,\ \varphi,\ \left(\partial_\mu - \eta^j b^j_\mu\right)\varphi\Big) \tag{П.4}$$

Таким образом, b^i_μ входит в $\mathcal{L}'$ только через "ковариантные производные". Привлекая соображения размерности, нетрудно записать явный вид $\mathcal{L}'$ /I-5,7/. На этом этапе выясняется, что α_{ijk} - полностью антисимметрично /4,7/. Полный лагранжиан для массивных векторных полей отличается от $\mathcal{L}'$ только массовым членом.

Литература:

1. C.N.Yang, R.L.Mills, Phys. Rev. 96, I9I (I954).
2. R.Utiyama, Phys. Rev. I0I, I597 (I956).
3. J.J. Sakurai., Ann. of Phys. II, I (I960).
4. S.L. Glashow, M. Gell-Mann, Ann. of Phys., I5, 437 (I96I).
5. H.Konuma, H. Umezawa, M. Wada, Nucl. Phys., 3I, 507 (I963).
6. В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов ЖЭТФ, 45, 257 (I963); 46, I048 (I964).
7. В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов, ЖЭТФ, 45, 966 (I963); 46, I048 (I964); Ann. of Phys. 25, 358 (I963).
8. E.Noether, Nachrichten von der Kön. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen Nath, Math.-Phys. KL., вып. 2, 325 (I9I8).

Рукопись поступила в издательский отдел
I4 сентября 1964 г.