P-1816

Л.И. Пономарев

ПРОЦЕССЫ ПОГЛОЩЕНИЯ π^--МЕЗОНОВ В ВОДОРОДОСОДЕРЖАЩИХ ВЕЩЕСТВАХ

1. Постановка задачи

Во многих экспериментальных и теоретических работах изучалась вероятность захвата π^- -мезонов на ядра различных веществ как функция заряда ядра Z. Исходя из модели Томаса-Ферми, Ферми и Теллер [1] сформулировали так называемый Z - закон, согласно которому эта вероятность $\sim Z$. Эксперименты [2] показывают, что этот закон выполняется плохо. Особенно резко он нарушается в системах типа $Z-H$ (LiH, CH, CH_2 и т.д.), где по измерениям Петрухина и Прокошкина [3] (которые подтверждены группой из ЦЕРНа [4]), вероятность захвата $\approx Z^8$ (при $Z \leq 10$).

Нарушение Z -закона в такой системе естественно, так как в ней не выполнены условия применимости модели Томаса-Ферми, однако и все другие существующие схемы не дают количественного описания явления. Панофский [5] предложил модель перехвата, в которой π^- -мезон вначале образует с ядром атома водорода нейтральный π -мезоатом и далее при движении перехватывается на ядра с большими Z. Но тогда, очевидно, сечение процесса должно зависеть от концентрации C_z, что противоречит экспериментам [x] (в одном из ~~этих экспериментов~~ которых плотность C_2H_6 менялась в 110 раз, — от газа до жидкости, — однако зависимости от C_z обнаружено не было). Существуют и другие возражения против схемы Панофского, в частности, нечувствительность процесса перехвата к примесям очень тяжелых элементов, например, Pb и т.д. [x]

Экспериментально установлено, что захват мезона ядром происходит из связанного состояния. Вполне вероятно, что для тяжелых атомов именно процесс перехода медленных мезонов из непрерывного спектра на какой-либо стационарный мезоатомный уровень π дает основной вклад в Z -зависимость. При этом основную роль должна играть электронная оболочка. Для атома водорода среди многих возможных механизмов перехода π^- в дискретный спектр реализуется, по-видимому, лишь один: адиабатический захват. Оценки Вайтмана [6] показывают, что при этом π^- должен захватиться на уровень $n \approx 14$. Однако можно просто показать, что уровни энергии водорода в системе $Z-H$, для которых $n > n_0 = \sqrt{\frac{R}{2(2\sqrt{Z}+1)}}$, - общие уровни всей системы [xx], (R -межнуклонное расстояние в мезоатомных $\hbar = e = m_\pi = 1$ единицах). Так как обычно $R \approx 400 \div 600$, то при $Z = 1 \div 10$; $n_0 \approx 6 \div 7$ и, следовательно, захват происходит на систему $Z-H$ в целом.

Принимая во внимание все вышесказанное, в данной работе предлагается следующая

---

[x] В.И. Петрухин, Ю.Д. Прокошкин. Доклад на сессии АН СССР, май 1964 г.

[xx] При $n > n_0$ возникает явление, аналогичное исчезновению линий при штарк-эффекте в сильных полях (см. рис. 1), барьер понижается настолько, что происходит вырывание мезона полем ядра Z.

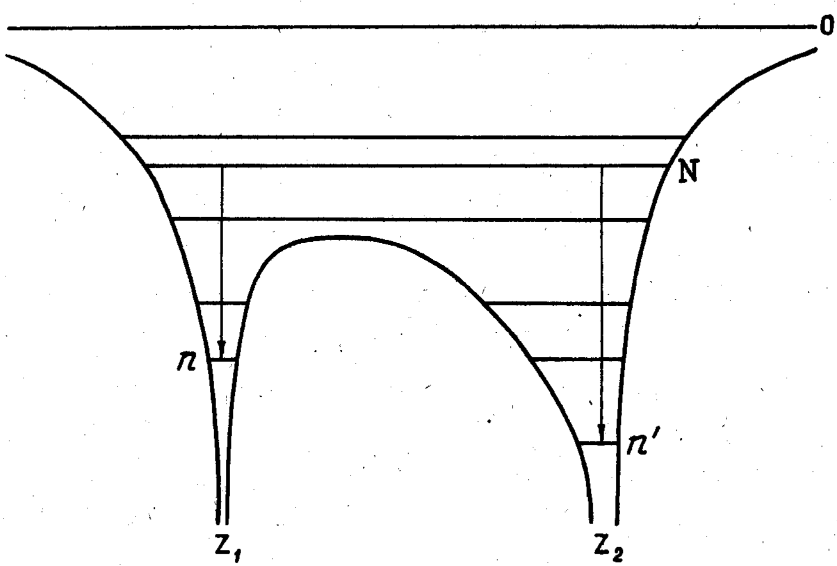

Рис. 1.

схема процессов, происходящих при захвате медленных π^--мезонов в водородосодержащих веществах: π^--мезон захватывается на некоторый стационарный уровень, общий для всей системы $Z-H$ [x/]. Затем идут следующие конкурирующие процессы: 1) переход на раздельные уровни мезоатома H; 2) переход на уровни мезоатома Z; 3) перехват на другие системы [xx/].

В отсутствие примесей "падение" π^- на одно из ядер системы $Z-H$ с начального, общего для всей системы уровня, может быть обусловлено в принципе многими причинами: оже-эффект, внешний оже-эффект (из оболочек других атомов), прямой ядерный захват, штарковское смешение уровней при столкновениях и, наконец, радиационные переходы. Оценить количественно относительный вклад всех этих процессов в настоящее время не представляется возможным, однако можно привести несколько соображений в пользу последнего механизма [xxx/]. Во-первых, в аналогичных опытах с π^--мезонами наблюдали интенсивную рентгеновскую серию. Во-вторых, в такой системе нарушена центральная симметрия, поэтому отсутствуют обычные правила отбора по орбитальному моменту $(\Delta\ell = 1)$, и вероятности радиационных переходов должны возрасти.

Таким образом, задача сводится к отысканию вероятностей переходов в системе $ZH\pi^-$ и, так как основную роль при этом играют высоковозбужденные уровни, естественно для ее решения применить метод ВКБ.

Все обозначения и математические подробности, необходимые для решения этой задачи, даны в работе [/7/].

2. Вероятности радиационных переходов

Предположим, что в системе $ZH\pi^-$ за время перехода межнуклонное расстояние R не меняется. Тогда вероятность W_{Nn} радиационного перехода с высокого общего уровня N на низкий разделенный n равна [/8/]:

[x/] Речь идет только о тех мезонах, которые могут затем вызвать реакцию $\pi^- + p \to \pi^0 + n$, $\pi^0 \to 2\gamma$, которая и служит индикатором процесса. Конено, по-прежнему большая часть π^--мезонов из пучка захватывается сразу на уровни мезоатома Z, однако эти мезоны не дают вклада в реакцию (она идет только на ядрах водорода) и выпадают из рассмотрения. Предполагается, что мезоны, попавшие на уровни изолированного мезоатома, за время процесса перехватываются мало и могут быть захвачены лишь ядрами этого мезоатома.

[xx/] В пользу этой гипотезы говорит также следующий факт: в смесях газов $H_2 + Z$ идет перехват с H_2 на Z, но он значительно слабее и не зависит от Z, а лишь от концентрации C_z.

[xxx/] Вероятность оже-переходов (ΔE -разность энергий уровней) $\sim \frac{1}{\sqrt{\Delta E}}$, т.е. значительна лишь для переходов между высокими уровнями. В то же время радиационные переходы $\sim (\Delta E)^3$ и могут перевести мезон сразу на один из нижних S-уровней, с которых идет интенсивный захват на ядро $\sim \frac{2\cdot 10^6}{n^3}$.

$$W_{Nn} = \frac{4}{3} \cdot \frac{e^2\omega^3}{hc^3} \, |\vec{r}_{Nn}|^2 , \quad \omega = \frac{E_N - E_n}{h} . \qquad (1)$$

Вычисления (см. Приложение 1) дают:

$$|\vec{r}_{Nn}| = \frac{4}{\pi^3} \left(\frac{2n_1+1}{2n_2+1}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{N_0}{N}\right)^5 \cdot \frac{1}{n\epsilon} , \qquad (2)$$

где n , n_1 , n_2 –параболические квантовые числа нижнего уровня E_n , $\epsilon = -2E_n$,

$$N_0 = \frac{\sqrt{R(Z+1)}}{2} . \qquad (3)$$

Вероятность перехода с общего уровня N на уровень мезоатома H :

$$W_{Nn} = \frac{2}{3\pi^5} \cdot \frac{e^2}{hc^3} \left(\frac{2n_1+1}{2n_2+1}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{N_0}{N}\right)^8 \cdot \frac{\epsilon^2}{n} . \qquad (4)$$

Аналогично для переходов на уровни мезоатома Z с заменой $n \to n'$, $n_1 \to n_1'$, $n_2 \to n_2'$, $\epsilon \to \epsilon'$. При этом переходы возможны лишь при (ℓ – момент высокого уровня N):

$$N > N_0 , \qquad \ell < 2N_0 \sqrt{1 - \left(\frac{N_0}{N}\right)^2} . \qquad (5)$$

Для отношения вероятностей переходов с высокого общего уровня N на разделенные низкие n и n' получим (при $R \gg 1$ $\epsilon = \frac{1}{n^2}$, $\epsilon' = \frac{Z^2}{n'^2}$):

$$\frac{W_{Nn'}}{W_{Nn}} = \left(\frac{2n_1'+1}{2n_1+1} \cdot \frac{2n_2+1}{2n_2'+1}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{n}{n'}\right)^5 \cdot Z^4 , \qquad (6)$$

т.е. вероятность перехвата $\sim Z^4$.

Интересно отметить, что для времени жизни π^- –мезона в водороде из (4) получим $\tau \approx 3 \cdot 10^{-12}$ сек , что по порядку величины совпадает с экспериментально-измеренным: $(1{,}2\,^{+1{,}2}_{-0{,}5}) \cdot 10^{-12}$ сек /12/ .

Известно, что такое малое время жизни не может быть объяснено радиационными переходами в изолированном мезоатоме, так как даже самый сильный переход $2p \to 1s$ дает для времени жизни величину $\tau \approx 6 . 10^{-12}$ сек . Леон и Бете /13/ (там же подробная библиография) учли все другие возможные механизмы (внешний оже-эффект, штарковское смешение уровней, ядерной сдвиг s –уровней и их интерференцию, прямой ядерных захват), которые могут привести к захвату с начальной орбиты $n = 15$ изолированного мезоатома и получили $\tau = (2{,}3\,^{+1{,}4}_{-0{,}7}) \cdot 10^{-12}$.

Однако, во-первых, в системе $H_2^+\pi^-$ не существует уровней изолированного мезоатома с $n \geq 8$; во-вторых, все эти механизмы существенно должны зависеть от столкновений с другими атомами, а в аналогичных опытах с веществами типа $Z-H$ не обнаружено изменения общего характера процессов в зависимости от плотности вещества.

И наконец, время жизни π^- в He $\tau = (3,6 \pm 0,7) \cdot 10^{-10}$ сек /14/, т.е. на два порядка больше, чем в водороде.

С точки зрения данной работы это объясняется тем, что He – одноатомный газ. Конечно, для сколько-нибудь уверенных заключений необходимы точные численные расчеты.

3. Перехват на другие системы

Условие (5) позволяет также, по крайней мере качественно, понять механизм перехвата π^- с системы $Z-H$ в газах, так как оно приводит к разному времени жизни для различных уровней. Используя Приложение II , поясним возможный механизм на модели из 3-х уровней (за уровень E_1 примем уровень 1s , см. рис. 2).

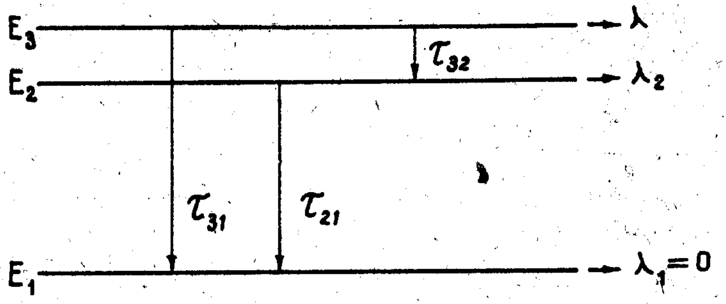

Рис. 2.

Общая формула для $a_1(t_0)$ –вероятности захвата на E_1 довольно громоздка, но при

$$\lambda_2\rho \ll \frac{1}{r_{21}} \approx \frac{1}{r_{31}} = \frac{1}{r} \gg \frac{1}{r_{32}} \qquad (7)$$

(физически это соответствует переходам с уровней, принадлежащих одному мультиплету) получим:

$$a_1(t_0) = a_1 + (1 - \exp\{-\frac{t_0}{r}\})a_2 + \frac{1}{1+\lambda\rho r}(1 - \exp\{-\frac{t_0}{r} - \lambda\rho t_0\})a_3 . \qquad (8)$$

При $\rho \to 0$ и $\rho \to \infty$ $a_1(t_0)$ заключено в конечных пределах, зависящих лишь от вероятностей a_i начального распределения по уровням и общего времени процесса t_0. Аналогичная, хотя и более сложная картина будет также в общем случае; а так как константы перехвата λ_i слабо зависят от Z, то перехват в основном определяется концентрацией примеси ρ, а также соотношением $\lambda_i \rho$ и $\frac{1}{r_i}$.

Обсуждение результатов

Полученные результаты могут претендовать лишь на полуколичественное описание явлений, так как при их выводе допущены следующие приближения: ядра предполагались бесконечно тяжелыми; не учитывалась экранировка их внешними электронами; не учитывались другие возможные механизмы, которые, конечно, дают некоторый вклад.

Однако предложенная схема позволяет с единой точки зрения качественно понять явления, происходящие при захвате π^- –мезонов в водородосодержащих веществах[x/], а именно:

1. Сильную Z –зависимость ($\approx Z^8$) перехвата π^- –мезонов от ядер водорода.

2. Отсутствие эффекта плотности, т.е. независимость перехвата от плотности и даже агрегатного состояния системы $Z - H$.

3. Нечувствительность процесса перехвата к примесям очень тяжелых элементов (Pb и т.д.).

[x/] Может возникнуть естественный вопрос: почему данная схема действует лишь в этом очень специфическом случае и не действует в системах $Z_1 - Z_2$, где экспериментально установлено отсутствие таких резких Z –зависимостей? Можно показать, однако, что в этом случае уровень становится общим лишь при $n > \sqrt{\frac{Z_1 R}{2(2\sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}}+1)}}$, т.е. $n_0 = 15 \div 17$ уже при $Z_1 = 3 \div 4$.

4. Причину и общий характер зависимости процессов перехвата на примеси в газообразных системах $Z-H$.

В заключение выражаю грубокую признательность С.С. Герштейну за интерес, указания и большую помощь. Приношу глубокую благодарность В.И. Петрухину за ознакомление с результатами экспериментов до их опубликования и многочисленные обсуждения и Ю.Д. Прокошкину за предложение данной темы и постоянный стимулирующий интерес в ходе работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Вычислим

$$\vec{r}_{Nn} = \int d\tau\, \psi_N \vec{r} \psi_n , \quad \vec{r} = \{ x, y, z \} , \tag{П.1}$$

$$d\tau = \frac{R^3}{8} (\xi^2 - \eta^2)\, d\xi\, d\eta\, d\phi ,$$

$$z = \frac{R}{2}\xi\eta , \quad x = \frac{R}{2}\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\cos\phi , \quad y = \frac{R}{2}\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\cdot\sin\phi . \tag{П.2}$$

В области квазиклассического движения нормированные волновые функции общего уровня [7] имеют вид:

$$\psi_N = C_N \cdot \frac{\cos\left(\int_{\xi_0}^{\xi} R_0(\xi)\,d\xi - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\xi^2-1}\,\sqrt{R_0(\xi)}} \cdot \frac{\cos\left(\int_{\eta_0}^{\eta} Q_0(\eta)\,d\eta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{1-\eta^2}\,\sqrt{Q_0(\eta)}} \cdot e^{im\phi} , \tag{П.3}$$

а уровня, принадлежащего мезоатому H ,

$$\psi_n = C_n \cdot \frac{\cos\left(\int_{\xi_1}^{\xi} R(\xi)\,d\xi - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\xi^2-1}\,\sqrt{R(\xi)}} \cdot \frac{\cos\left(\int_{\eta_1}^{\eta} Q(\eta)\,d\eta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{1-\eta^2}\,\sqrt{Q(\eta)}} \cdot e^{im\phi} , \tag{П.3'}$$

$$R(\xi) = \sqrt{\frac{-p^2\xi^2 + b'\xi + A}{\xi^2 - 1} - \frac{m^2}{(\xi^2-1)^2}} , \tag{П.4}$$

$$Q(\eta) = \sqrt{\frac{p^2\eta^2 + b\eta - A}{1-\eta^2} - \frac{m^2}{(1-\eta^2)^2}} ,$$

$$p^2 = -\frac{R^2}{2} E = \frac{R^2}{4}\varepsilon , \quad b' = R(Z+1) , \quad b = R(Z-1) , \tag{П.5}$$

E – энергия соответствующего уровня, A – константа разделения в уравнениях задачи 2-х центров

$$C_N = \frac{2}{\pi^{3/2}} \cdot \frac{\varepsilon_0^{3/4}}{\sqrt{R(Z+1)}} \cdot \sqrt[4]{-A_0}\ , \quad C_n = \frac{2}{\pi^{3/2}} \cdot \frac{\varepsilon^{3/4}}{\sqrt{n}} \ . \tag{П.6}$$

Индексом нуль помечены все величины, принадлежащие общему уровню N. Для уровня, принадлежащего мезоатому Z, – аналогично, с заменой: $n \to n'$, $\varepsilon \to \varepsilon'$, $A \to A'$.

В дальнейшем для простоты ограничимся случаем $m = 0$ и $\Delta m = 0$, так как при этом матричный элемент (П.1) значительно больше, чем при $\Delta m \neq 0$. Тогда $|\vec{r}_{Nn}|^2 = |z_{Nn}|^2$.

Квазиклассические матричные элементы (П.1), как правило, экспоненциально малы [9]. Однако в случае кулоновского поля это не так[x]. Интеграл (П.1) содержит произведение 4-х осциллирующих функций. Записывая его как сумму произведений косинусов от суммы и разности аргументов, пренебрегая интегралом от произведения косинусов от суммы аргументов, получим:

$$z_{Nn} = \frac{\pi R^4}{32} \cdot C_N C_n \int d\xi d\eta f(\xi,\eta)\cos\chi(\xi)\cos\phi(\eta)\ ,$$

$$\chi(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} R_0(\xi)d\xi - \int_{\xi_1}^{\xi} R(\xi)d\xi\ ,$$

$$\phi(\eta) = \int_{-1}^{\eta} Q_0(\eta)d\eta - \int_{-1}^{\eta} Q(\eta)d\eta\ , \tag{П.7}$$

$$f(\xi,\eta) = \frac{\xi\eta(\xi^2-\eta^2)}{(\xi^2-1)\sqrt{R_0(\xi)R(\xi)}\,(1-\eta^2)\sqrt{Q_0(\eta)Q(\eta)}}\ .$$

Интеграл (П.7) берется по наименьшей области квазиклассического движения, так как вне ее функции экспоненциально малы. Он не будет экспоненциально мал, если существует общая область определения положительных значений $R_0(\xi)$ и $R(\xi)$ (для $Q_0(\eta)$ и $Q(\eta)$ такая область всегда существует). Условие выполнено при $\xi_0 < \xi_2$, где ξ_2 меньший корень уравнения $R_0(\xi) = 0$, ξ_2 – больший корень $R(\xi) = 0$. Используя (П.4) и работу [7], можно показать, что это эквивалентно условию:

$$-A_0 < b' - p_0^2\ , \tag{П.8}$$

или (для высоколежащих уровней):

$$\ell < 2N_0\sqrt{1-\left(\frac{N_0}{N}\right)^2}\ , \quad N = \frac{\sqrt{R(Z+1)}}{2}\ . \tag{П.9}$$

Это своеобразное ограничение на величину орбитального момента соответствует

---

x) Причина экспоненциальной малости (П.1) заключается в том, что кривые $E_1 - U_1(x)$ и $E_2 - U_2(x)$ ($U(x)$ –эффективный потенциал) не имеют точки пересечения на действительной оси, в области квазиклассического движения.

тому, что для этих уровней восстанавливается центральная симметрия поля.

Корень уравнения $\chi'(\alpha)$ при $p^2 \gg 1$ (используя/7/)

$$\alpha = \frac{A - A_0}{p^2 - p_0^2} = 1 + \frac{A - p^2 + b'}{p^2 - p_0^2} + \frac{-A_0 - b' + p_0^2}{p^2 - p_0^2} \approx 1 + \frac{2(2n_1 + 1)}{p} . \qquad (\text{П.10})$$

лежит в области определения функций $R_0(\xi)$ и $R(\xi)$ на действительной оси, при этом

$$\chi''(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1} \cdot \frac{p^2 - p_0^2}{\sqrt{R(\alpha)}} > 0 . \qquad (\text{П.11})$$

Корень аналогичного уравнения $\phi'(\eta) = 0$ лежит вне области определения $Q_0(\eta)$ и $Q(\eta)$. Однако из (П.7) видно, что $\min \phi(\eta) = 0$ достигается в точке $\eta = \beta = -1$, при этом:

$$\phi'(\beta) = \sqrt{Q_0(\beta)} - \sqrt{Q(\beta)} < 0 . \qquad (\text{П.12})$$

В этих условиях к интегралу (П.7) применим метод стационарной фазы/10/. Вычисление дает

$$z_{Nn} \approx C_N C_n \cdot \frac{\pi R^4}{32} f(\alpha, \beta) \left[\frac{2\pi}{\chi''(\alpha)} \right]^{1/2} \cdot \frac{1}{\phi'(\beta)} \cdot \sin\left[\chi(\alpha) + \frac{\pi}{4}\right] \cdot \sin\left[\phi(\beta) + \frac{\pi}{2}\right] . \qquad (\text{П.13})$$

При $p^2 \gg 1$, учитывая (П.10), $\chi(\alpha) \approx \pi(n_2 + 1/2)$. Учитывая также соотношения/7/

$$p^2 - A - b \approx 2p(2n_2 + 1) ,$$

$$p_0^2 - A_0 - b \approx - A_0 ,$$

$$R(\alpha) = b' = R(Z + 1) , \quad \phi(\beta) = 0 ,$$

получим

$$|z_{Nn}|^2 \approx \frac{1}{2\pi^3} \cdot \left(\frac{2n_1 + 1}{2n_2 + 1}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{\epsilon_0 R}{Z + 1}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{n\epsilon} , \qquad (\text{П.14})$$

или окончательно x/

$$|z_{Nn}|^2 = \frac{4}{\pi^3} \cdot \left(\frac{2n_1 + 1}{2n_2 + 1}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{N_0}{N}\right)^3 \cdot \frac{1}{n\epsilon} . \qquad (\text{П.15})$$

---

x/Аналогичный расчет в случае переходов в атоме водорода дает значения, по порядку величины совпадающие с точными/8/ правильными функциональными зависимостями. Например, для квадратов радиальных интегралов $(R_{n\ell}^{n\ell'})^2$ этот метод дает:

$$(R_{10}^{n1})^2 = \frac{5,3}{n^3} ; \quad (R_{20}^{n1})^2 = \frac{57,4}{n^3} ; \quad (R_{30}^{n1})^2 = \frac{379}{n^3} .$$

Для точных значений соответствующие численные коэффициенты равны: 4,7; 58,6; 198.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Пусть имеется система уровней $E_1 < E_2 < \dots < E_n$. Любой процесс каскадного перехода с одновременным перехватом на другие системы (независимо от механизма) описывается уравнением:

$$X = e^{-At} X_0 , \qquad (\text{П}.16)$$

где $X_0 = \{a_i\}$ – вектор-столбец, соответствующий начальному распределению частиц по уровням системы ($\Sigma a_i = 1$).

$A = \{a_{ij}\}$ –треугольная матрица ($i < j$), причем

$$a_{ij} = \delta_{ij} \left(\frac{1}{\tau_i} + \lambda_i \rho \right) - (1 - \delta_{ij}) \cdot \frac{1}{\tau_{ji}} , \qquad (\text{П}.17)$$

$$\frac{1}{\tau_i} = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{\tau_{ik}} .$$

Здесь

$\frac{1}{\tau_{ij}} = W_{ij}$ – вероятность перехода $E_i \to E_j$,

λ_i – константа перехвата с уровня i,

ρ – концентрация примеси.

Пусть t_0 – экспериментально известное время, характеризующее общую длительность процесса (время жизни π^- в среде; для жидкого водорода, например, $t_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-12}$). Тогда конечное распределение вероятностей по уровням можно записать в следующем виде: /11/

$$X(t_0) = B(t_0) X_0 = \sum_{i=1}^{n} e^{-a_{ii} t_0} B^i \; X_0 , \qquad (\text{П}.18)$$

$$B^i = \frac{(A - a_{11} I) \dots (A - a_{i+1\, i-1} I)(A - a_{i+1\, i+1} I) \dots (A - a_{nn} I)}{(a_{ii} - a_{11}) \dots (a_{ii} - a_{i-1\, i-1})(a_{ii} - a_{i+1\, i+1}) \dots (a_{ii} - a_{nn})} ; \qquad (\text{П}.19)$$

Примем за E_1 ядро, на которое происходит захват π^-. Из (П.18) и (П.19) видно, что вероятность захвата есть комбинация полиномов от τ_{ij}, a_i, λ_i, ρ, помноженных на $\exp\{ -\frac{1}{\tau_i} + \lambda_i \rho) t_0 \}$. Ясно, что при $\rho \to \infty$ эта вероятность падает, а при $\rho = 0$ будет обычный каскад. В промежуточной области все определяется соотношением между $\frac{1}{\tau_i}$ и $\lambda_i \rho$ для различных уровней.

Литература

1. E.Fermi, E.Teller. Phys. Rev., 78, 399 (1947).
2. M.Eckhause et al. Nuovo Cimento, 24, 667 (1962).
3. А.Ф. Дунайцев, В.И. Петрухин, Ю.Д. Прокошкин, В.И. Рыкалин. ЖЭТФ, 42 , 1680 (1962); V.I.Petrukhin and Yu.D.Prokoschkin. Nuovo Cimento, 28, 99 (1963); V.I.Petrukhin, Yu.D.Prokoschkin. Preprint E-1471,JINR, Dubna, 1964.
4. M.Chabre, P.Depommier, J.Heintze, V.Soergel. Phys. Letters, 5, 67 (1963).
5. W.K.H.Panofsky, R.L.Aamodt, J.Handly. Phys. Rev., 81, 556 (1951).
6. A.S.Wightman. Phys. Rev., 77, 521 (1950).
7. С.С. Герштейн, Л.И. Пономарев, Т.П. Пузынина. Препринт ОИЯИ, Р-1779, Дубна,1964.
8. Г. Бете, Э. Солпитер, Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. М.,Физматгиз,1960.
9. Л.Д. Ландау и Е.Н. Лифшиц. Квантовая механика. М., Физматгиз, 1963.
10. А. Эрдейн. Асимптотические разложения. М., Физматгиз, 1962.
11. Ф.Р. Гентмахер. Теория матриц. М., Гостехиздат, 1953.
12. T.H.Fields et al. Phys. Rev. Lett., 5, 69 (1960).
13. H.Leon, H.A.Bethe. Phys. Rev., 11, 301 (1963).
14. M.H.Block et al. Phys. Rev., 11, 301 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел
20 августа 1964 г.