ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна 1964

Р - 1814

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Б.Н. Валуев

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУД n -УГОЛЬНЫХ ДИАГРАММ

Ядерная физика, 1965,
т. 1, в. 4, с 715-720.

1964

P - 1814

Б.Н. Валуев

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУД n -УГОЛЬНЫХ ДИАГРАММ

Направлено в ЖЭТФ

В ряде работ[1-4] были рассмотрены случаи, когда амплитуда, соответствующая некоторой диаграмме Фейнмана, может быть выражена через амплитуды низшего порядка. Было бы полезно знать, существует ли аналогичная процедура для диаграмм общего вида. Однако эта интересная задача не была полностью решена даже для диаграмм с одним замкнутым контуром (т.е. для n -угольных диаграмм при любом n). В настоящей работе получены формулы, позволяющие выразить амплитуду n -угольной диаграммы через амплитуды $(n-1)$ -го порядка и определенные функции от переменных, характеризующих диаграмму. Для этого был использован подход Кларсфельда[4] в сочетании со способом введения дополнительного параметра, примененным в[5].

1. Будем исходить из выражения для амплитуды n -угольника, приведенного к виду (несущественные постоянные множители опущены):

$$A_{np} = \int_0^1 \frac{d^n \alpha\, \delta(1-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)}{[D(\alpha,\zeta)]^p}, \tag{1}$$

где

$$D(\alpha,\zeta) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \zeta_{ij}, \quad \zeta_{ij} = \frac{a_i + a_j - z_{ij}}{2}, \quad a_i = m_i^2,$$

$z_{ij} = (p_i - p_j)^2$. Здесь m_i – масса частицы, соответствующей i -ой внутренней линии диаграммы, а 4-импульсы p_i выражаются через суммы внешних импульсов, например, $p_i = p_{12} + p_{23} + \dots + p_{i-1\,i}$, $p_1 = 0$, где $p_{i\,i+1}$ – внешний импульс, входящий в вершину n -угольника между сторонами i и $i+1$. Предполагается, что все внешние импульсы направлены внутрь диаграммы: $p_{12} + p_{23} + \dots + p_{n1} = 0$. Показатель p равен $n-2$, но удобно рассматривать выражения вида (1) и для других целых значений p.

Так как $\frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial \alpha_i} = \sum_j \zeta_{ij}\alpha_j$, то при $\det\|\zeta_{ij}\| = \Delta_n \neq 0$ $\alpha_j = \frac{1}{2\Delta_n}\sum_k M_{kj}\frac{\partial D}{\partial \alpha_k}$ и

$$\sum \alpha_j = \frac{1}{2\Delta_n}\sum_k P_k \frac{\partial D}{\partial \alpha_k}, \quad P_k = \sum_j M_{kj},$$

где M_{kj} — алгебраическое дополнение ζ_{kj} в определителе Δ_n. Далее

$$A_{np} = \int d^n\alpha \, \frac{\delta(1-\sum\alpha)(\sum\alpha)}{D^p} = -\frac{1}{2(p-1)\Delta_n}\sum_j P_j \int d^n\alpha\, \delta(1-\sum\alpha)\frac{\partial D^{-p+1}}{\partial \alpha_j}.$$

Интегрируя по частям, имеем

$$A_{np} = \frac{1}{2(p-1)\Delta_n}\{\sum_j P_j \int (d^{n-1}\alpha)_j \left[\frac{\delta(1-\Sigma\alpha)}{D^{p-1}}\right]_{\alpha_j=0} - \lambda_n \int \frac{d^n \alpha\delta'(1-\Sigma\alpha)}{D^{p-1}}\}$$

$$(d^{n-1}\alpha)_j = d\alpha_1 \ldots d\alpha_{j-1} d\alpha_{j+1} \ldots d\alpha_n \quad , \quad \lambda_n = \sum_j P_j \quad .$$

Используя теперь тождество (см./4/ и приложение А)

$$\int d^n \alpha\, \delta'(1-\Sigma\alpha) D^{-p} = (n-2p-1) \int d^n \alpha\, \delta(1-\Sigma\alpha)\, D^{-p} \quad , \tag{2}$$

получим

$$A_{np} = \frac{1}{2(p-1)\Delta_n}\{\sum_j P_j A^{(j)}_{n-1p-1} - \lambda_n (n-2p+1) A_{np-1}\} . \tag{3}$$

Здесь $A^{(j)}_{n-1p-1}$ –амплитуда $(n-1)$ – угольной диаграммы, которая получается из исходной, если j –ую линию стянуть в точку. До сих пор мы следовали Кларсфельду/4/, который рассматривал случай нечетных n, удовлетворяющих условию $n = 2p - 1$. Тогда уже формула (3) дает выражение амплитуды n –го порядка через амплитуды порядка $n-1$.

2. Чтобы рассмотреть общий случай, введем функции, зависящие от параметра t:

$$A_{np}(t) = A_{np}\Big|_{a_j \to a_j + t} = \int \frac{d^n \alpha\, \delta(1-\Sigma\alpha)}{(D+t)^p} .$$

Учитывая, что $A_{np-1}(t) = (p-1)\int_t^\infty dt' A_{np}(t')$, равенство (3) можно переписать в виде:

$$\Delta_n(t) A_{n,p}(t) = \frac{1}{2(p-1)} \sum_j P_j(t) A^{(j)}_{n-1p-1}(t) - \lambda_n(t) \frac{(n-2p+1)}{2} \int_t^\infty A_{np}(t')dt' .$$

Если здесь $A^{(j)}_{n-1p-1}(t)$ считать известными величинами, то мы имеем уравнение относительно $A_{np}(t)$, которое после дифференцирования по t сводится к простому дифференциальному уравнению, если учесть, что при замене всех a_j на $a_j + t$ $\Delta_n \to \Delta_n(t) = \Delta_n + \lambda_n t$, $P_j \to P_j$, $\lambda_n \to \lambda_n$ (см. приложение Б). Решая получающееся уравнение, имеем

$$A_{np}(t) = -\frac{1}{2(p-1)(\Delta_n + \lambda_n t)^{1-k}} \int_t^\infty dt' \frac{\sum_j P_j \frac{dA^{(j)}_{n-1p-1}(t')}{dt'}}{(\Delta_n + \lambda_n t')^k} , \tag{4}$$

$k = \frac{n-2p+1}{2}$, $A_{np} = A_{np}(t)|_{t=0}$. При выводе (4) предполагалось, что $p > 1$ и использовался тот факт, что $A_{np}(\infty) = 0$ при $p > 0$. В силу условия $p > 1$ формула (4) неприменима для A_{31}. Однако используя известный результат для A_{32} (см. [1]), выражение для A_{31} нетрудно получить. Оно имеет вид [5]:

$$A_{31}(t) = \int_t^\infty \frac{dt'}{\Delta + \lambda t'} \sum_{i=1}^{3} \frac{P_i}{\sqrt{-M_{ii} - \lambda_{ii} t'}} \ln \left(\frac{\zeta_{jk} + t' + \sqrt{-M_{ii} - \lambda_{ii} t'}}{\zeta_{jk} + t' - \sqrt{-M_{ii} - \lambda_{ii} t'}} \right). \qquad (5)$$

Здесь Δ, λ и т.д. – соответствующие величины для треугольной диаграммы, а индексы i, j, k образуют циклическую перестановку чисел 1,2,3.

3. Вывод формулы (4) основывался на предположении, что определитель Δ_n не равен нулю тождественно. Тогда можно найти такую область изменения переменных ζ_{ij} ($\zeta_{ij} > 0$), в которой $\Delta_n \neq 0$ и получить формулу (4). Для других значений ζ_{ij} амплитуда определяется как аналитическое продолжение полученного выражения. Особенности при этом должны обходиться с учетом правила $a_i \to a_i - i\epsilon\ (\epsilon > 0)$, так что соответствующий интеграл, определяющий A_{np}, нужно понимать как $\int_{0-i\epsilon}^{\infty-i\epsilon} dt$. Поскольку для $n = 3,4,5$, число величин ζ_{ij} ($i \neq j$) совпадает с числом независимых инвариантных переменных, от которых зависит амплитуда, то в этом случае можно выбрать переменные так, что $\Delta_n \neq 0$. Легко проверить, что для $n = 6$, когда число величин ζ_{ij} на единицу превышает число независимых инвариантных переменных $(4n-10)$, определитель еще не равен тождественно нулю[x]. Покажем, что при $n > 6$, $\Delta_n \equiv 0$. Для этого из каждой последующей строки вычтем предыдущую и проделаем аналогичную операцию со столбцами. Учитывая определение величин z_{ij}, будем иметь

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & \frac{a_2 - a_1 - z_{12}}{2} & \frac{a_3 - a_2 - z_{13} + z_{12}}{2} & \cdots & \frac{a_n - a_{n-1} - z_{1n} + z_{1n-1}}{2} \\ \frac{a_2 - a_1 - z_{12}}{2} & (r_2 r_2) & (r_2 r_3) & \cdots & (r_2 r_n) \\ \frac{a_3 - a_2 - z_{13} + z_{12}}{2} & (r_3 r_2) & (r_3 r_3) & & (r_3 r_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{a_n - a_{n-1} - z_{1n} + z_{1n-1}}{2} & (r_n r_2) & (r_n r_3) & & (r_n r_n) \end{vmatrix}, \qquad (6)$$

---

[x] Так, если положить все $m_i = 1$, а $p_{12} = \{1,0,0,0\}$, $p_{23} = \{0,1,0,0\}$, $p_{34} = \{0,0,1,0\}$, $p_{45} = \{0,0,0,i\}$, $p_{56} = p_{12}$, то $\Delta_6 \neq 0$.

где $r_k = p_{k-1k}$. Из этой формы записи видно, что Δ_n можно представить в виде $\sum_i b_i G^i_{n-2}$, где b_i –некоторые коэффициенты, а G^i_{n-2} –определитель Грама порядка $n-2$, составленный из векторов r_k. Для 4-векторов $G^i_{n-2} = 0$ при $n-2 > 4$, откуда и следует сделанное утверждение. Отсюда же видно, что $\lambda_n = 0$ при $n > 5$.

Чтобы получить выражения для амплитуд при $n > 6$ заменим в квадратичной форме D величины ζ_{ij} на $\zeta_{ij} + x\delta_{ij}$, где x – некоторый параметр. Тогда форма D станет невырожденной, и будет иметь смысл формула (4), а нужное выражение получится как предел при $x \to 0$. Ясно, что такой предел существует и не зависит от того способа, каким форма делается невырожденной, если амплитуда аналитична в рассматриваемой области. Величины $\Delta_n(x)$ и $P_j(x)$ можно представить в виде разложения по степеням x:

$$\Delta_n(x) = \det\|\zeta_{ij} + x\delta_{ij}\| = \Delta_n + x\Sigma\Delta_n^{(n-1)} + \ldots + x^{n-6}\Sigma\Lambda_n^{(6)} + \ldots + x^n .$$

Здесь $\Delta_n^{(k)}$ –главный минор k –го порядка, а суммы распространяются на все главные миноры данного порядка. Так как любой главный минор может быть представлен в форме (6), то разложение $\Delta_n(x)$ будет начинаться с x^{n-6}. Разложение величин $P_j(x)$ тоже начинается с x^{n-6}. Чтобы это увидеть, удобно записать P_j как $\frac{\partial\Delta_n}{\partial a_j}$, что легко проверяется. Разложение $\lambda_n(x)$ начинается с x^{n-6}, так как $\sum\frac{\partial}{\partial a_j}(\Sigma\Delta_n^{(6)}) = \Sigma\lambda^{(6)}$, и, как уже отмечалось, для главных миноров $\lambda^{(6)} = 0$. Поэтому при $n > 6$ вместо формулы (4) имеем

$$A_{np} = \frac{1}{2(p-1)}\;\frac{\sum_j \frac{\partial}{\partial a_j}(\Sigma\Delta_n^{(6)})\,A^{(j)}_{n-1\,p-1}}{\Sigma\Delta_n^{(6)}} . \qquad (7)$$

Формулы (4) и (7) полностью решают задачу.

4. Сделаем несколько замечаний относительно следствий из полученных результатов.

а) Амплитуды n –угольных диаграмм A_{nn-2} при $n \geq 3$ можно единообразно и симметрично записать в виде однократного интеграла по параметру. Для $n = 3$ выражение дается формулой (5). Для $n = 4,5,6$ выражения получаются последовательным применением формулы (4), если учесть, что $k = 0$ для $n = 5$, $p = 3$ и $\lambda_6 = 0$. При $n > 6$ нужно использовать формулу (7). Отметим также, что при $p \geq n-1$ величины A_{np} для $n > 5$ выражаются через элементарные функции аналогично величине A_{32}. Как видно из полученных формул, собственные особенности n – угольных диаграмм при $n > 4$ имеют простой характер (полюсы). Поскольку для симметричной матрицы с действительными коэффициентами ранга не выше r обращение в нуль суммы главных миноров r -го порядка означает, что ранг ее $\leq r-1$, то обращение в нуль $\Sigma\Delta_n^{(6)}$ влечет за собой обращение в нуль любого из определителей $\Delta_n^{(6)}$. Таким образом, при $n>6$ собственная особенность диаграммы появляется вместе с особенностями низшего порядка, вплоть до 6-го включительно.

б) Величины Δ_n совпадают с определителями, которые получаются, если решать уравнения Ландау [6] для собственных особенностей n -угольников. Ясно поэтому, что для диаграмм с большим числом внешних линий $(n>6)$ уравнения Ландау могут становиться неопределенными и их нужно доопределять. Факт тождественного обращения Δ_n в нуль при $n>6$ обусловлен четырехмерностью пространства-времени. Вопрос о связи размерности пространства с условиями Ландау рассматривался Асрибековым [7] x/. Отметим, что выражения для амплитуд n - угольников в случае двухмерного пространства-времени были недавно получены Челленом и Толлом [8].

в) Получающиеся из формул (4), (5), (7) представления для амплитуд удобно использовать для аналитического продолжения (например, для получения выражений в случае распаданых масс), поскольку в этих представлениях особенности амплитуд "обнажены". Они соответствуют либо особенностям подинтегрального выражения при $t=0$, либо особенностям множителя перед интегралом. Это удобно для выделения вкладов отдельных особенностей.

Автор благодарен А.А. Логунову, М.А. Маркову, В.И. Огиевецкому и И.В. Полубаринову за полезные обсуждения и советы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

А. Соотношение (2) получается, если использовать однородность функции $D(a,\zeta)$:

$$\int d^n a\,\delta(1-\Sigma a)D^{-p} = \int d^n a\,\frac{\delta(1-\Sigma a)}{\Sigma a}\,D^{-p} = x^{n-2p-1}\int d^n a\,\frac{\delta(1-x\Sigma a)}{\Sigma a}\,D^{-p},$$

продифференцировать получившееся равенство по x и положить затем $x=1$. Отметим аналогичное соотношение для интеграла, содержащего $\ln D$:

$$\int d^n a\,\delta'(1-\Sigma a)\ln D = (n-1)\int d^n a\,\delta(1-\Sigma a)\ln D + \frac{2}{(n-1)!}.$$

Б. Определитель $\Delta_n(t)=|\zeta_{ij}+t|$ есть линейная функция t, что следует из

x/ Автор признателен М.А. Мествиришвили, указавшему на эту работу.

известных свойств определителей. После этого уже очевидно, что коэффициент при t равен $\lambda_n = \sum_{j,k=1}^{n} M_{jk}$. Величина $P_j(t) = \sum_k M_{jk}(t) = \sum_k M_{jk} + t \sum_k \lambda_{jk}$, где через λ_{jk} обозначены величины λ для соответствующих алгебраических дополнений. Докажем, что $\sum_k \lambda_{jk} = 0$. Так как $\sum_k \zeta_{ik} M_{jk} = \Delta_n \delta_{ij}$, то

$$(\Delta_n + \lambda_n t)\delta_{ij} = \sum_k (\zeta_{ik} + t)(M_{jk} + \lambda_{jk} t) = \Delta_n \delta_{ij} + t\sum_k (\zeta_{ik} \lambda_{jk} + M_{jk}) + t^2 \sum_k \lambda_{jk} .$$

Отсюда видно, что $\sum_k \lambda_{jk} = 0$. Кроме того,

$$\lambda_n \delta_{ij} = \sum_k (\zeta_{ik} \lambda_{jk} + M_{jk}) = \sum_k \zeta_{ik} \lambda_{jk} + P_j .$$

Используя последнее равенство, можно получить полезное соотношение между величинами Δ, P, λ и M. Умножим для этого равенство $\Delta_n \delta_{rj} = \sum_k \zeta_{rk} M_{jk}$ на λ_{ir} и просуммируем по r ($\zeta_{rk} = \zeta_{kr}$, $M_{jk} = M_{kj}$):

$$\Delta_n \lambda_{ij} = \sum_{r,k} \zeta_{kr} \lambda_{ir} M_{jk} = \sum_k (\lambda_n \delta_{ik} - P_i) M_{jk} ,$$

т.е. $\Delta_n \lambda_{ij} = \lambda_n M_{ij} - P_i P_j$. При $i = j$ и $\Delta_n = 0$ получаем связь между величинами P_j и главными минорами: $P_j^2 = \lambda_n M_{jj}$.

Литература

1. G.Källen, A.S.Wightman. Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk, I, N 6 (1958)
2. L.Brown. Nuovo Cimento 22, 178 (1961).
3. F.R.Halpern. Phys. Rev. Lett., 10, 310 (1963).
4. S.Klarsfeld. Phys. Lett., 5, 204 (1963).
5. Б.Н. Валуев. Препринт ОИЯИ, Е-1581, Дубна, 1964; ЖЭТФ, 47, 649 (1964).
6. Л.Д. Ландау. ЖЭТФ, 37, 62 (1959).
7. В.Е. Асрибеков. ЖЭТФ, 43, 1826 (1962).
8. G.Källen, I.S.Toll. A Special Class of Feynman Integrals in Two Dimensional Space Time, University of Maryland, Tech. Report N 378, May 1964.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 августа 1964 г.