2
Р-42

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Р-180

Б.В.Медведев, М.К.Поливанов

Р - 180

ОБ ОДНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКИ

ДАН СССР, 1958, т 121, № 4, с 623-626

Дубна, 1958 год

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Б.В.Медведев, М.К.Поливанов

Р - 180

ОБ ОДНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКИ

Дубна, 1958 год

В предыдущей работе/I/ Н.Н.Боголюбова и нашей был предложен метод использования индефинитной метрики в задачах квантовой теории поля. Целью настоящей заметки является: пояснить смысл предложенного приема путем рассмотрения некоторой аналогии, построенной в рамках классической теории поля.

Рассмотрим два классических поля, например, комплексное поле ψ (x) и вещественное χ (x) с лагранжианом взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{int} = g\int \overset{*}{\varphi}(x)\varphi(x)\chi(x)\,dx \tag{I}$$

Поле φ (x) будем считать настоящим физическим полем, а поле χ (x) - фиктивным (в смысле/I/) и представим его в виде разложения

$$\chi(x) = \sum_n c_n \varphi_n(x) \quad \text{x)} \tag{2}$$

Очевидно, что аналогом "полей с индефинитной нормой" в классической теории поля будут поля с отрицательной энергией или, что то же самое, поля с обратным знаком у лагранжиана свободного поля. В соответствии с этим мы запишем теперь полный лагранжиан как

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\int\left(\partial_\mu \overset{*}{\varphi}(x)\,\partial^\mu\varphi(x) - M^2\overset{*}{\varphi}(x)\varphi(x)\right)dx + \\ &+\frac{1}{2}\sum_n \epsilon_n\int dx\left(\partial_\mu\varphi_n(x)\,\partial^\mu\varphi_n(x) - m^2\varphi_n^2(x)\right) + \\ &+g\sum_n c_n\overset{*}{\varphi}(x)\varphi(x)\varphi(x)\,dx\end{aligned} \tag{3}$$

---

x) Можно было бы, конечно, считать, что поле χ (x) содержит и "физическую" составляющую φ (x). Тогда мы пришли бы к модели теории поля с обычным тройным взаимодействием.

(мы обозначили через М массу поля φ (x) и через m_n - массы фиктивных полей φ_n (x)), где $\epsilon_n = \pm 1$, полям с $\epsilon_n = -1$ соответствовала бы в квантовой теории индефинитная метрика.

Варьирование (3) даст нам

$$(\Box - M^2)\varphi(x) = -g\sum_n c_n \varphi_n(x)\varphi(x) = -\mathcal{J}(x) \tag{4.1}$$

$$(\Box - m_n^2)\varphi_n(x) = -g c_n \epsilon_n \overset{*}{\varphi}(x)\varphi(x) = -j_n(x) \tag{4.2}$$

Действуя теперь как при обычном выводе формализма Янга-Фелдмана, можем переписать (4.2) в интегральной форме:

$$\varphi_n(x) = \varphi_n^{in}(x) - \int D_{m_n}^{ret}(x-x')\, j_n(x')\, dx' \tag{5.1}$$

или

$$\varphi_n(x) = \varphi_n^{out}(x) - \int D_{m_n}^{adv}(x-x')\, j_n(x')\, dx' \tag{5.2}$$

где, как обычно, падающие поля φ_n^{in} (x) подчиняются свободным уравнениям и совпадают с φ_n (x) при $t \to -\infty$, а уходящие поля φ_n^{out} (x) — при $t \to +\infty$. Складывая и вычитая эти уравнения и вводя симметричные функции Грина $\bar{D}_n$ (x) и перестановочные функции Паули-Иордана D_n (x) для полей с массами m_n с помощью обычных соотношений

$$D_{m_n}^{ret}(x) = \bar{D}_n(x) + \frac{1}{2} D_n(x); \quad D_{m_n}^{adv}(x) = \bar{D}_n(x) - \frac{1}{2} D_n(x) \tag{6}$$

получим вместо (5)

$$v_n(x) \equiv \frac{\varphi_n^{out}(x) - \varphi_n^{in}(x)}{2} = \frac{1}{2}\int D_n(x-x')\, j_n(x')\, dx' \tag{7.1}$$

и

$$U_n(x) \equiv \frac{\varphi_n^{out}(x) + \varphi_n^{in}(x)}{2} \int \bar{D}_n(x-x') j_n(x') dx' - \varphi_n(x) \qquad (7.2)$$

В соответствие с намеченной в [I] программой мы хотим, чтобы фиктивные поля если бы и несли энергию, импульс и другие динамические характеристики, то во всяком случае не могли бы обмениваться ими за все время соударения с физическими полями. Иными словами, мы хотим, чтобы асимптотические значения при $t = +\infty$ и при $t = -\infty$ таких динамических характеристик фиктивных полей φ_n (x) совпадали бы друг с другом. Но все такие характеристики (мы, конечно, считаем, что при $t \to \pm\infty$ взаимодействие включается с помощью адиабатической гипотезы) будут при $t = \pm\infty$ выражаться в виде сумм (интегралов) членов вида

$$\varphi_n^{out}(x) \quad \varphi_n^{out}(x') \text{ и, соответственно } \varphi_n^{in}(x) \quad \varphi_n^{in}(x').$$

Поэтому, чтобы удовлетворить нашему требованию, достаточно наложить условие

$$\varphi_n^{out}(x)\varphi_n^{out}(x') - \varphi_n^{in}(x)\varphi_n^{in}(x') = 0 \qquad (8)$$

Подставляя в (8) вместо φ_n^{in} (x), φ_n^{out} (x), введенные в (7) поля U (x) и V (x), мы придем к равносильному (8) условию

$$U_n(x)V_n(x') + V_n(x)U_n(x') = 0 \qquad (9)$$

Итак, чтобы удовлетворить тому требованию, чтобы энергия и т.п. не передавалась бы нефизическим полям, достаточно потребовать, чтобы

$$U_n(x) = \frac{\varphi_n^{out}(x) + \varphi_n^{in}(x)}{2} = 0 \qquad (9а)$$

или

$$V_n(x) = \frac{\varphi_n^{out}(x) - \varphi_n^{in}(x)}{2} = 0 \text{ x)} \qquad (9б)$$

Возвращаясь теперь к уравнениям (7), видим, что условия (9а) и (9б) оказываются принципиально совершенно различного характера. Действительно, условие (9б) требует обращения в нуль стоящего в первой части (7.I) интеграла от физических полей φ (x). Поэтому оно оказывается условием, налагаемым и на физическую часть системы, и ясно, что его выполнения можно добиться лишь при наличии у физической части системы некоторых особых свойств.

Напротив, условие (9а) не налагает на физическую часть системы никаких ограничений. Благодаря тому, что в правой части (7.2) стоит кроме интеграла от физических полей φ (x) еще и нефизическое поле φ_n (x), мы для любых φ (x) всегда можем удовлетворить (9а) за счет выбора φ_n (x) -- уравнения (7.2) будут тогда просто определять нефизические поля φ_n (x) через интегралы от физических полей. Итак, мы всегда можем наложить на систему условие (9а), не опасаясь возникновения каких-либо противоречий[xx].

---

x) На самом деле, необходимо было бы требовать не выполнения (9а) во всех точках, а только обращения в нуль определенного рода интегралов от сумм членов такого вида. Поскольку эти линейные комбинации были бы довольно многообразными, то детальный анализ вопроса о существовании такой возможности был бы достаточно сложным.

xx) Заметим здесь, что если бы мы попытались добиться не отсутствия обмена энергией и т.п. нефизических состояний с физическими, а отсутствия у нефизических состояний энергии и т.п., то для этого потребовалось бы наложить одновременно оба условия и (9а) и (9б). В свете сказанного ясно, что это не привело бы к противоречию только если бы физическая часть системы обладала бы некоторыми особыми свойствами.

Воспользовавшись этим обстоятельством, мы наложим условие (9а), чтобы вовсе исключить нефизические поля φ_n (x) и работать в дальнейшем только с одним физическим полем φ (x).

Мы придем тогда к лагранжиану взаимодействия

$$\mathcal{L}_{int} = g^2 \int dx\, dx'\, \overset{*}{\varphi}(x)\, \varphi(x')\, K(x-x')\, \overset{*}{\varphi}(x')\, \varphi(x') \tag{10}$$

и уравнениям движения

$$(\Box - m^2)\varphi(x) = -g^2 \int dx'\, \overset{*}{\varphi}(x')\, \varphi(x')\, K(x-x')\, \varphi(x) \tag{11}$$

где ядро K(x–x)

$$K(x-x') = \sum_n \epsilon_n c_n^2\, \overline{D}_n\,(x-x') \tag{12}$$

выражается в виде суммы (или интеграла, если ввести непрерывное многообразие фиктивных полей) от симметричных гриновских функций $\overline{D}_n\,(x-x')$ с различными массами m_n. Ясно, что распоряжаясь должным образом коэффициентами C_n и знаковыми множителями ϵ_n, мы можем сделать K(x) либо сингулярным, либо в желательной степени регулярным. Последнее возможно, только за счет допущения "индефинитной" метрики. В случае непрерывного спектра масс мы получим вместо (12):

$$K(x-x') = \int_0^\infty d(m^2)\, \rho(m^2)\, \overline{D}_m\,(x-x') \tag{13}$$

где спектральная функция ρ (m^2) не обязана в силу сделанных замечаний быть положительной.

Таким образом мы видим, что исключая нефизические поля φ_n (x) из первоначально локального лагранжиана (I) с помощью условия (9а), мы приходим к теории типично нелокального вида. Этот результат совершенно естественен - можно установить прямую аналогию между ним и попытками ряда авторов /2/ исключить за счет требования пользоваться только полусуммами запаздывающих и опережающих потенциалов из электродинамики всякое понятие о фотонах, сформулировав ее как чистую теорию дальнодействия. Полученное ядро (I2) (или (I3)) не является произвольной функцией $(x-x)^2$, поскольку в силу свойств функций $\overline{\mathcal{D}}$ оно во всяком случае ограничено требованием

$$K\left(x^2\right)=0 \qquad x^2<0$$

Подчеркнем, что нелокальный характер уравнений (II) существенным образом связан с наложенным нелокальным условием (9а). Действительно, поскольку функции $\overline{D}$ являются функциями Грина уравнения Клейна-Гордона, то могло бы показаться, что дифференцируя (II) должное число раз, можно было бы во всяком случае для конечного числа фиктивных полей вернуться к дифференциальному уравнению. Однако, на такое уравнение оказались бы наложенными нелокальные граничные условия, и теория осталась бы нелокальной.

Заметим, что при переходе от рассматриваемого здесь классического примера к квантовому случаю возникает один существенно новый момент. Как мы показали, нелокальная теория может быть получена из локальной при наложении некоторых дополнительных условий на полевые величины. В квантовой теории эти условия можно в принципе накладывать или на операторы поля, или, как дополнительное условие Лоренца в электродинамике, рассматривать их как условия на допустимые амплитуды состояния. При обычном построении нелокальных теорий всегда избирался первый путь. Но накладывая на операторы поля дополнительные условия, мы всегда рискуем войти в конфликт с перестановочными соотношениями. Именно в этом обстоятельстве мы усматриваем причину неудач рассматривавшихся нелокальных теорий; неслучайно, например, что трудности варианта Кристенсена-Моллера-Блоха[3] оказались связанными как раз с некоммутативностью операторов поля.

Общая идея предложенного в[1] метода как раз и состоит в том, что должен быть избран второй путь, не приводящий[1] к подобного рода трудностям. Поэтому можно надеяться, что предложенный в[1] метод даст, в частности, возможность построить непротиворечивую теорию с нелокальным взаимодействием. В этой связи нам хотелось бы отметить, что в последнее время появляются и некоторые экспериментальные указания на необходимость ввести нелокальное взаимодействие. Так, Ли и Янг[4] обнаружили недавно, что экспериментальное значение параметра Мишеля при распаде μ -мезона может быть легко объяснено, если ввести нелокальное ядро в четырехфермионное взаимодействие, причем обязательно включающее соответствующие полям с индефинитной метрикой отрицательные коэффициенты C_n .

В заключение мы хотели бы поблагодарить Н.Н.Боголюбова, ценными советами которого мы имели возможность пользоваться, выполняя эту работу.

Литература

1. Н.Н.Боголюбов, Б.В.Медведев, М.К.Поливанов, Доклады Высшей Школы (в печати).
2. См., например, J.A.Wheeler and R.P.Feynman, Rev.Mod.Phys. 17, 157 (1945); 21,425 (1949) где имеются ссылки на предыдущие работы, начиная с Ритца и Эйнштейна.
3. C.Kristiensen and C.Møller, Dan.Mat.Fys.Medd., 27, n.7 (1952); C.Bloch, Dan.Mat.Fys.Medd., 27, n.8 (1952).
4. T.D.Lee and C.N.Yang, Phys.Rev., 108, 1611 (1957).

Работа поступила в издательский отдел 17 апреля 1958 года.