

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория ядерных проблем

---

В. И. Данилов, О. В. Савченко

P-179

Метод фокусировки заряженных частиц  
от ускорителей

март 1958 год

## А н н о т а ц и я

В работе рассмотрен вариант фокусировки заряженных частиц, получаемых на синхроциклотроне Лаборатории ядерных проблем. Фокусировка частиц осуществляется магнитным полем, сформированным в зазоре отклоняющего электромагнита, с помощью железных брусков. Показано, что при определенном соотношении размеров этих брусков действие фокусирующего устройства эквивалентно действию магнитной квадрупольной линзы. С помощью таких линз плотность интенсивности пучка поляризованных протонов с энергией  $\sim 600$  Мэв в месте расположения регистрирующей аппаратуры была повышена в 3 раза, а плотность интенсивности пучка мезонов с энергией  $\sim 300$  Мэв — в 2,7 раза.

Заряженные частицы, выведенные из камеры ускорителя, обычно проходят большой путь до регистрирующей аппаратуры, что приводит к значительному уменьшению используемой интенсивности. В ряде экспериментов для отклонения пучка или выделения потока вторичных частиц определенной энергии применяют электромагниты. Представляет практический интерес использовать поле в зазоре электромагнита не только для отклонения частиц, но одновременно для их фокусировки. Это можно осуществить путем формирования магнитного поля на пути заряженных частиц, подобного полю магнитной квадрупольной линзы. Если в зазоре электромагнита поместить ферромагнитное тело, у которого размер по направлению поля больше хотя бы одного поперечного размера, то в полях  $\gg 9000$  эрстед рассматриваемый образец намагничивается почти до насыщения.

В этом случае ферромагнитное тело можно рассматривать как равномерно намагниченное и аналитически рассчитать составляющие поля от рассматриваемого образца<sup>х)</sup>. Для прямоугольного бруска высотой  $2h$ , шириной  $2a$  и длиной  $l$  составляющие магнитного поля  $H_z$  и  $H_y$  в системе координат, показанной на рис. I, имеют вид (I).

---

х) Поле в зазоре электромагнита предполагается равномерным.

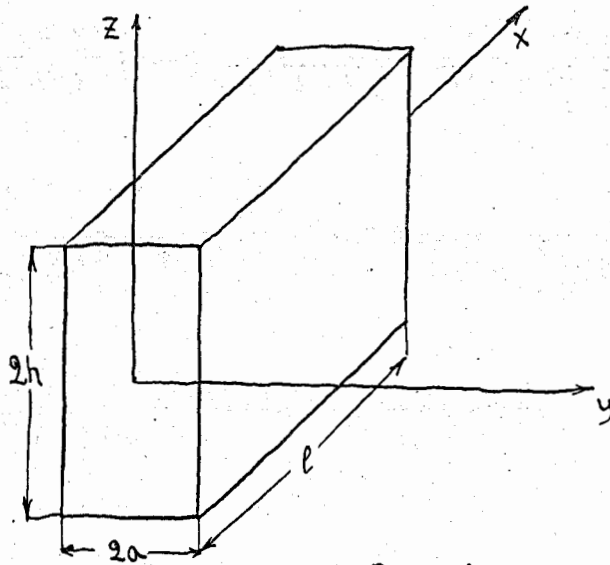


Рис. 1.

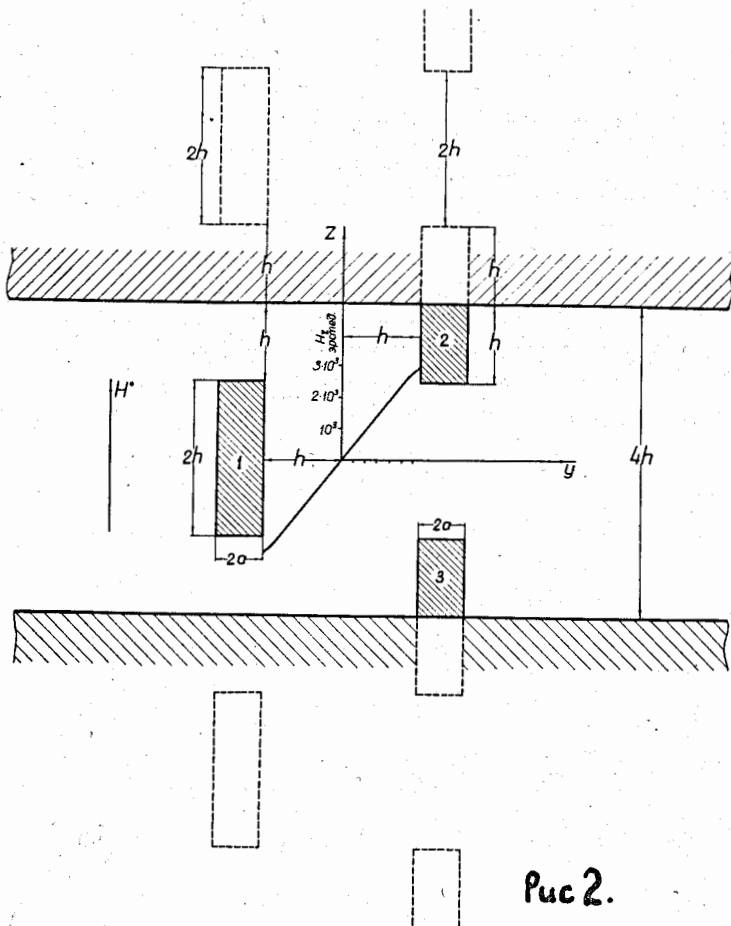


Рис. 2.

$$\begin{aligned}
 H_z(x, y, z) = M & \left\{ \operatorname{arctg} \frac{(y-a)(x-e)}{(z-h)\sqrt{(x-e)^2+(y-a)^2+(z-h)^2}} - \operatorname{arctg} \frac{(y-a)x}{(z-h)\sqrt{x^2+(y-a)^2+(z-h)^2}} - \right. \\
 & - \operatorname{arctg} \frac{(y+a)(x-e)}{(z-h)\sqrt{(x-e)^2+(y+a)^2+(z-h)^2}} + \operatorname{arctg} \frac{(y+a)x}{(z-h)\sqrt{x^2+(y+a)^2+(z-h)^2}} + \\
 & + \operatorname{arctg} \frac{(y+a)(x-e)}{(z+h)\sqrt{(x-e)^2+(y+a)^2+(z+h)^2}} - \operatorname{arctg} \frac{(y+a)x}{(z+h)\sqrt{x^2+(y+a)^2+(z+h)^2}} - \\
 & \left. - \operatorname{arctg} \frac{(y-a)(x-e)}{(z+h)\sqrt{(x-e)^2+(y-a)^2+(z+h)^2}} + \operatorname{arctg} \frac{(y-a)x}{(z+h)\sqrt{x^2+(y-a)^2+(z+h)^2}} \right\} (I)
 \end{aligned}$$

$$H_y(x, y, z) = -M \ln \left\{ \frac{[x + \sqrt{x^2 + (y+a)^2 + (z+h)^2}] \cdot [(x-e) + \sqrt{(x-e)^2 + (y-a)^2 + (z+h)^2}]}{[(x-e) + \sqrt{(x-e)^2 + (y+a)^2 + (z+h)^2}] \cdot [x + \sqrt{x^2 + (y-a)^2 + (z+h)^2}]} \right\}$$

$$\frac{[(x-e) + \sqrt{(x-e)^2 + (y+a)^2 + (z-h)^2}] \cdot [x + \sqrt{x^2 + (y-a)^2 + (z-h)^2}]}{[x + \sqrt{x^2 + (y+a)^2 + (z-h)^2}] \cdot [(x-e) + \sqrt{(x-e)^2 + (y-a)^2 + (z-h)^2}]}$$

(2)

где  $M = \frac{21000 \pm 500}{4\pi}$  эрстед - величина намагниченности для большинства ферромагнитных материалов.

Область магнитного поля, которую будем рассматривать в дальнейшем, ограничим следующими условиями (рис.2):

$$-h \leq y \leq h$$

$$-h \leq z \leq h$$

(4)

При выборе геометрии ферромагнитных брусков и расчете магнитного поля необходимо учитывать влияние полюсных наконечников на перераспределение магнитного поля от насыщенных брусков. Учет влияния полюсных наконечников можно приближенно произвести путем зеркального отражения брусков железа относительно плоской поверхности полюсов магнита (рис.2).

Система зеркально отображенных брусков для случая плоской границы рассчитана на основе метода изображений, развитого для токов<sup>(2)</sup>. В этом случае для намагниченности зеркально отображенных брусков можно написать, что

$$M_{отр} = M \cdot \left( \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \right)^k, \quad (5)$$

где  $M_{отр}$  - намагниченность зеркально отображенных брусков,  
 $M$  - намагниченность брусков в зазоре электромагнита,  
 $\mu$  - магнитная проницаемость среды,  
 $k$  - номер отражения.

В соотношении (5) предполагается, что  $\mu = const$  во всем полупространстве и не зависит от индукции. Для ферромагнитных тел это условие вообще не выполняется, однако легко видеть, что  $M_{отр}$  перестает зависеть от магнитной проницаемости среды при достаточно больших значениях последней. Если ограничиться областью

индукций, при которых  $\mu > 10$ , то можно приближенно считать, что зеркально отображенные бруски имеют одну и ту же величину намагниченности, т.е.

$$M_{\text{отр}} \approx M \quad (6)$$

Такое приближение вполне допустимо, так как вклад в величину и распределение составляющих магнитного поля от отражений относительно невелик и составляет небольшую добавку к полю основных брусков. Можно показать, что отклонение, испытанное заряженной частицей в поле бруска конечной длины  $\ell$ , равно отклонению на длине  $\ell$  в поле бруска бесконечной длины с теми же поперечными размерами. Так, для бруска конечной длины  $\ell$ , высоты  $2h$  и ширины  $2a$  имеют место следующие соотношения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_y(x, y, z) dx = H_{0y}(y, z) \cdot \ell \quad (7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_z(x, y, z) dx = H_{0z}(y, z) \cdot \ell \quad (8)$$

где  $H_y(x, y, z)$  и  $H_z(x, y, z)$  определяются из (1) и (2), а  $H_{0y}(y, z)$  и  $H_{0z}(y, z)$  составляющие напряженности полей от бесконечно-длинного бруска с тем же поперечным сечением  $2h \times 2a$ . Такая замена означает, что действие магнитного поля с краевыми спадающими участками можно заменить таким же действием однородного поля, величина которого определяется для бруска бесконечной длины. При этом поле имеет резкие геометрические границы и сосредоточено в области длиной  $\ell$ .

С помощью соотношений (7) и (8) расчет необходимых градиентов поля для фокусировки частиц можно делать для бесконечно-длинных брусков<sup>х)</sup>. Так для  $H_z$  и  $H_y$  - составляющих магнитного поля с учетом зеркального отражения, можно получить в системе координат, показанной на рис.2, в плоскости  $x = 0$ , следующие выражения:

$$H_z(y, 0) = 4M \left\{ \sum_n (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{\left(\frac{y}{h} + 1\right)}{(2n+1)} - \sum_n (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{\left(\frac{y}{h} + 1 + \frac{2a}{h}\right)}{(2n+1)} + \right. \\ \left. + \sum_n (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{\left(\frac{y}{h} - 1\right)}{(2n+1)} - \sum_n (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{\left(\frac{y}{h} - 1 - \frac{2a}{h}\right)}{(2n+1)} \right\} \quad (9)$$

$$H_y(z, 0) = 2M \left\{ \sum_n (-1)^n \ln \frac{\left[1 + \left(\frac{z}{h} + 2n + 1\right)^2\right]}{\left[1 + \left(\frac{z}{h} - 2n - 1\right)^2\right]} + \right. \\ \left. + \sum_n (-1)^n \ln \frac{\left[1 + \theta + \left(\frac{z}{h} - 2n - 1\right)^2\right]}{\left[1 + \theta + \left(\frac{z}{h} + 2n + 1\right)^2\right]} \right\} \quad (10)$$

где  $\theta = \frac{4a}{h} \left(1 + \frac{a}{h}\right)$ ,  $an = 0, 1, 2 \dots$

Разлагая выражения (9) и (10) в ряды и суммируя коэффициенты перед одинаковыми степенями  $y$  и  $z$ , получим, что

<sup>х)</sup> При этом пренебрегается кривизной траектории заряженных частиц в основном поле магнита.



$$H_z(y, 0) = 8M\theta \left\{ \frac{y}{h} \left[ \sum_n (-1)^n \frac{(2n+1)}{m_n(m_n+\theta)} \right] - \right. \\ \left. - \frac{y^3}{3h^3} \left[ \sum_n (-1)^n \frac{(2n+1)[(4-m_n)(3m_n^2+3m_n\theta+\theta^2)-3m_n^3]}{m_n^3(m_n+\theta)^3} \right] + \dots \right\} \quad (II)$$

$$H_y(z, 0) = 8M\theta \left\{ \frac{z}{h} \left[ \sum_n (-1)^n \frac{(2n+1)}{m_n(m_n+\theta)} \right] - \right. \\ \left. - \frac{z^3}{3h^3} \left[ \sum_n (-1)^n \frac{(2n+1)[(4-m_n)(3m_n^2+3m_n\theta+\theta^2)-3m_n^3]}{m_n^3(m_n+\theta)^3} \right] + \dots \right\} \quad (I2)$$

где  $m_n = (2n + 1)^2 + 1$ , а  $n = 0, 1, 2 \dots$

Оценки показывают, что коэффициент при третьей степени  $y$  и  $z$  составляет менее 1% от коэффициента при линейном члене.

Таким образом, в области, определенной условиям (4), магнитное поле имеет практически постоянный градиент, величина которого может быть рассчитана из выражения:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{8M\theta}{h} \left[ \sum_n (-1)^n \frac{(2n+1)}{m_n(m_n+\theta)} \right] \quad (I3)$$

При численных расчетах достаточно вычислить первые четыре члена этого ряда, ибо вклад от последующих членов мал и им можно пренебречь. Из анализа формулы (I3) следует, что выбранная геометрия прямоугольных брусков действует как магнитная квадра-

польная линза с апертурой  $2h$ , фокусирующая заряженные частицы в одной плоскости и дефокусирующая их в другой, перпендикулярной, плоскости. Для получения фокусирующего действия в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях необходимо последовательно расположить на пути пучка две или несколько квадрупольных линз с градиентами, чередующимися по знаку. В рассматриваемом случае изменение знака градиента напряженности магнитного поля достигается симметричной перестановкой брусков железа относительно плоскости  $zX$  (рис.2). Расчет фокусирующего действия линзы можно сделать по следующим формулам (3). Для частиц, двигающихся в плоскости  $zX$ , оптическая сила двухсекционной линзы равна:

$$\frac{1}{F_{xz}} = K^{1/2} (\sin \alpha \operatorname{ch} \alpha - \cos \alpha \operatorname{sh} \alpha + c K^{1/2} \sin \alpha \operatorname{sh} \alpha) \quad (I4)$$

где  $K = \frac{\partial H_y}{\partial z} / HR \text{ см}^{-2}$   $HR = \frac{pc}{300}$  эрстед/см,  
 $pc$  - импульс заряженной частицы в  $eV$ ,  
 $\frac{\partial H_y}{\partial z}$  - градиент поля, выраженный в эрстед/см,  
 $\alpha = K^{1/2} \ell$ ,  $\ell$  - длина секции линзы в см,  
 $c$  - расстояние между секциями линзы.

При этом главная плоскость линзы находится на расстоянии

$$X_{xz} = -F_{xz} [1 - \cos \alpha \operatorname{ch} \alpha + \sin \alpha \operatorname{sh} \alpha + c K^{1/2} \sin \alpha \operatorname{ch} \alpha] \quad (I5)$$

от заднего края линзы. Разлагая в ряд (I4) и (I5) и ограничиваясь существенными членами, получим, что

$$\frac{1}{F_{xz}} \approx K^2 \ell^2 \left[ \frac{2}{3} \ell + c \right] \quad (16)$$

$$x_{xz} \approx -\frac{1}{\frac{2}{3} K \ell} \quad (17)$$

Аналогичные выражения для частиц, сфокусированных в плоскости  $yx$ , можно получить, если в выражениях (14) и (15) заменить  $K$  на  $-K$ . Тогда оптическая сила и положение главной плоскости при замене  $K^{1/2}$  на  $iK^{1/2}$  и  $\alpha$  на  $i\alpha$  запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{F_{xy}} &= K^{\frac{1}{2}} \left[ \sin \alpha \operatorname{ch} \alpha - \cos \alpha \operatorname{sh} \alpha + c K^{\frac{1}{2}} \operatorname{sh} \alpha \sin \alpha \right] \approx \quad (18) \\ &\approx K^2 \ell^2 \left( \frac{2}{3} \ell + c \right) \end{aligned}$$

$$x_{xy} = -F_{xy} \left[ 1 - \operatorname{ch} \alpha \cos \alpha - \operatorname{sh} \alpha \sin \alpha - c K^{\frac{1}{2}} \operatorname{sh} \alpha \cos \alpha \right] \approx \frac{1}{\frac{2}{3} K \ell} \quad (19)$$

Расстояния  $L_1$  от переднего края линзы до источника заряженных частиц (рис.3) и  $L_2$  - от заднего края линзы до точки, в которой частицы должны быть сфокусированы, связаны с параметрами магнитной линзы следующими выражениями:

$$L_{2xz} = \frac{[(\cos \alpha \operatorname{ch} \beta - \sin \alpha \operatorname{sh} \beta) + (L, K^{\frac{1}{2}})^{-1} (\sin \alpha \operatorname{ch} \beta + \cos \alpha \operatorname{sh} \beta) - c K^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} \beta (\sin \alpha - (L, K^{\frac{1}{2}})^{-1} \cos \alpha)]}{K^{\frac{1}{2}} [(\sin \alpha \operatorname{ch} \beta - \cos \alpha \operatorname{sh} \beta) - (L, K^{\frac{1}{2}})^{-1} (\sin \alpha \operatorname{sh} \beta + \cos \alpha \operatorname{ch} \beta) + c K^{\frac{1}{2}} \operatorname{sh} \beta (\sin \alpha - (L, K^{\frac{1}{2}})^{-1} \cos \alpha)]}$$

$$L_{2xy} = \frac{[(ch\alpha \cos\beta + sh\alpha \sin\beta) + (L, k^{\frac{1}{2}})^{-1} (sh\alpha \cos\beta + ch\alpha \sin\beta) + ck^{\frac{1}{2}} \cos\beta (sh\alpha + (L, k^{\frac{1}{2}})^{-1} ch\alpha)]}{k^{\frac{1}{2}} [(ch\alpha \sin\beta - sh\alpha \cos\beta) - (L, k^{\frac{1}{2}})^{-1} (ch\alpha \cos\beta - sh\alpha \sin\beta) + ck^{\frac{1}{2}} \sin\beta (sh\alpha + (L, k^{\frac{1}{2}})^{-1} ch\alpha]}$$

где  $\alpha = k^{1/2} \ell_1$ ,  $\beta = k^{1/2} \ell_2$ ,

$\ell_1$  - длина первой секции линзы,

$\ell_2$  - длина второй секции линзы (рис.3).

Такая линза обладает сильным астигматизмом для частиц, фокусирующихся во взаимно-перпендикулярных плоскостях. Это связано с тем, что главные плоскости такой линзы лежат по разные стороны от заднего края линзы, а фокусные расстояния для плоскостей  $xz$  и  $xy$  одинаковы. Для устранения астигматизма в двухсекционной магнитной линзе можно несколько изменить длину одной секции линзы так, чтобы  $L_{2xy}$  и  $L_{2xz}$ , определяемые выражением (20), совпали. Линза, которая обладает меньшим астигматизмом, показана на рис.4.

Оптическая сила такой линзы для частиц, фокусирующихся в плоскости  $xy$ , определяется выражением:

$$\frac{1}{F_{xy}} = k^{1/2} \left\{ \sin 2\alpha \operatorname{ch} 2\alpha - \operatorname{sh} 2\alpha + ck^{1/2} (\sin 2\alpha \operatorname{sh} 2\alpha - 2 \sin^2 \alpha \operatorname{ch} 2\alpha) - \right. \quad (21)$$

$$\left. - c^2 k \sin^2 \alpha \operatorname{sh} 2\alpha \right\},$$

а расстояние главной плоскости от заднего края линзы равно

$$x_{xy} = -F_{xy} \left\{ 1 - \cos 2\alpha \operatorname{ch} 2\alpha - ck^{1/2} (\cos 2\alpha \operatorname{sh} 2\alpha - \sin 2\alpha \operatorname{ch} 2\alpha) + \right. \quad (22)$$

$$\left. + c^2 k \sin 2\alpha \operatorname{sh} 2\alpha \right\}$$

где  $\alpha = k^{1/2} \ell$ .

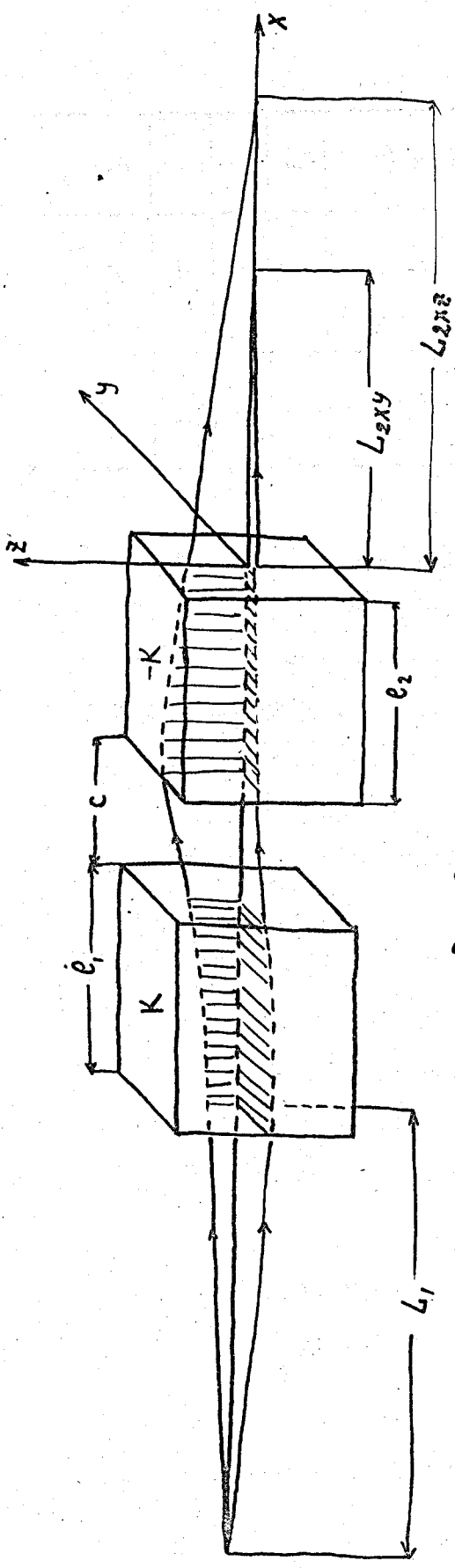


Рис 3

Двухсекционная магнитная квадрупольная линза.

13

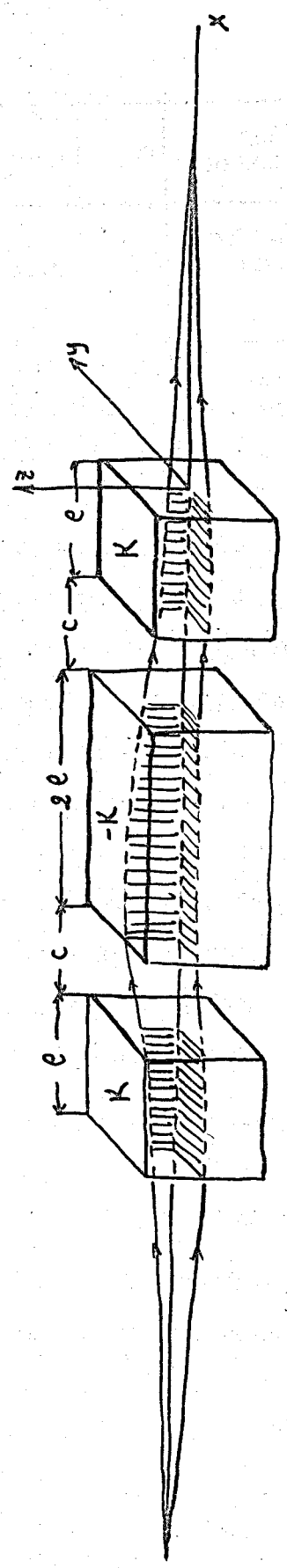


Рис. 4.

Трёхсекционная магнитная квадрупольная линза.

Разлагая в ряд (21) и (22) и ограниваясь первыми членами, имеем

$$\frac{1}{F_{xy}} = 2K^2 l^2 \left[ \frac{2}{3} l + c \right] \quad (23)$$

$$x_{xy} = -(2l + c) \quad (24)$$

Для частиц, фокусирующихся в плоскости  $zx$ , выражения для  $\frac{1}{F_{zx}}$  и  $x_{zx}$  получаются заменой  $K$  на  $-K$  (21), (22), (23) и (24). Так как в выражение (23)  $K$  входит квадратично, а положение главной плоскости вообще не зависит от  $K$ , то в первом приближении такая фокусирующая система не обладает астигматизмом. Главная плоскость линзы находится точно посередине и в расчетах фокусного расстояния  $L_1$  и  $L_2$  измеряется от середины линзы до источника заряженных частиц и точки их фокусировки. Следует отметить, что трехсекционная линза при тех же значениях общей длины и градиента поля имеет примерно вдвое меньшую оптическую силу по сравнению с двухсекционной линзой.

На основе полученных формул были рассчитаны 2 варианта фокусирующих линз. Их параметры и назначение приведены в следующей таблице:

Назначен. линзы	Вид линзы	$a_{cm}$	$h_{cm}$	$L_1, \mu$	$L_2, \mu$	$K_{cm^{-2}}$	$F, \mu$	$r_1, cm$	$r_2, cm$	$C_{cm}$
Фокусир. поляриз. протонов $E=600$ Мэв	2-х сек цион.	1,5	3,25	4,2	5,7	$2,56 \cdot 10^{-4}$	2,5	45	44	6
Фокусир. $\pi^+$ -мезон. $E=300$ Мэв	3-х секц.	1,5	3,25	2,3	5,4	$7,16 \cdot 10^{-4}$	1,6	17	34	10

Общий вид одной секции линзы изображен на рис.5. Выбранная конструкция линз позволяет легко и быстро устанавливать их в зазоре электромагнита. Крепление в зазоре электромагнита осуществлялось за счет прижима одного из концов железных брусков, имеющих небольшой люфт по вертикали, к полюсам электромагнита. Брускам железа была придана кривизна, равная кривизне траектории движения частиц, а передняя и задняя грани линзы были сделаны перпендикулярными направлению пучка. Отдельные секции линзы были укреплены на направляющих полозьях, что позволило в некоторых пределах менять оптическую силу линз и производить окончательную настройку всей системы на максимум увеличения интенсивности.

Для поляризованного пучка протонов с энергией  $\sim 600$  Мэв интенсивность была увеличена в 3 раза в месте расположения аппаратуры, а для мезонов с энергией  $\sim 300$  Мэв - в 2,7 раза.

Авторы выражают благодарность Б.С.Неганову за помощь в изготовлении и испытании линз и А.А.Кропину за ряд полезных советов.

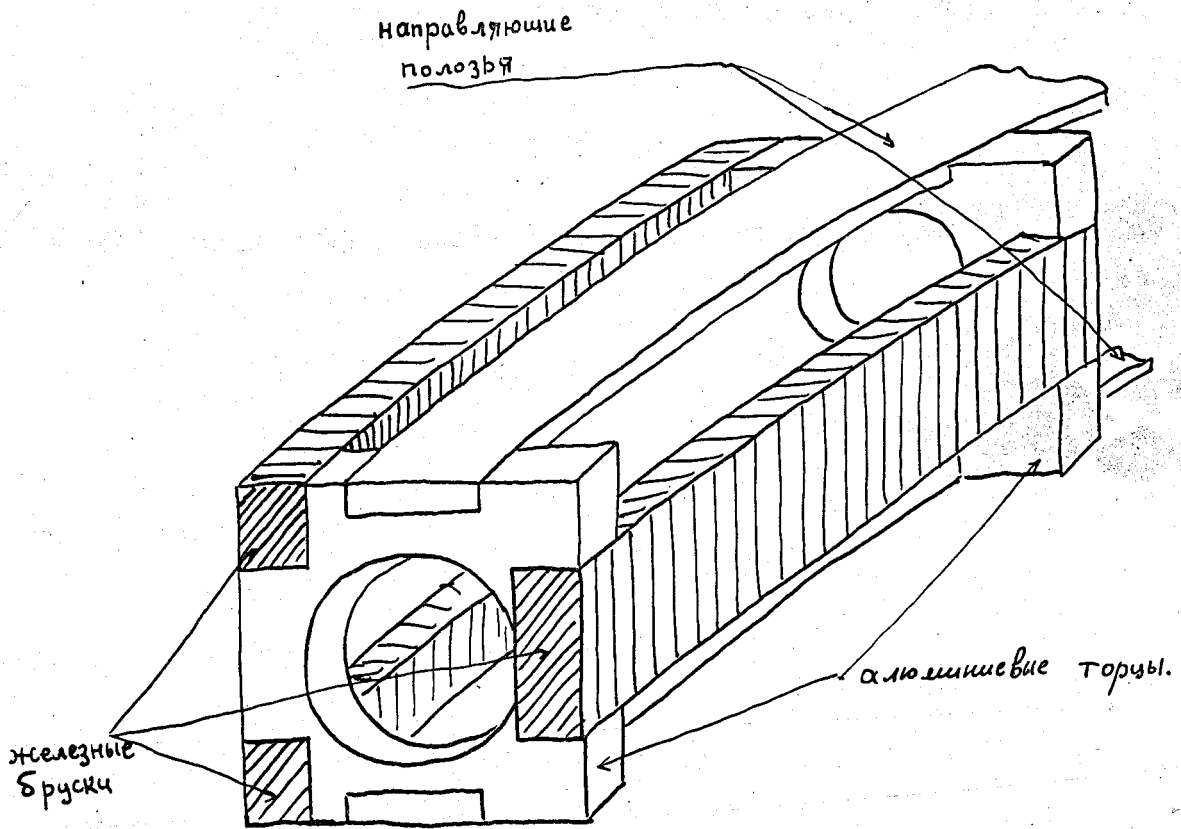


Рис. 5. Общий вид одной секции линзы.



Л и т е р а т у р а

1. Данилов В.И., Дмитриевский В.П., Отчет ЛЯП 1953г.
2. Смайт В., Электростатика и электродинамика, 1954г.
3. Левингстон, "Ускорители заряженных частиц".

Статья поступила в издательский отдел 4марта 1958 г.